УДК 53.04

ТЕОРЕМА О КОЛИЧЕСТВЕ И СТРУКТУРЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК n–МЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА В КОНТЕКСТЕ ИНФОРМАЦИОННОГО АНАЛИЗА И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Московкин В.М., Билаль Н.Е. Сулейман

e-mail: vmoskovkin@mail.ru

С помощью элементарных методов комбинаторной математики и единственности решений систем линейных алгебраических уравнений для невырожденных случаев доказана теорема о количестве и структуре особых точек n–мерной динамической системы популяционной динамики Лотки-Вольтерра. Показано, что количество особых точек для этой системы равняется 2^n, а их структура в отношении сочетания нулевых и ненулевых координат совпадает с биноминальными коэффициентами. Сделано предположение, что с помощью этой динамической системы можно моделировать конкурентные взаимодействия среди n научных фронтов в рамках широкой области научных исследований.

Ключевые слова: модель Лотки-Вольтерра, популяционная динамика, количество особых точек, биноминальные коэффициенты, решения систем линейных алгебраических уравнений

THEOREM ABOUT THE NUMBER AND STRUCTURE OF THE SINGULAR POINTS N-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEM OF POPULATION DYNAMICS LOTKA-VOLTERRA IN CONTEXT OF INFORMATIONAL ANALYSIS AND MODELING

Moskovkin V.M., Bilal N.E. Suleiman

e-mail: vmoskovkin@mail.ru

By elementary methods of combinatorial mathematics and uniqueness of solutions systems of linear algebraic equations for nondegenerate cases proved a theorem about the number and structure of the singular points of n-dimensional dynamical system of population dynamics Lotka-Volterra model. Showed that the number of singular points for this system is equal to 2^n, and their structure on a combination of zero and nonzero coordinates coincides with the binomial coefficients.

Keywords: Lotka-Volterra's model, population dynamics, number of singular points, binomial coefficients, solution systems of linear algebraic equations

Многомерная модель популяционной динамики Лотки-Вольтерра была предложена Вито Вольтерра в работе [1], но так как параллельно такого рода уравнения в биофизической и химической кинетике развивал А. Лотка [2], то за уравнениями популяционной динамики закрепились фамилии обоих ученых. К изучению данной модели обращались такие крупные ученые как Г. Николис и И. Пригожин [3], Р. Мэй [4] и др. При рассмотрении этой модели ученые, в основном, изучали характер устойчивости нетривиальной особой точки. Например, Б. Гох [5] при изучении моделей мутуализма показал, что необходимым и достаточным условием для локальной и глобальной устойчивости нетривиальной особой точки модели Лотки-Вольтерра является положительность всех ведущих (главных) миноров матрицы Якоби для этой модели. Позднее З. Лу и Е. Такеучи [6] доказали ряд теорем по глобальной устойчивости системы уравнений Лотки-Вольтерра. В работах по экономической динамике [7, 8] было замечено, что n-мерная система уравнений популяционной динамики Лотки-Вольтерра имеет 2^n особых точек, но до сих пор доказательства этому представлено не было. Возможность использования таких уравнений в информационном анализе и моделировании взаимодействий результатов различных видов НИОКР показана в работе [9]. Исходная n-мерная модель Лотки-Вольтерра, на наш взгляд, может быть использована при моделировании конкурентных взаимодействий n научных фронтов в рамках широкой области научных исследований, при которых будут наблюдаться разнообразные варианты подавления одних научных фронтов другими, а также их сосуществования. Ниже будет сформулирована и доказана теорема о количестве и структуре особых точек n-мерной модели Лотки-Вольтерра.

Основная часть

Теорема. Количество особых точек n-мерной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений Лотки-Вольтера с положительными коэффициентами и невырожденными случаями систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при определении координат особых точек, равняется 2^n, а их структура в отношении сочетания нулевых и ненулевых координат совпадает с биномиальными коэффициентами.

Доказательство. Будем рассматривать систему уравнений Лотки-Вольтера в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left[a_i - \sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j\right]. \qquad (1)$$

Для удобства доказательства теоремы перепишем правые части этой системы уравнений, приравненные к нулю, в виде:

$$\begin{cases} x_1(\alpha_1 - \gamma_{11}x_1 - \gamma_{12}x_2 - \ldots - \gamma_{1i}x_i - \ldots - \gamma_{1n}x_n) = 0 \\ x_2(\alpha_1 - \gamma_{21}x_1 - \gamma_{22}x_2 - \ldots - \gamma_{2i}x_i - \ldots - \gamma_{2n}x_n) = 0 \\ \vdots \\ x_i(\alpha_i - \gamma_{i1}x_1 - \gamma_{i2}x_2 - \ldots - \gamma_{ii}x_i - \ldots - \gamma_{in}x_n) = 0 \\ \vdots \\ x_n(\alpha_n - \gamma_{n1}x_1 - \gamma_{n2}x_2 - \ldots - \gamma_{ni}x_i - \ldots - \gamma_{nn}x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Будем рассматривать невырожденные случаи решения линейных систем алгебраических уравнений, которые имеют единственные решения.

Из системы уравнений (2) сразу же выделяются две особые точки – нулевая и нетривиальная (ненулевая), которая является решением n-мерной системы линейных алгебраических уравнений, стоящих в скобках исходной системы (2). С точки зрения комбинаторной математики, этим особым точкам соответствуют следующие сочетания:

$C_n^n = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1 - n$ нулей из n переменных;

$C_n^0 = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 0$ нулей из n переменных.

В первом случае мы имеем единственную нулевую особую точку, во втором – единственную ненулевую особую точку.

Далее, количество особых точек с сочетанием одной нулевой координаты из n переменных равняется C_n^1, количество особых точек с сочетанием двух нулевых координат из n переменных равняется C_n^2, количество особых точек с сочетанием i нулевых координат из n переменных равняется C_n^i, количество особых точек с сочетанием $(n - 1)$ нулевых координат из n переменных равняется $C_n^{n-1} = n$. Следовательно, общее количество особых точек равняется

$$N = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} =$$

$$= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^i + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n,$$

$$C_n^i = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}, \ n \geq i\,.$$

Таким образом, показано, что общее количество особых точек равняется 2^n, а их структура в отношении сочетания нулевых и ненулевых координат повторяет последовательную совокупность коэффициентов в биноме Ньютона.

В этом доказательстве подразумевается следующее положение. Когда мы берем все особые точки с нулевыми координатами в количестве i, то оставшиеся системы линейных алгебраических уравнений $(n - i)$-порядка имеют единственные решения (невырожденные случаи).

Заключение

Для n-мерной системы уравнений популяционной динамики, предложенной в работах В. Вольтера и А. Лотки еще в середине 20-х годов прошлого века, до сих пор не была доказана теорема о количестве и структуре особых точек этой классической системы уравнений. В данной работе такая теорема была доказана с помощью элементарных методов комбинаторной математики и единственности решений систем линейных алгебраических уравнений для невырожденных случаев. С точки зрения информационного анализа и моделирования информационных процессов и систем, следует отметить, что динамическая система (1) может, в принципе, моделировать процесс конкурентных взаимодействий n научных фронтов в рамках широкой области научных исследований. Тогда в такой системе могут наблюдаться 2^n вариантов исходов таких взаимодействий из которых 2^n–2 будут связаны с подавлением одних научных фронтов другими, которые окажутся более конкурентоспособными.

Список литературы

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

2. Lotka A.J. Elements of Physical Biology. – Baltimore: Williams and Wilkins, 1925.

3. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. – М.: Мир, 1979. – 512 с.

4. May R.M. Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics // Nature. – 1976. – Vol. 261. – P. 459–467.

5. Goh B.S. Stability in models of mutualism // The American Naturalist. – 1979. – Vol. 113, № 2. – P. 261–274.

6. Lu Z., Takeuchi Y. Qualitative Stability and Global Stability for Lotka-Volterra Systems // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1994. – Vol. 182, № 1. – P. 260–268.

7. Московкин В.М., Журавка А.В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий: (контекст уравнений популяционной динамики в социально-экономических системах) // Бизнес Информ. – Харьков, 2002. – № 5–6. – С. 27–34.

8. Московкин В.М., Журавка А.В., Михайлов В.С. Расчет сценариев конкурентных, кооперационных и смешанных стратегий для n-мерной модели конкурентно-кооперационных взаимодействий в социально-экономических системах // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2004. – № 5–6 (29–30). – С. 32–34.

9. Московкин В.М., Билаль Н.Е. Сулейман, Голиков Н.А. Математическая модель взаимодействия результатов различных видов НИОКР // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2011. – № 2. – С. 13–17.