

**КОНСТРУИРОВАНИЕ  
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ  
НА БИКУБИЧЕСКОМ ЭЛЕМЕНТЕ  
СЕРЕНДИПОВА СЕМЕЙСТВА**

**И.А.Астионенко, Е.И.Литвиненко, А.Н.Хомченко**

Херсонский национальный технический университет,

Бериславское шоссе, 24, г. Херсон, 73008, Украина e-mail: [mmkntu@gmail.com](mailto:mmkntu@gmail.com).

В работе приведено конструктивное доказательство существования многопараметрических базисов конечного элемента серендипова семейства. На примере плоского элемента с 12 узлами (бикубическая интерполяция) впервые построено бесконечное множество интерполяционных полиномов, содержащих от 12 до 16 параметров.

Ключевые слова: конечный элемент серендипова семейства, полиномиальный базис типа Лагранжа, многопараметрическая интерполяция, линии нулевого уровня.

**1. Введение.** В начале 40-х годов прошлого века, когда Курант опубликовал идею метода конечных элементов (МКЭ), в среде инженеров и вычислителей безраздельно господствовал метод конечных разностей (МКР), основанный на идеях Бьёркнеса и развитый в работах Ричардсона, Саутвелла и Мотца. Курант предложил разделить прямоугольную ячейку ортогональной сетки МКР пополам на два треугольника, имея в виду возможность применения в треугольнике линейной интерполяции функции двух аргументов. Позже Тернер обобщил идею Куранта на произвольно ориентированные треугольники, а процедура триангуляции стала наиболее естественным и привычным способом дискретизации области в двумерных краевых задачах. После появления унитарного базиса билинейной интерполяции возродился интерес к прямоугольным (квадратным) ячейкам. Стало понятно, что при дискретизации плоской области произвольной конфигурации квадратные ячейки удобны внутри области, а треугольные – в приграничной полосе. Другая возможность аппроксимировать кривую границу области связана с введением криволинейных координат в четырехугольнике. Первая попытка использовать билинейные функции формы для введения неортогональных координат была предпринята Тайгом в 1961 г. [1, 2]. Он применил билинейный базис для деформирования прямоугольника в произвольный четырехугольник. В 1964 г. билинейные аппроксимации с той же целью успешно применяли Галлагер, Раттингер и Арчер [2]. В 1966 г. Айронс обобщил эту идею на другие конечные элементы [1].

Так появилась весьма удобная форма отображения конечного элемента - параметрическое отображение, когда зависимость между локальными координатами элемента  $(\xi, \eta)$  и глобальными координатами  $(x, y)$  записывается с использованием интерполяции того же вида, что и применяемая для аппроксимации полевой функции (изопараметрическое преобразование). В 1968 г. Эргатудис, Айронс, Зенкевич и Ахмад [3-5] рассмотрели семейство "изопараметрических" элементов с криволинейными границами. Изобретательным подбором полиномов с помощью заданных граничных точек эти авторы неожиданно открыли элементы, аппроксимирующие достаточно общие границы [1]. Зенкевич предложил удачное название - "serendipity" family, и этот термин сразу же прижился в научно-технической литературе. Слово "serendipity" ("дар неожиданных открытий") вошло в английский язык еще в 1754 г. с легкой руки Горация Уолпола – английского писателя, пересказавшего в частном письме персидскую сказку "Три принца из Серендипа" (Серендип – древнее название Цейлона). Приведенные в литературных источниках базисные функции серендиповых КЭ называют стандартными. Эти функции хорошо справляются с задачей изопараметрического отображения квадрата в произвольный четырехугольник, однако интерполяционные качества стандартных базисов не всегда безупречны. Все стандартные базисы серендиповых конечных элементов (СКЭ), кроме билинейного, имеют недостатки. К ним можно отнести наличие отрицательных нагрузок в поузловом распределении равномерной массовой силы, кратные нули в узлах. В рамках традиционного матричного анализа избавиться от этих недостатков не удается. Предложенная Тейлором в 1972 г. [6] процедура систематического генерирования базиса привела к тем же стандартным моделям. В конце 70-х годов благодаря работам Уачспресса [7] появился геометрический метод моделирования базисных функций. Однако этот метод не получил должного развития, а на серендиповом семействе вовсе не применялся. В начале 80-х годов был предложен вероятностно-геометрический метод построения базиса КЭ [8-10]. Преимущества этого метода особенно отчетливо проявились на серендиповых моделях [11,12]. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций [13] потребовали создания комбинированного (алгебро-геометрического) метода решения. Объединение двух подходов в один эффективный метод является естественным следствием исторического развития алгебры и геометрии. Так же, как и метод Уачспресса ("products of planes"), наш метод произведений плоскостей и поверхностей второго порядка своими корнями уходит в эпоху Жирара и Декарта (17 в.), которые впервые высказали (без дока-

зательства) основную теорему алгебры (ОТА). Маклорен и Эйлер уточнили формулировку ОТА, придав ей современную форму: всякий многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей. В 1799 г. Гаусс получил докторскую степень за точное доказательство ОТА. Позже Гаусс привел еще два безупречных доказательства (1814 г., 1850г.). В этой теореме нетрудно усмотреть не только четкий геометрический смысл, но и способ геометрического конструирования интерполяционных полиномов со специальными условиями. Как известно [1, 14-18], серендиповы полиномы имеют действительные коэффициенты, поэтому базис СКЭ можно получить перемножением плоскостей и нелинейных поверхностей. Используя это свойство, в данной работе авторы попытались унифицировать процедуру построения многопараметрических интерполяционных полиномов с регулируемым количеством параметров на примере бикубического элемента серендипова семейства.

**2. Стандартный интерполяционный полином СКЭ-12.** Рассмотрим бикубический СКЭ: это квадрат размером  $2 \times 2$ , на границе которого регулярно расположены 12 узлов (рис.1) и система базисных функций.

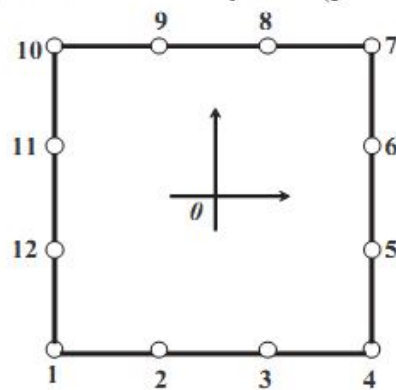


Рис.1. Бикубический СКЭ.

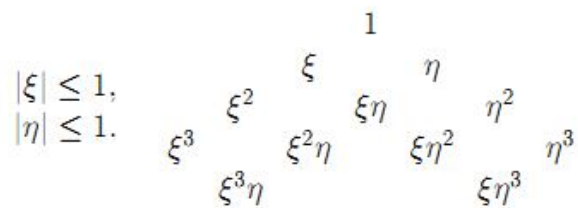


Рис.2. Элементы треугольника Паскаля для стандартного полинома СКЭ-12.

Стандартный интерполяционный полином этого элемента имеет 12 параметров:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) = & \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \\ & + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Это неполный полином четвертой степени, элементы которого симметрично

расположены в треугольнике Паскаля (рис. 2). Стандартные (изопараметрические) функции формы этого элемента можно найти, например, с помощью метода обратной матрицы [14]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \quad i = 1, 4, 7, 10; \xi_i, \eta_i = \pm 1, \quad (2)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 + \eta_i\eta)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_i\xi), \quad i = 2, 3, 8, 9; \xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1, \quad (3)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 + 9\eta_i\eta)(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi), \quad i = 5, 6, 11, 12; \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm \frac{1}{3}. \quad (4)$$

В общем случае аппроксимирующий полином бикубического СКЭ имеет вид

$$\varphi = \sum_{i=1}^{12} N_i U_i,$$

где  $N_i$  – базисная функция, отвечающая узлу  $i$  на КЭ ( $i = \overline{1, 12}$ ),  $U_i$  – узловое значение искомой функции в узле  $i$ .

Базисные функции (как стандартные изопараметрические, так и альтернативные многопараметрические) должны обладать следующими свойствами (условия типа Лагранжа):

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, \quad (5)$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера,  $i$  – номер функции,  $k$  – номер узла. При этом выполняется условие весового баланса

$$\sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) = 1. \quad (6)$$

Кроме того, функции формы  $N_i(\xi, \eta)$  обеспечивают непрерывность на границе: если узел  $i$  принадлежит конкретной стороне квадрата, то функция  $N_i(\xi, \eta)$  вдоль этой стороны изменяется по закону кубической параболы (4 узла).

Одна из характеристик базиса – поузловое распределение равномерной массовой силы. Узловая доля нагрузки определяется двойным интегралом

по области  $\omega$  конечного элемента от соответствующей базисной функции, взвешенной с поверхностной плотностью  $\gamma$

$$p_i = \int \int_{\omega} \gamma N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad I = 1, 2, \dots, 12.$$

Для однородной пластинки  $\gamma = 0, 25$ .

В модели (2)-(4) угловое значение в поузловом распределении равномерной массовой силы  $p = -\frac{1}{8}$ . Избавиться от этого недостатка (и от избыточных кратных нулей в узлах) можно с помощью дополнительных, "внеузловых" параметров, добавив в полиноме (1) ещё одно или несколько слагаемых. Назовем такие интерполяционные полиномы "многопараметрическими". Для построения таких полиномов ранее было предложено несколько способов [9,11,12]. В данной работе предлагается метод получения бесчисленного множества функций формы для СКЭ-12 с количеством параметров от 12 до 16, что позволяет существенно менять свойства интерполяционного полинома.

**3. Интерполяционный полином бикубического СКЭ с 13 параметрами.** Применим комбинированный алгебро-геометрический метод, предложенный в [13]. Реализуется он в два этапа:

1) из геометрических соображений базисная функция а priori записывается как произведение линейных и нелинейных множителей с неизвестными коэффициентами;

2) в соответствии с гипотезой Лагранжа составляется система алгебраических уравнений, которая решается с помощью матричных методов.

Для получения 13-параметрического полинома, не нарушая условия изменения функции формы вдоль стороны квадрата по закону кубической параболы, можно представить  $N_1(\xi, \eta)$  и  $N_2(\xi, \eta)$  в виде

$$N_1 = K_1(1 - \xi)(1 - \eta) (A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta + 1) ; \quad (7)$$

$$N_2 = K_2(1 - \xi^2)(1 - \eta)(F\xi + G\eta + 1) . \quad (8)$$

Сомножители в скобках можно ассоциировать с плоскостями и поверхностями второго порядка, проходящими через соответствующие узлы и точку  $(-1, -1, 1)$  для первого узла либо точку  $(-1/3, -1, 1)$  для второго узла. Неизвестные коэффициенты найдем, решив систему, составленную с помощью (5) ( $k$  – номер узла):

$$\left\{ \begin{array}{ll} N_1(\xi_k, \eta_k) = 1, & k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) = 0, & k = 2, 3, 11, 12; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) = 1, & k = 2; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) = 0, & k = 3; \\ \frac{1}{4} \int \int_{\omega} N_1 d\xi d\eta = p, \\ \frac{1}{4} \int \int_{\omega} N_2 d\xi d\eta = \frac{1}{8} - \frac{p}{2}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Обычно с помощью входящих в систему (9) двойных интегралов вычисляют долю соответствующего узла в поузловом распределении равномерной массовой силы, когда функции  $N_1(\xi, \eta)$  и  $N_2(\xi, \eta)$  уже известны. Приравнивая эти интегралы от неизвестных пока функций переменной  $p$  – узловому значению равномерной массовой силы в вершине СЭ (в последнем уравнении – зависимость  $p_2$  от  $p$ , т.к.  $4p + 8p_2 = 1$ ), мы ставим обратную задачу – получить функции формы  $N_i(\xi, \eta)$  в виде выражений, зависящих от переменной  $p$ .

Система (9) имеет единственное решение, которое позволяет записать

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) \times \\ &\times [9(\xi^2 + \eta^2) + 9(8p + 1)(\xi_i\xi\eta_i\eta - \xi_i\xi - \eta_i\eta) + 72p - 1], \quad (10) \\ & i = 1, 4, 7, 10; \xi_i, \eta_i = \pm 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)[18\xi_i\xi + (8p + 1)\eta_i\eta + 1 - 8p], \\ & i = 2, 3, 8, 9; \xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1, \quad (11) \end{aligned}$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{64}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi)[18\eta_i\eta + (8p + 1)\xi_i\xi + 1 - 8p],$$

$$i = 5, 6, 11, 12; \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm \frac{1}{3}.$$
(12)

Полученные базисные функции полностью соответствуют условиям (5), (6). Чтобы найти компоненты интерполяционного полинома типа (1), раскроем все скобки в  $N_1(\xi, \eta)$  и перегруппируем слагаемые

$$N_1 = \left(\frac{9}{4}p - \frac{1}{32}\right) + \frac{5}{16}\xi + \frac{5}{16}\eta - \frac{9}{4}p\xi^2 - \frac{5}{16}\xi\eta - \frac{9}{4}p\eta^2 -$$

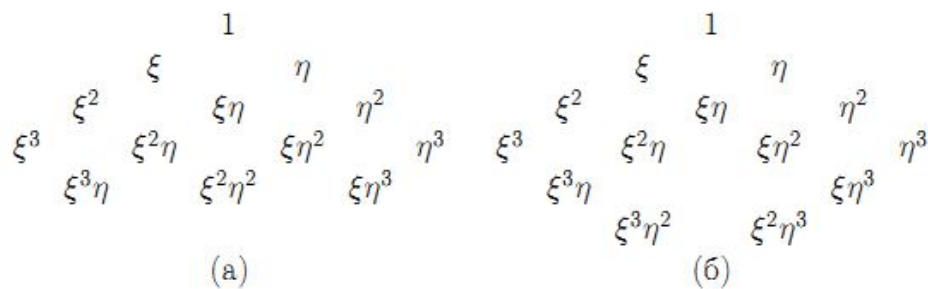
$$-\frac{9}{32}\xi^3 - \frac{9}{32}\xi^2\eta - \frac{9}{32}\xi\eta^2 - \frac{9}{32}\eta^3 + \frac{9}{32}\xi^3\eta + \frac{9}{32}\xi\eta^3 + \left(\frac{9}{32} + \frac{9}{4}p\right)\xi^2\eta^2.$$
(13)

Та же процедура для  $N_2(\xi, \eta)$  позволяет определить, что эта функция не вносит дополнительных слагаемых в общий полином

$$N_2 = \left(\frac{9}{64} - \frac{9}{8}p\right) - \frac{27}{32}\xi - \frac{9}{32}\eta + \left(\frac{9}{8}p - \frac{9}{64}\right)\xi^2 + \frac{27}{32}\xi\eta + \left(\frac{9}{8}p + \frac{9}{64}\right)\eta^2 -$$

$$-\frac{27}{32}\xi^3\eta - \left(\frac{9}{8}p + \frac{9}{64}\right)\xi^2\eta^2.$$
(14)

При изменении переменной  $p$  получаем бесчисленное множество базисов (10)-(12), которые содержат 13-й параметр  $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$  (рис. 3а).



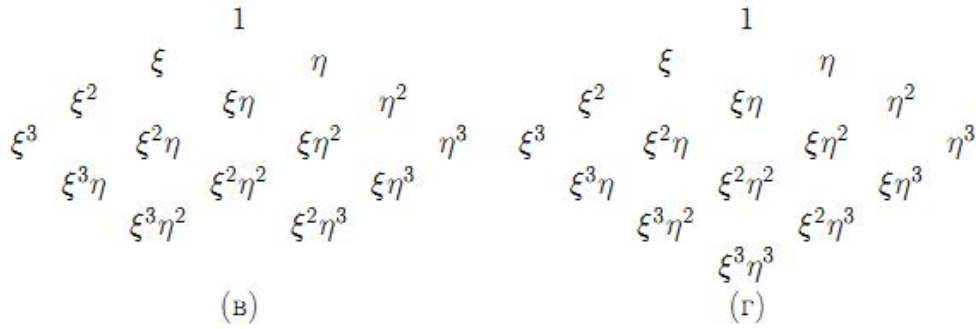


Рис. 3. Элементы треугольника Паскаля для многопараметрических полиномов СКЭ-12.

При  $p = -1/8$  этот параметр исчезает, интерполяционный полином (13) становится стандартным (рис. 2), функции (10)-(12) переходят в (2)-(4).

Интересным представляется анализ и визуализация линий нулевого уровня – линий пересечения составляющих функцию поверхностей и плоскости элемента. В  $N_1(\xi, \eta)$  первые две скобки – это стороны квадрата 4-7 и 7-10, противоположные первому узлу. Определить тип линии, представленной последней скобкой, можно с помощью стандартного метода исследования кривых второго порядка, составив и проанализировав определитель из коэффициентов при переменных. Результаты этого исследования изображены на рисунках 4-12. Как следует из этих рисунков, получены новые типы базисных функций (различные гиперболы – рис. 4, 10, 12; эллипс – рис.6), а известные ранее базисы получаются при частных значениях  $p$  (базис с параболой – рис.5, с окружностью – рис.7 (стандартный базис), с эллипсом – рис.8, с параллельными прямыми – рис.9, с пересекающимися прямыми – рис.11).

Пунктиром проведенная прямая на всех рисунках – это линия нулевого уровня для  $N_2$ , задаваемая последней скобкой (первые скобки  $N_2$  – это стороны квадрата 4-7, 7-10, 10-1).

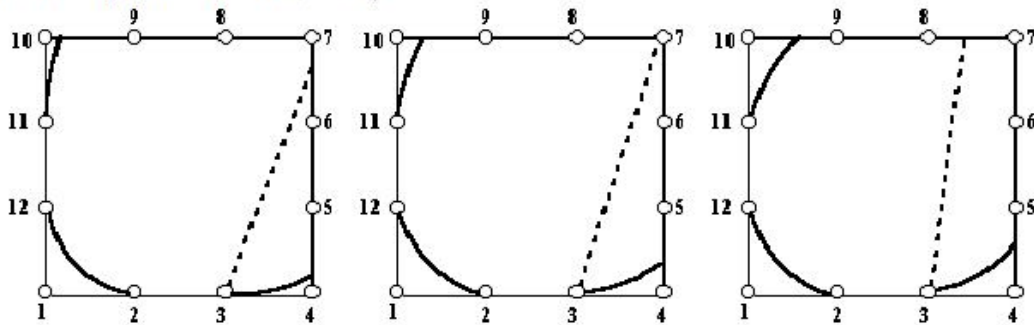


Рис.4.  $p \in (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$ .

Рис.5.  $p = -\frac{3}{8}$ .

Рис.6.  $p \in (-\frac{3}{8}, \frac{1}{8})$ .



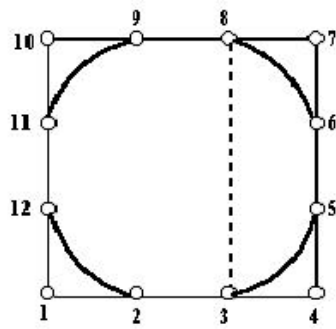


Рис.7.  $p = -\frac{1}{8}$ .

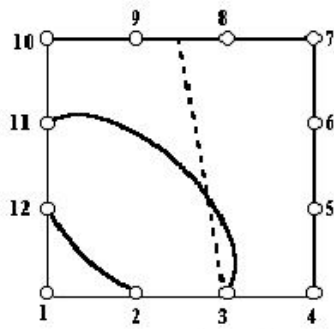


Рис.8.  $p \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ .

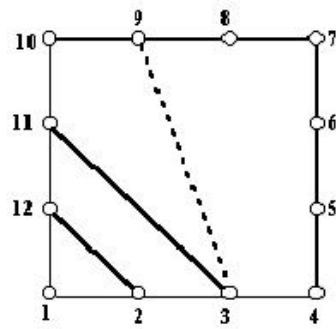


Рис.9.  $p = \frac{1}{8}$ .

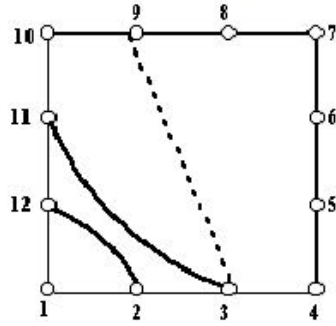


Рис.10.  $p \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right)$ .

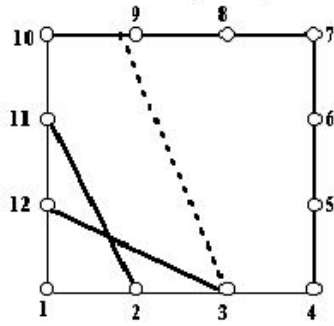


Рис.11.  $p = \frac{3}{16}$ .

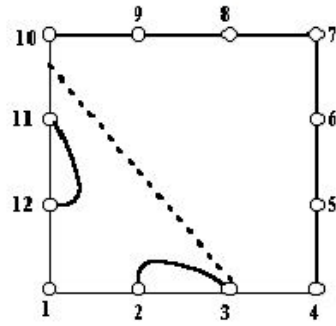
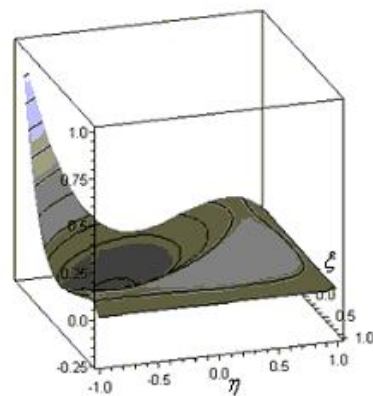
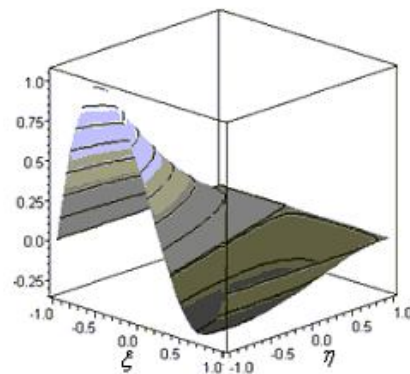


Рис.12.  $p \in \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{2}\right)$ .

Визуализация  $N_1(\xi, \eta)$  и  $N_2(\xi, \eta)$  (рис.13) наглядно демонстрирует основные свойства базисных функций: в своем узле – единица, в остальных – нуль, по соответствующей границе СЭ – кубическая парабола.



а)  $N_1(\xi, \eta)$



б)  $N_2(\xi, \eta)$

Рис.13. Визуализация 13-параметрических базисных функций СКЭ-12 при  $p = 0$ .

**4. Интерполяционный полином бикубического СКЭ с 14 и 15 параметрами.** Несложно заметить, что, не нарушая условия изменения функции формы вдоль стороны квадрата по закону кубической параболы,  $N_1(\xi, \eta)$  можно представить вместо (7) в виде

$$N_1 = K_1(1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi\eta + B\xi + C\eta + 1)(D\xi + E\eta + 1). \quad (15)$$

При этом  $N_2(\xi, \eta)$  остается таким же – (8). (Во всех случаях, рассматриваемых далее,  $N_2(\xi, \eta)$  остается неизменным). При таком представлении  $N_1(\xi, \eta)$  система (9) имеет четыре решения: два из них симметричны относительно диагонали квадрата 1-7, а два – с нарушением геометрической изотропии. Это легко объяснимо: в последней скобке в общем виде записано выражение, задающее прямую, проходящую через два узла: прямую 2-12 или 3-11 (симметричные случаи), либо прямую 3-12 или 2-11 (несимметричные случаи). Одно из симметричных решений для  $N_1(\xi, \eta)$  имеет вид

$$N_1 = \frac{1}{128}(1 - \xi)(1 - \eta)[9(8p - 1)\xi\eta + 3(24p + 1)\xi + 3(24p + 1)\eta + (72p - 1)] \times \\ \times (3\xi + 3\eta + 4). \quad (16)$$

Раскрыв все скобки в (16), получим полином с 15 параметрами, указанными на рис.3в,

$$N_1 = \\ = \left(\frac{9}{4}p - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{27}{16}p + \frac{13}{128}\right)\xi + \left(\frac{27}{13}p + \frac{13}{128}\right)\eta - \frac{9}{4}p\xi^2 - \frac{5}{16}\xi\eta - \frac{9}{4}p\eta^2 - \\ - \left(\frac{27}{16}p + \frac{9}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{27}{16}p + \frac{9}{128}\right)\xi^2\eta - \left(\frac{27}{16}p + \frac{9}{128}\right)\xi\eta^2 - \left(\frac{27}{16}p + \frac{9}{128}\right)\eta^3 + \\ + \frac{9}{32}\xi^3\eta + \frac{9}{32}\xi\eta^3 + \left(\frac{9}{4}p + \frac{9}{32}\right)\xi^2\eta^2 + \\ + \left(\frac{27}{16}p - \frac{27}{128}\right)\xi^3\eta^2 + \left(\frac{27}{16}p - \frac{27}{128}\right)\xi^2\eta^3. \quad (17)$$

Меняя значение  $p$ , получаем бесчисленное множество 15-параметрических базисов, которые соответствуют условиям (5), (6). Линии нулевого уровня

$N_1(\xi, \eta)$  и  $N_2(\xi, \eta)$  изображены на рисунках 14-20. Визуализация функции  $N_1(\xi, \eta)$  в точке вырождения гиперболы в две пересекающиеся прямые представлена на рис.21.

Все известные ранее 15-параметрические модели являются частными случаями (16) или других решений системы (9) при определенных значениях  $p$  (рис.18). Если  $p = -1/8$  (рис.15), то полином содержит 14 параметров, указанных на рис.3б. То есть, как и в случае вырождения 13-параметрического базиса в 12-параметрический, в полиноме (17) исчезает слагаемое  $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$ . Если  $p = 1/8$  (рис.19), получим базис с 13 параметрами (рис. 3а) – частный случай (10), когда  $p = 1/8$  (рис.9).

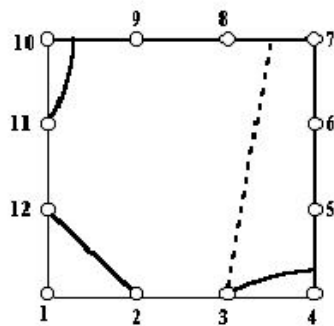


Рис.14.  $p \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ .

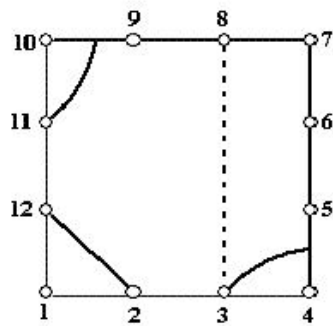


Рис.15.  $p = -\frac{1}{8}$ .

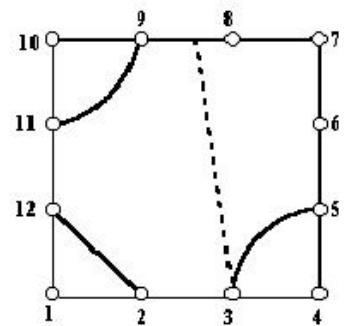


Рис.16.  $p \in \left(-\frac{1}{8}, 0\right)$ .

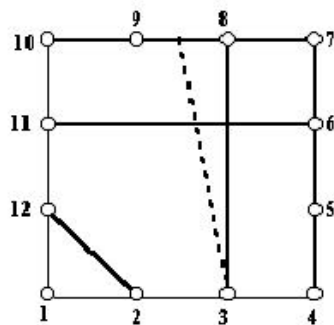


Рис.17.  $p = 0$ .

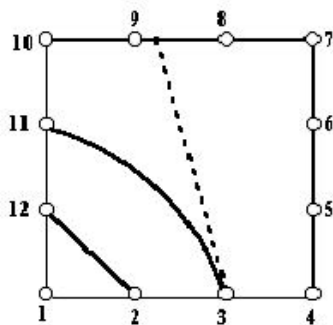


Рис.18.  $p \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$ .

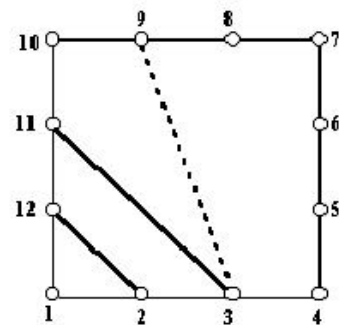
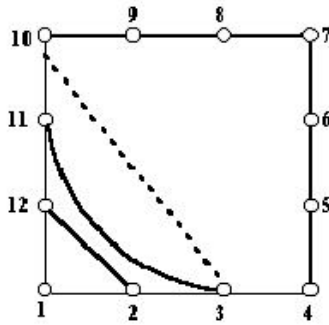
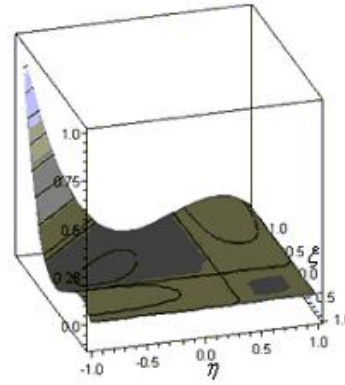


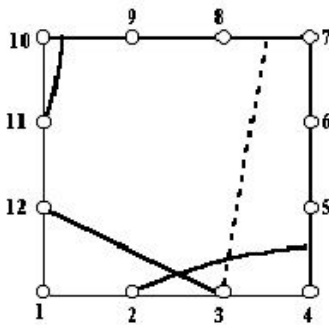
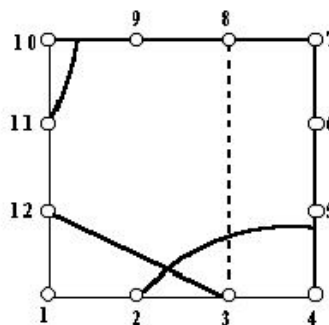
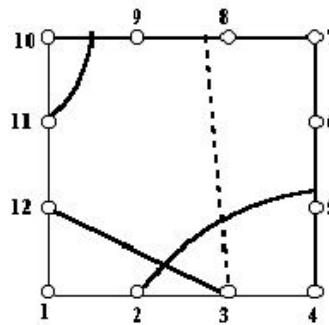
Рис.19.  $p = \frac{1}{8}$ .

Рис.20.  $p \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ .Рис.21. Визуализация 15-параметрической функции  $N_1(\xi, \eta)$  СКЭ-12 при  $p = 0$ .

Одно из решений с нарушением геометрической изотропии:

$$N_1 = \frac{1}{320}(1 - \xi)(1 - \eta)(3\xi + 6\eta + 5) \times \\ \times [9(16p - 3)\xi\eta + 3(48p + 1)\xi + 12(24p - 1)\eta + 2(72p - 1)]. \quad (18)$$

Линии нулевого уровня  $N_1(\xi, \eta)$  и  $N_2(\xi, \eta)$  этого базиса изображены на рисунках 22-28.

Рис.22.  $p \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$ .Рис.23.  $p = -\frac{1}{8}$ .Рис.24.  $p \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{32}\right)$ .

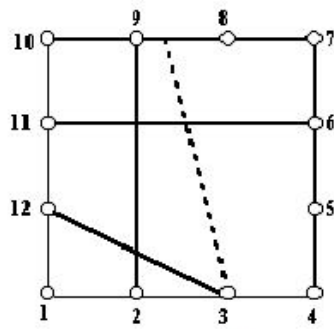


Рис.25.  $p = \frac{1}{32}$ .

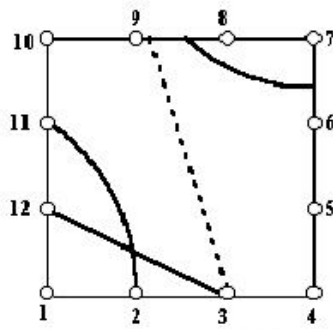


Рис.26.  $p \in \left(\frac{1}{32}, \frac{3}{16}\right)$ .

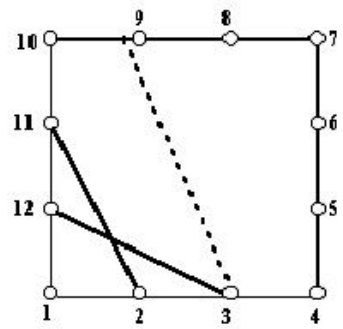


Рис.27.  $p = \frac{3}{16}$ .

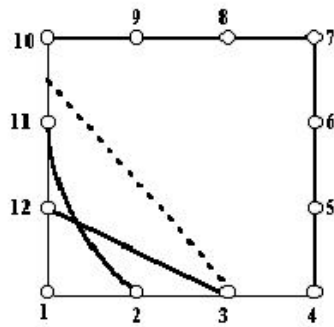


Рис.28.  $p \in \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{2}\right)$ .

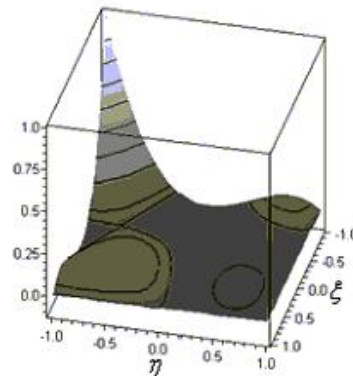


Рис.29. Визуализация 15-параметрической функции  $N_1(\xi, \eta)$  с нарушением геометрической изотропии при  $p = 0$ .

При вырождении гиперболы в две пересекающиеся прямые (рис.17 и 25) полиномы (17) и (18) соответственно содержат 15 параметров (рис. 3в), если  $p = -1/8$  (рис.23), то - 14 параметров (рис. 3б). Если же  $p = 3/16$  (рис.27), получим базис с 13 параметрами (рис.3а).

**5. Интерполяционный полином бикубического СКЭ с 16 параметрами.** Не нарушая указанных ранее ограничений,  $N_1(\xi, \eta)$  можно задать и таким образом:

$$N_1 = K_1(1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi\eta + B\xi + B\eta + 1)(C\xi\eta + D\xi + E\eta + 1). \quad (19)$$

При этом система (9) имеет два решения, позволяющие представить  $N_1(\xi, \eta)$

в двух вариантах:

$$N_1 = \frac{1}{32(E-1)}(1-\xi)(1-\eta)[(72Ep-E-72p+3)\xi\eta + (72Ep-E-72p)(\xi+\eta) + (72p-1)(E-1)] \cdot [(3-4E)\xi\eta + E(\xi+\eta) + 1] \quad (20)$$

или

$$N_1 = \frac{1}{32(E-1)}(1-\xi)(1-\eta)[(72Ep-E-72p-3)\xi\eta + (72Ep-E-72p)(\xi+\eta) + (72p-1)(E-1)] \cdot [(3-2E)\xi\eta + E(\xi+\eta) + 1]. \quad (21)$$

Полученные решения являются функциями переменной  $p$  и одного из неизвестных коэффициентов, например,  $E$  начального уравнения (19). Меняя значения этого коэффициента, мы можем конструировать бесчисленное множество базисов для одних и тех же значений  $p$ . Все эти базисы соответствуют условиям (5), (6) и позволяют записать 16-параметрический полином типа (13), элементы которого представлены на рис.3г. Рассмотрим частный случай (21) при  $E = 2$ ,

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[(72p-5)\xi\eta + (72p-2)(\xi+\eta) + (72p-1)] \times [-\xi\eta + 2(\xi+\eta) + 1]. \quad (22)$$

После раскрытия скобок и перегруппировки получим

$$N_1 = \left(\frac{9}{4}p - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{9}{2}p - \frac{3}{32}\right)\xi + \left(\frac{9}{2}p - \frac{3}{32}\right)\eta - \frac{9}{4}p\xi^2 - \left(\frac{9}{4}p + \frac{5}{32}\right)\xi\eta - \frac{9}{4}p\eta^2 + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi^3 + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi^2\eta + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi\eta^2 + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\eta^3 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{9}{4}p + \frac{1}{8}\right) \frac{9}{32} \xi^3 \eta + \left(\frac{9}{4}p + \frac{1}{8}\right) \frac{9}{32} \xi \eta^3 + \left(\frac{9}{4}p + \frac{9}{32}\right) \xi^2 \eta^2 + \\
 & + \left(\frac{9}{2}p - \frac{13}{32}\right) \xi^3 \eta^2 + \left(\frac{9}{16}p - \frac{13}{32}\right) \xi^2 \eta^3 + \left(-\frac{9}{4}p + \frac{5}{32}\right) \xi^3 \eta^3.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Линии нулевого уровня  $N_1(\xi, \eta)$  и  $N_2(\xi, \eta)$  этого базиса изображены на рисунках 30-35.

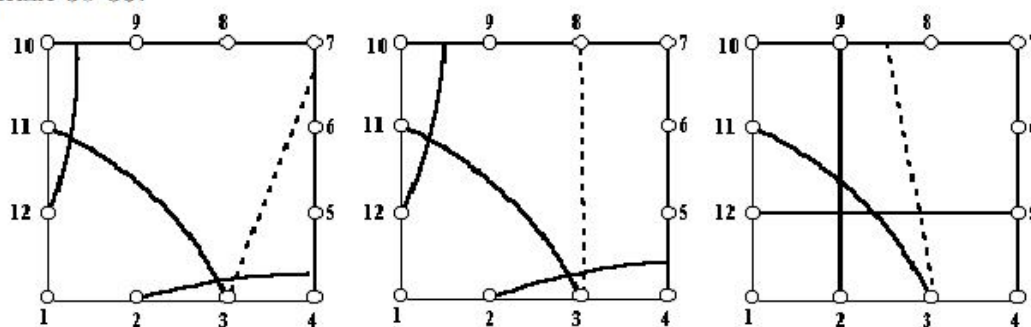


Рис.30.  $p \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{144}\right)$ .

Рис.31.  $p = -\frac{1}{8}$ .

Рис.32.  $p = \frac{1}{144}$ .

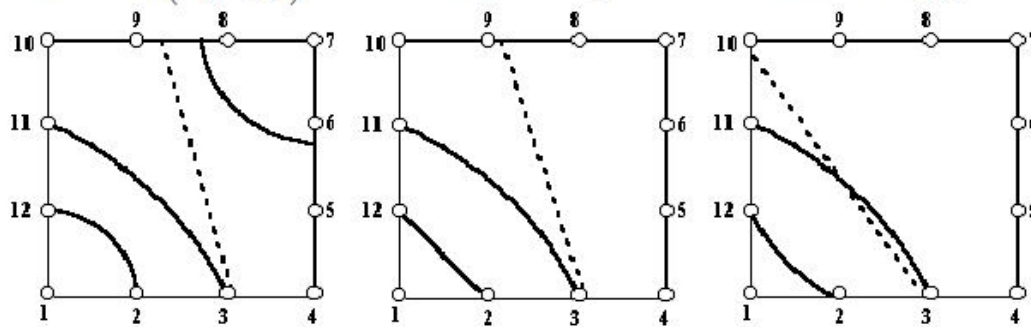


Рис.33.  $p \in \left(\frac{1}{144}, \frac{5}{72}\right)$ .

Рис.34.  $p = \frac{5}{72}$ .

Рис.35.  $p \in \left(\frac{5}{72}, \frac{1}{2}\right)$ .

Как и в предыдущих случаях, при  $p = -1/8$  (рис.31) количество параметров полинома (23) уменьшается, он становится 15-параметрическим – исчезает слагаемое  $\alpha_{13} \xi^2 \eta^2$ . Полученный при этом полином отличается по составу от 15-параметрического (17), элементы которого приведены на рис. 3в. Полином с такими же компонентами, как в (17), образуется из (23) при  $p = 5/72$ , когда  $\alpha_{16} = 0$  (рис.34). Кроме этого, при  $p = 13/144$  исчезают слагаемые  $\alpha_{14} \xi^2 \eta^3$  и  $\alpha_{15} \xi^2 \eta^3$ , в полиноме (23) остаётся 14 параметров (рис.35).

**5. Выводы.** Найденные модифицированные многопараметрические модели позволяют избавиться от "негативизма" в поузловом распределении рав-

номерной массовой силы, а также существенно уменьшить количество кратных нулей в узлах, что смягчает избыточную жесткость модели [19].

### Литература

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О.Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541с.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж.Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
3. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved isoparametric "quadrilateral" elements for finite element analysis // *Internat. J. Solids Struct.* – 1968. – 4. – P.31-42.
4. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Three dimensional analysis of arch dams and their foundations // *Proc. Symp. Arch, Dams*, 1968. – P. 21-34.
5. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems // *Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech, AFFDL-TR-68-150* (Oct. 15-17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio. – P.539-572.
6. Taylor R.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis // *J. Num. Meth. Eng.* – 1972. – 4;1. – P. 17-22.
7. Wachspress E.I. A rational finite element basis / E.I. Wachspress. – Academic Press: New York, 1975. - 216p.
8. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А.Н.Хомченко. – Ивано-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – 9с; деп. в ВИНТИ, №1213.
9. Хомченко А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных / А.Н. Хомченко. – III Респ. симпозиум по диффер. и интегр. уравнениям: тез. докл. – Одесса: ОГУ, 1982. – С. 257-258.
10. Хомченко А.Н. О модификации серендиповых элементов / А.Н. Хомченко. – Ивано-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1983. - 4с; деп. в ВИНТИ, №3643.



11. Камаева Л.И., Хомченко А.Н. О моделировании конечных элементов серендипова семейства // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. – Горький: ГГУ. – 1985. – С.14-17.
12. Хомченко А.Н. Литвиненко Е.И., Гучек П.И. Геометрия серендиповых аппроксимаций // Прикл. геом. и инж. графика. – К.: Будівельник, 1996. – Вып.59. – С.40-42.
13. Хомченко А.Н., Астионенко И.А., Литвиненко Е.И. Обратные задачи об интегральных средних для серендиповых полиномов // Вестник Херсонского национ. техн. ун. – 2007. – 2(28). – С.383-389.
14. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1986. – 318с.
15. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. – Л.: Судостроение, 1979. – 264с.
16. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р.Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428с.
17. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л.Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392с.
18. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов) / Ю.И. Немчинов. – К.: Будівельник, 1980. – 232с.
19. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г.Стренг, Дж.Фикс. – М.: Мир, 1977. – 350с.

## CONSTRUCTION OF THE MULTIPARAMETER POLYNOMIALS BY THE BICUBIC ELEMENT OF SERENDIPITY FAMILY

**I.A.Astionenko, Ye.I.Litvinenko, A.N.Khomchenko**

Kherson National Technical University

Berislavskii Way, 24, Kherson, Ukraine, 73008, e-mail: [mmkntu@gmail.com](mailto:mmkntu@gmail.com)

The existence of multiparameter bases constructed by the serendipity family of finite elements is proved constructively. The infinite set of interpolation polynomials which contains from 12 to 16 parameters is built in the frame of 12-node flat element (bicubic interpolation).

Key words: finite element of serendipity family, multiparameter interpolation, Lagrange polynomial basis, zero-level lines of basis functions.