

КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ НА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЁТКЕ

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,

ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

На основе кластерного разложения, найдена верхняя оценка порога перколяции бернуллиевского случайного поля на гексагональной решётке. Она вычисляется посредством оценки числа циклов, которые могут служить внешней границей конечных кластеров, содержащих фиксированную вершину решётки.

Ключевые слова: вероятность перколяции, гексагональная решётка, конечный кластер, внешняя граница, кластерное разложение, порог перколяции.

1. Введение. Объектом изучения теории перколяции, в общем случае, являются случайные подмножества пространства (погружения), в котором определён фильтр по включению и дополнительное отношение связности [1]. В частности, такое положение имеет место для случайных множеств в некомпактных топологических пространствах с дополнительным отношением связности [2]. В этом случае, основной интерес представляет проблема существования в случайной реализации некомпактной связной компоненты. В том случае, когда вероятность такого события отлична от нуля, говорят о наличии перколяции. Задача вычисления этой вероятности, даже в самых простейших случаях, представляет собой серьёзную математическую проблему. Поэтому, в приложениях, обычно, для решения этой задачи прибегают к компьютерным экспериментам и, на этом пути, имеются значительные достижения. Нас же в этой работе интересует задача теории перколяции с математической точки зрения. Такого рода исследования, из-за чрезвычайной сложности проблемы, обычно, связаны с изучением простейших некомпактных пространств с отношением связности, а именно, целочисленных решёток \mathbb{Z}^d , $d = 2, 3$, где вводимая на них связность превращает их в математические объекты, которые называются периодическими графами [3]. Эта область исследований называется *дискретной теорией перколяции*. Однако, даже на периодических графах, задача о вероятности перколяции, в настоящее время, поддаётся математической обработке только для случайных множеств, порождаемых бернуллиевскими полями $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d\}$, распределение вероятностей которых определяется одним параметром $c = \Pr\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$. В настоящей работе, находится оценка сверху так называемого *порога перколяции*

c_* на однородном периодическом графе размерности 2, который называется гексагональной решёткой. Вероятность перколяции $Q(c)$ отлична от нуля при $c > c_*$. Наша оценка строится на основе традиционного подхода, на так называемой контурной технике, которую мы называем *кластерным разложением* (см. [2], [4],[5]). В работе находится верхняя оценка числа конечных заполненных кластеров на решётке указанного типа, содержащих фиксированную вершину. Это позволяет получить верхнюю оценку для величины c_* .

2. Проблема теории перколяции на гексагональной решётке. Введём в рассмотрение математические объекты, которые моделируют кристаллические решётки и поставим задачу дискретной теории перколяции на такого рода геометрических структурах. В связи с целями настоящей работы, мы будем считать решётки двумерными.

Бесконечное множество V в \mathbb{R}^2 назовём периодическим, если существует пара $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ неколлинеарных векторов в \mathbb{R}^2 таких, что для любых $n_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2\}$ имеет место $V = V + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2$. Периодическое множество будем называть *кристаллической решёткой* в \mathbb{R}^2 , если оно состоит из изолированных точек. Кристаллическая решётка допускает дизъюнктивное разложение $V = \bigcup_{\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2} \{V_0 + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2\}$, где конечное множество V_0 называется кристаллической ячейкой. Если число точек в V_0 является минимальным среди всех допустимых для V кристаллических ячеек, то такая ячейка называется *элементарной*. Так как для постановки задач теории перколяции важна только топологическая структура множества, на котором исследуется *просачивание* случайного поля, то для формулировки задачи дискретной теории перколяции удобно использовать понятие периодического графа и его вложения M в \mathbb{R}^2 , образом которого является кристаллическая решётка и которое определяет на ней связность.

О п р е д е л е н и е 1 [3]. Пусть $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$ – бесконечный неориентированный граф без петель, где V – множество вершин и Φ – множество рёбер (двухэлементных подмножеств из V). Этот граф называется *периодическим, имеющим размерность два*, если он допускает такое вложение M в \mathbb{R}^2 , при котором образ MV является кристаллической решёткой в \mathbb{R}^2 , а образ $M\Phi$ множества Φ инвариантен относительно трансляций с парой периодов $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$,

$$M\Phi + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 = M\Phi, \quad (1)$$

$\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2$ и при этом множество $\Phi_0 = \{\{x, y\} \in \Phi : My \in V_0\}$ конечно.

Пару вершин x, y из V , для которых имеется ребро $\{x, y\} \in \Phi$, будем

называть смежными и обозначать отношение смежности посредством $\mathbf{x}\phi\mathbf{y}$.

В дальнейшем изложении, мы не будем различать вершины графа и их образы, получаемые вложением M , а также не будем различать отличающиеся друг от друга вложения графа Λ в \mathbb{R}^2 . Таким образом, мы считаем, что множество V вершин графа совпадает с $\bigcup_{\mathbf{x} \in V_0} \{\mathbb{Z}^2 + \mathbf{x}\}$ и свойство (1) его пе-

риодичности записывается в виде соотношения $\Phi = \Phi + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2$. Тогда отношение смежности вершин периодического графа $\langle V, \Phi \rangle$ полностью определяется множеством Φ_0 , так как Φ допускает дизъюнктивное разложение $\Phi = \bigcup_{\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2} \{\Phi_0 + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2\}$. В связи с этим мы будем называть множе-

ство Φ_0 множеством смежности. На языке кристаллографии оно определяет "ближайших" соседей на кристаллической решётке для точек из фиксированной элементарной кристаллической ячейки V_0 .

Бесконечный периодический граф Λ размерности два называется *гексагональной решёткой*, если элементарная ячейка V_0 содержит две вершины так, что при выборе периодов $\langle \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2/2 \rangle$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – орты в \mathbb{R}^2 можно положить

$$V_0 = \{\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2/2, \mathbf{x}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\},$$

$$\Phi_0 = \{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_2 \rangle; \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \mathbf{e}_2/2 - \mathbf{e}_1 \rangle;$$

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle; \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_2 \rangle; \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2/2 \rangle\}.$$

Шестиугольная решётка $\langle \Lambda, \Phi \rangle$ показана на левой части рис.1. На правой части этого рисунка она представлена в терминах указанных множеств V_0, Φ_0 .

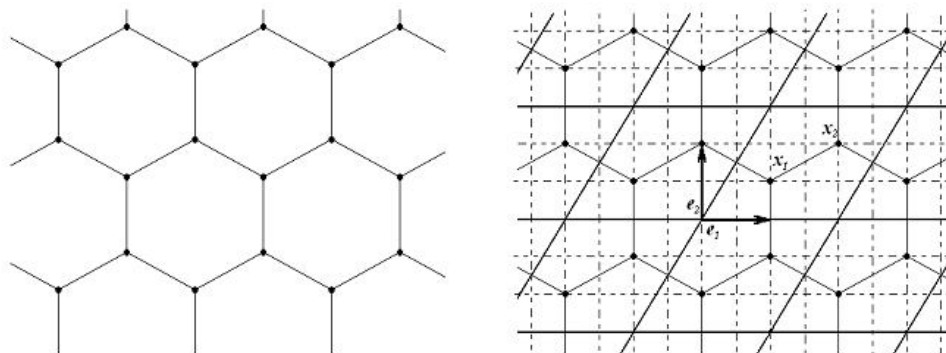


Рис. 1: Гексагональная решётка.

Введём в рассмотрение на графе $\langle V, \Phi \rangle$ бернуллиевское случайное поле $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ с концентрацией $c = \Pr\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$. Здесь и далее, тильда, поставленная над математическим объектом, обозначает его случайность. Каждая случайная реализация $\tilde{c}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$ этого поля определяет множество $\tilde{W} = \{\mathbf{x} : \tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$, которое мы будем называть *конфигурацией*. Соответственно, вся совокупность реализаций $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ вместе с заданным на них распределением вероятностей определяет случайное множество на V , распределение вероятностей для которого индуцируется распределением вероятностей поля $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$. А именно, для каждого конечного подмножества $M \subset V$ вершин решётки, вероятность его заполнения случайной конфигурацией \tilde{W} определяется формулой $\Pr\{M \subset \tilde{W}\} = c^{|M|}$.

Отношение смежности ϕ индуцирует на основе понятия пути отношение связности на графе $\langle V, \Phi \rangle$ для каждой случайной конфигурации \tilde{W} . Последовательность $\alpha = \langle \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n \rangle$ вершин, выбранных из конфигурации \tilde{W} , будем называть путём α длины n , если $\tilde{\mathbf{x}}_i \phi \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Путь будем называть простым, если в указанной последовательности $\tilde{\mathbf{x}}_i \neq \tilde{\mathbf{x}}_j$ при всех значениях индексов $i < j$ и, соответственно, – циклом, если совпадение вершин в последовательности $\langle \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n \rangle$ имеет место только при $i = 0$, $j = n$. Пару вершин $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ будем называть *связанной* на \tilde{W} , если $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset \tilde{W}$ и на этой конфигурации существует простой путь $\alpha = \langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{n-1}, \mathbf{y} \rangle$. Отношение связности для пар вершин является отношением эквивалентности. Поэтому всякая случайная конфигурация \tilde{W} распадается на семейство $\mathfrak{M}[\tilde{W}] = \{\tilde{W}_j; j \in \mathbb{N}\}$ непересекающихся связанных множеств: $\tilde{W} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{W}_j$,

которые называются *кластерами*. Каждый кластер состоит из связанных между собой вершин и никакие две вершины, взятые из различных кластеров, не являются связанными. Обозначим посредством $\tilde{W}(\mathbf{x})$ тот кластер из семейства $\mathfrak{M}[\tilde{W}]$, который содержит вершину $\mathbf{x} \in V$. Если вершина \mathbf{x} не содержится в конфигурации \tilde{W} , то будем считать, что $\tilde{W}(\mathbf{x}) = \emptyset$. Введём случайную функцию $\tilde{a}(\mathbf{x})$, описывающую свойство просачивания случайного поля $\{\tilde{c}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in V\}$,

$$\tilde{a}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1; & |\tilde{W}(\mathbf{x})| = \infty, \\ 0; & |\tilde{W}(\mathbf{x})| < \infty, \end{cases}$$

где здесь и далее используется обозначение $|\cdot| \equiv \text{Card}(\cdot)$. В первом случае, существует бесконечный путь $\alpha(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}_i; i \in \mathbb{N}_+ \rangle$, где $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_i \in \tilde{W}(\mathbf{x})$, $i \in \mathbb{N}_+$. Во втором случае, такой путь отсутствует.

На основе случайной функции $\tilde{a}(\mathbf{x})$ определим вероятность перколяции

поля $\{\tilde{c}(\mathbf{z}); \mathbf{z} \in V\}$ из фиксированной вершины $\mathbf{y} \in V$. А именно, говорят, что имеет место перколяция из этой вершины, если положительна вероятность $Q(c) = \Pr\{\tilde{a}(\mathbf{y}) = 1\} > 0$. Она не зависит от вершины \mathbf{y} , если периодический граф является однородным. Последнее означает, что, для каждой пары $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, имеются такие вложения M_1, M_2 в \mathbb{R}^2 , образы которых совпадают и $M_1\mathbf{x} = M_2\mathbf{y}$. В настоящей работе, нас будет интересовать величина $c_* = \inf\{c : Q(c) > 0\}$, которая называется *порогом перколяции*.

3. Конечные кластеры на гексагональной решётке. Введём, следуя [3], понятие внешней границы конечного кластера $\tilde{W}(\mathbf{x})$. С этой целью построим на множестве V другой периодический граф $\Lambda^* = \langle V, \Phi^* \rangle$, который будем называть сопряжённым к Λ . Отношение смежности Φ^* на сопряжённом графе вводится согласно рис.2, где для фиксированной вершины $\mathbf{0}$, указаны занумерованные по часовой стрелке ϕ^* -смежные с ней вершины. Это означает, что на рис.1 при выбранном нами вложении гексагональной решётки ϕ^* -смежными с вершиной \mathbf{x}_2 являются вершины

$$\{\mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2/2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2 + 2\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2/2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2/2, \\ \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{e}_2, \mathbf{x}_2 - \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2/2, \mathbf{x}_2 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2/2, \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{x}_2 - \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2/2\}.$$

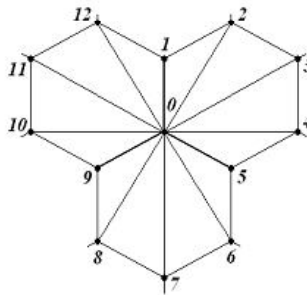


Рис. 2: Отношение смежности вершины $\mathbf{0}$ на сопряжённом графе.

Отношение смежности ϕ^* аналогично отношению ϕ порождает для каждой случайной конфигурации \tilde{W} отношение связности, которое разбивает на связные множества как саму конфигурацию \tilde{W} , так и дополнительную к ней конфигурацию $V \setminus \tilde{W}$.

О п р е д е л е н и е 2 [3]. Пусть W является конечным кластером. Множество, обозначаемое нами посредством ∂W , называется внешней границей этого кластера на конфигурации \tilde{W} , если $\tilde{W} \supset W, \mathbb{Z}^2 \setminus W \supset \partial W$ и это множество состоит из таких вершин $\mathbf{z} \notin \tilde{W}$, для каждой из которых:

- 1) существует вершина $y \in W$ такая, что $z\phi y$;
- 2) для этой вершины z , существует бесконечный ϕ -путь α на графе $\langle V, \Phi \rangle$, $\alpha \cap W = \emptyset$, начинающийся в точке z , причём z является единственной вершиной в пересечении этого пути с множеством $\{x \notin W : x\phi y, y \in W\}$.

Имеет место следующее утверждение [3].

Т е о р е м а 1. Пусть $W(\mathbf{x})$ – конечный кластер, содержащий вершину $\mathbf{x} \in V$. Тогда $W(\mathbf{x})$ имеет непустую конечную внешнюю границу $\partial W(\mathbf{x})$, которая обладает следующими свойствами:

1. Множество $\partial W(\mathbf{x})$ является простым циклом $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_0 \rangle$ на графе $\langle V, \Phi^* \rangle$, где n – его длина.
2. Цикл $\partial W(\mathbf{x})$ окружает вершину \mathbf{x} при периодическом погружении $\langle V, \Phi^* \rangle$ в \mathbb{R}^2 .

Хотя утверждение теоремы является достаточно очевидным, тем не менее, полное её доказательство опирается на т.н. топологическую теорему Жордана.

Условие того, что путь является простым ϕ^* -циклом затруднительно выразить аналитически. Поэтому предлагаемое ниже в п.6 оценивание сверху числа циклов фиксированной длины, которые могут служить внешними границами конечных кластеров, содержащих заданную вершину, основано на выявлении подходящих достаточных для этого условий, которые можно выразить аналитически.

4. Кластерное разложение на \mathbb{Z}^2 . Пусть \mathbf{A} семейство конечных кластеров W , содержащих вершину $\mathbf{0}$ на гексагональной решётке. Определим для любого кластера $W \in \mathbf{A}$ случайное событие $A(W) = \{\tilde{W} : \mathbf{0} \in \tilde{W}, W \in \mathfrak{M}[\tilde{W}], \tilde{W}(\mathbf{0}) = W\}$. Вероятность этого события равна

$$\Pr\{A(W)\} = c^{|W|}(1-c)^{|\partial W|}. \quad (2)$$

Согласно Теореме 1, каждому кластеру W из семейства \mathbf{A} отвечает простой ϕ^* -цикл γ , окружающий вершину $\mathbf{0}$ и такой, что $\gamma = \partial W$. В связи с этим введём в рассмотрение семейство \mathbf{B} всех простых ϕ^* -циклов, окружающих $\mathbf{0}$. Для каждого ϕ^* -цикла $\gamma \in \mathbf{B}$ определим событие $B(\gamma) = \{\tilde{M} : \mathbf{0} \in \tilde{M}, \tilde{W}(\mathbf{0}) \in \mathfrak{M}[\tilde{W}], \partial \tilde{W}(\mathbf{0}) = \gamma\}$, которое представимо в виде конечного объединения попарно непересекающихся событий

$$B(\gamma) = \bigcup_{W \in \mathbf{A} : \partial W = \gamma} A(W). \quad (3)$$

Вероятность $P(\gamma) = \Pr\{B(\gamma)\}$ согласно (2), (3) равна

$$P(\gamma) = \sum_{W \in \mathbf{A}: \partial W = \gamma} \Pr\{A(W)\} = \sum_{W \in \mathbf{A}: \partial W = \gamma} c^{|W|}(1-c)^{|\partial W|}.$$

Событие $\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\}$ допускает дизъюнктивное разложение

$$\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\} = \{\mathbf{0} \notin \tilde{W}\} \cup \left(\bigcup_{W \in \mathbf{A}} A(W) \right).$$

При этом семейство \mathbf{A} разлагается на непересекающиеся классы, состоящие из кластеров объединяемых следующим признаком. К одному классу отнесём такие кластеры $W \in \mathbf{A}$, которые имеют одну и ту же внешнюю границу. Поэтому справедливо преобразование

$$\bigcup_{W \in \mathbf{A}} \dots = \bigcup_{\gamma \in \mathbf{B}} \left\{ \bigcup_{W \in \mathbf{A}: \partial W = \gamma} \dots \right\}.$$

Далее, на основании (3), получаем

$$\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\} = \{\mathbf{0} \notin \tilde{W}\} \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \mathbf{B}} B(\gamma) \right)$$

и так как $\Pr\{\mathbf{0} \notin \tilde{W}\} = 1 - c$ и

$$1 - Q(c) = \Pr\{\tilde{a}(\mathbf{0}) = 0\},$$

то мы приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 2. Вероятность $Q(c)$ представляется кластерным разложением

$$c - Q(c) = \sum_{\gamma \in \mathbf{B}} P(\gamma). \tag{4}$$

Кластерное разложение согласно своему определению является сходящимся. При этом функция $Q(c)$ отлична от нуля только при $c > c_* > 0$, и поэтому она не является аналитической. С этим обстоятельством связаны принципиальные трудности вычисления величины c_* . В настоящее время не существует каких-либо алгоритмов её вычисления, не использующих стохастическое компьютерное моделирование.

5. Оценка вероятности перколяции. Для получения верхней оценки порога перколяции необходимо получить подходящую оценку снизу для вероятности $Q(c)$. Эта оценка основана на следующем утверждении

Л е м м а 1. Имеет место неравенство

$$c - Q(c) \leq \sum_{n=3}^{\infty} (1-c)^n r_n, \quad (5)$$

где $r_n = |\{\gamma \in \mathbf{B} : |\gamma| = n\}|$, $n \geq 3$.

□ Воспользуемся элементарной оценкой $P(\gamma) \leq (1-c)^{|\gamma|}$, которая следует из определения 2 и выражения для $B(\gamma)$. Используя эту оценку и (4), приходим к ограничению сверху суммы

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{B}} P(\gamma) \leq \sum_{\gamma \in \mathbf{B}} (1-c)^{|\gamma|} = \sum_{k=3}^{\infty} (1-c)^k r_k. \quad \blacksquare$$

Найдем теперь верхнюю оценку для величины r_n , $n \geq 3$. С этой целью введём множество \mathbf{B}_n всех простых ϕ^* -циклов длины n на решётке Λ^* , которые окружают вершину $\mathbf{0}$. Далее, введём множество $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0)$ путей $\gamma = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$ длины n на Λ^* решётке, которые обладают свойством $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_{j+2}$, $j = 0, 1, \dots, n-2$ и связанные с ним подмножества $\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ путей длины n , у каждого из которых зафиксированы первые две вершины, а каждые два следующих друг за другом ребра обязательно являются частью какого-либо цикла из $\mathbf{B} = \bigcup_{n=3}^{\infty} \mathbf{B}_n$. Ввиду однородности гексагональной решётки величина $|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|$ не зависит от вершины \mathbf{x}_0 . Для фиксированного пути $\alpha_k = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle$ рассмотрим множество $\mathbf{B}(\alpha_k)$ таких рёбер $\mathbf{x}_k \phi^* \mathbf{x}_{k+1}$, которые при присоединении к нему образуют путь $\alpha_{k+1} = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} \rangle$, являющийся частью цикла из класса \mathbf{B} . Обозначим посредством n_* максимум среди всех чисел $|\mathbf{B}(\alpha_k)|$, вычисляемый по всем возможным путям α_k , $k \in \mathbb{N}$ (число n_* будет вычислено в п.6).

Л е м м а 2. Имеет место неравенство

$$r_n < n_*(n-2) \max_{\mathbf{x}_1: \mathbf{x}_1 \phi^* \mathbf{x}_0} \{|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|\}. \quad (6)$$

□ Проведем из вершины $\mathbf{0}$ бесконечный путь $\alpha(\mathbf{0})$ на решётке Λ без самопересечений. Для определённости, будем считать, что этот путь выбран

таким образом, что каждая его конечная часть обладает наименьшей длиной среди всех путей, соединяющих её концевые вершины. Согласно теореме 1, каждый цикл на Λ^* обязательно имеет общую с этим путём вершину из множества V . Выберем среди всех таких общих вершин ближайшую к вершине $\mathbf{0}$ вдоль пути $\alpha(\mathbf{0})$ и обозначим её \mathbf{z}_γ . Тогда, все циклы из \mathbf{B} распределяются на непересекающиеся множества $\mathbf{B}(l)$, $l \in \mathbb{N}$ такие, что к одному множеству относятся те и только те циклы γ , у которых вершина \mathbf{z}_γ находится на расстоянии l вдоль пути $\alpha(\mathbf{0})$, $\text{dist}(\mathbf{z}_\gamma, \mathbf{0}) = l$. На основе множеств $\mathbf{B}(l)$, построим множества $\mathbf{B}_n(l) = \mathbf{B}(l) \cap \mathbf{B}_n = \{\gamma \in \mathbf{B} : |\gamma| = n, \text{dist}(\mathbf{z}_\gamma, \mathbf{0}) = l\}$. Очевидно, что имеет место неравенство $l \leq n - 2$, и поэтому $\mathbf{B}_n = \bigcup_{l=1}^{n-2} \mathbf{B}_n(l)$,

$$r_n = \sum_{l=1}^{n-2} |\mathbf{B}_n(l)|. \tag{7}$$

Зафиксируем направление обхода для циклов $\gamma = \langle \mathbf{z}_\gamma, x_1, \dots, x_{n-1}, \mathbf{z}_\gamma \rangle$ из $\mathbf{B}_n(l)$. Введём в рассмотрение непересекающиеся множества $\mathbf{B}_n(l, \mathbf{a}) = \{\gamma \in \mathbf{B}_n(l) : \mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_\gamma = \mathbf{a}\}$ циклов из $\mathbf{B}_n(l)$, у которых зафиксирована первая после \mathbf{z}_γ в установленном порядке обхода цикла вершина $\mathbf{x}_1 = \mathbf{z}_\gamma + \mathbf{a}$. Вектор \mathbf{a} является одним из векторов на рис.2 при условии, что нулевой вершиной является вершина \mathbf{z}_γ . Имеет место разложение $\mathbf{B}_n(l) = \bigcup_{\mathbf{y}: \mathbf{z}_\gamma \phi^* \mathbf{y}} \mathbf{B}_n(l, \mathbf{y} - \mathbf{z}_\gamma)$, и поэтому

$$|\mathbf{B}_n(l)| = \sum_{\mathbf{y}: \mathbf{z}_\gamma \phi^* \mathbf{y}} |\mathbf{B}_n(l, \mathbf{y} - \mathbf{z}_\gamma)|. \tag{8}$$

Очевидно, что $\mathbf{B}_n(l, \mathbf{b}) \subset \mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{z}_\gamma, \mathbf{z}_\gamma + \mathbf{b})$, так как зафиксировав любой путь из $\mathbf{B}_n(l, \mathbf{b})$, после удаления последнего, в порядке прохождения, ребра, он превращается в путь из $\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{z}_\gamma, \mathbf{z}_\gamma + \mathbf{b})$. При установлении же этой инъекции, каждому пути из $\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{z}_\gamma, \mathbf{z}_\gamma + \mathbf{b})$ может соответствовать не более одного цикла из $\mathbf{B}_n(l, \mathbf{b})$. Тогда, из (8) следует неравенство

$$|\mathbf{B}_n(l)| \leq n_* \max_{\mathbf{x}_1: \mathbf{x}_1 \phi^* \mathbf{x}_0} \{|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|\}.$$

Так как величина $|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|$ не зависит от $l = \text{dist}(\mathbf{0}, \mathbf{z}_\gamma)$, то применяя полученную оценку для оценивая сверху правой части разложения (7), получаем (6). ■

Для оценки величины $|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|$ введём следующую конструкцию. Охарактеризуем однозначно каждый путь из $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0)$, $n \geq 2$ последовательностью $\langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1} \rangle$ векторов "сдвига", где $\mathbf{b}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ и каждый вектор \mathbf{b}_i ,

$i = 2, \dots, n$ представляет собой вектор $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$, повёрнутый по часовой стрелке на угол, который образуется вектором $\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i-2}$ и ортом \mathbf{e}_1 на плоскости расположения решётки и который отсчитывается против часовой стрелки. В этой параметризации множеству $\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ сопоставляется равномошное ему множество $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)$ всех последовательностей $\langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$ с фиксированным вектором \mathbf{b}_1 , у которых каждая входящая в их состав пара $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ является допустимой, то есть для каждой пары $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$ в множестве \mathbf{A} существует такой кластер, у которого в составе внешней границы, записанной в терминах векторов сдвига, имеется пара $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle$ следующих друг за другом сдвигов, которая совпадает с $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Следовательно $|\mathbf{C}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)| = g(\mathbf{b}_1; n) \equiv |\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)|$.

Разложим множество $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1)$ на непересекающиеся друг с другом множества $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_n)$ последовательностей $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$, у которых, кроме первого, зафиксирован также последний сдвиговый вектор \mathbf{b}_n ,

$$\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1) = \bigcup_{\mathbf{b}_n} \mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_n).$$

Тогда $g(\mathbf{b}_1; n) = \sum_{\mathbf{b}_n} |\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n)|$. Вводя нумерацию для возможных сдвиговых векторов, которая представлена на рис.2, мы можем считать, что величина $|\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n)|$ при каждом значении $n \in \mathbb{N}$ является 12-ти мерным вектором $g_j(\mathbf{b}_1, n)$ так, что каждая его j -я компонента равна значению этой величины в том случае, когда \mathbf{b}_n имеет номер j в принятой нумерации, $j = 1 \div 12$. При этом $g(\mathbf{b}_1; n) = \sum_{j=1}^{12} g_j(\mathbf{b}_1; n)$.

Определим, теперь, матрицу \mathcal{S} , размерность которой равна числу ближайших соседей вершины на сопряжённой решётке Λ^* . Для гексагональной решётки это число равно 12. Матричные элементы S_{ij} , $i, j = 1 \div 12$ принимают значения 0 или 1 согласно следующему правилу. Положим $S_{ij} = 1$, если при построении последовательности из $\mathbf{G}_n(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n)$ при каком-либо значении $n = 3, 4, \dots$ её длины возможно появление в этой последовательности для какого-то номера $k \leq n - 1$, пары $\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1} \rangle$ сдвиговых векторов такой, что векторы $\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}$ имеют, соответственно, номера i и j в принятой на рис.2 нумерации. Наоборот, $S_{ij} = 0$, если не существует кластера, внешняя граница которого содержала бы указанную стыковку рёбер. Матрицу \mathcal{S} будем называть далее *матрицей соединения путей*.

Л е м м а 3. Пусть у матрицы \mathcal{S} максимальное по модулю собственное

число единственно. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$g_i(\mathbf{b}_1, n) = C_{ij} \lambda_0^{n-1} (1 + o(1)), \tag{9}$$

где номер j соответствует сдвиговому вектору \mathbf{b}_1 и ненулевая матрица \mathcal{C} имеет неотрицательные матричные элементы C_{ij} , $\lambda_0 > 0$.

□ Заметим, что согласно определению вектора $g_i(\mathbf{b}_1; n)$ для любого $n = 2, 3, \dots$ и вектора \mathbf{b}_1 с номером j в параметризации, данной на рис.2, имеет место рекуррентное соотношение

$$g_i(\mathbf{b}_1; n) = \sum_{k=1}^{12} g_k(\mathbf{b}_1; n-1) S_{ki}.$$

Кроме того, согласно определению этого вектора, имеет место $g_i(\mathbf{b}_1; 1) = S_{ji}$. Тогда индукцией по $n \in \mathbb{N}$ заключаем, что

$$g_i(\mathbf{b}_1; n) = (\mathcal{S}^{n-1})_{ji}.$$

Так как у матрицы \mathcal{S} имеется единственное максимальное собственное число с максимальным абсолютным значением, то при $n \rightarrow \infty$ для выражения в правой части последнего равенства справедлива асимптотическая формула (9). Кроме того, так как $S_{ij} \geq 0$, то положительность λ_0 и матричных элементов C_{ij} следует из теоремы Фробениуса [6] для матриц с неотрицательными элементами. ■

Теперь, мы в состоянии получить оценку снизу для вероятности $Q(c)$.

Т е о р е м а 3. Пусть λ_0 – максимальное собственное число матрицы \mathcal{S} соединения путей единственно. Тогда для вероятности $Q(c)$ имеет место оценка

$$Q(c) \geq c - C n_* (1-c)^2 \sum_{l=3}^{\infty} (n-2) [(1-c)\lambda_0]^{n-2}, \tag{10}$$

где положительная постоянная $C > \max_j \sum_{i=1}^{12} C_{ij}$ выбрана так, что имеет место неравенство $g_i(\mathbf{b}_1, n) < C \lambda_0^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

□ На основании лемм 1 и 2 и определения функции $g_i(\mathbf{b}_1; n)$, имеем

$$c - Q(c) \leq \sum_{n=3}^{\infty} (1-c)^n r_n \leq n_* \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) (1-c)^n \max_{\mathbf{x}_1} \{|\mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)|\} =$$

$$= n_* \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)(1-c)^n g_{n-1}(\mathbf{b}_1) = n_* \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)(1-c)^n \sum_{i=1}^{12} g_i(\mathbf{b}_1; n-1).$$

Применяя асимптотическую формулу (9) и определение постоянной C , получаем

$$c - Q(c) \leq n_* C (1-c)^2 \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) [(1-c)\lambda_0]^{n-2}. \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. Для порога перколяции c_* бернуллиевого случайного поля $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ на гексагональной решётке $\langle V, \Phi \rangle$ справедливо неравенство $c_* \leq 1 - \lambda_0^{-1}$.

□ Ряд в правой части неравенства (10) сходится при $(1-c)\lambda_0 < 1$, то есть при $c > 1 - \lambda_0^{-1}$. Сходимость же этого ряда, применяя рассуждение, основанное на лемме Бореля-Кантелли (см., например, [7]), приводит к отличной от нуля вероятности перколяции при выполнении указанного ограничения на параметр c . Следовательно, $c_* \leq 1 - \lambda_0^{-1}$. ■

6. Верхняя оценка порога перколяции. Из рассмотрений предыдущего раздела следует, что задача оценивания сверху порога перколяции на гексагональной решётке сводится к вычислению собственного числа λ_0 . Для его вычисления нужно, прежде всего, установить явный вид матрицы \mathcal{S} . При определении значений матричных элементов S_{ij} необходимо либо предъявить кластер, внешняя граница которого содержит пару рёбер $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, имеющих номера i и j , соответственно, либо доказать, что кластеров, граница которых содержит такую пару рёбер с общей вершиной не существует. Следующие утверждения описывают общую структуру матрицы \mathcal{S} и устанавливают, какие из её матричных элементов заведомо равны нулю.

Л е м м а 4. Матрица S_{ij} симметрична и $S_{ii} = 0$.

□ Так как прохождение цикла, составляющего внешнюю границу, возможно в обоих направлениях, то существование или отсутствие в нём пары $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ следующих друг за другом рёбер с номерами i и j приводит к существованию или отсутствию цикла, у которого есть пара рёбер $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle$, то есть $S_{ij} = S_{ji}$. Так как равенство $S_{ii} = 1$ соответствует тому, что во внешней границе имеется пара рёбер, которые описываются парой $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$ в последовательности $\langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$ так, что вектор \mathbf{b} имеет номер i . Это означает, согласно описанию цикла посредством указанной последовательности, что эти рёбра имеют вид $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ и $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, что невозможно. Поэтому $S_{ii} = 0$ для всех значений $i = 1 \div 12$. ■

Л е м м а 5. Матрица S_{ij} обладает свойством $S_{1,j} = S_{1,14-j}$, $S_{5,j} = S_{5,10-j}$, $S_{9,j} = S_{9,18-j}$, $j = 2 \div 12$, где операция вычитания в нижнем индексе понимается по модулю 12.

□ Первое свойство следует из симметрии рисунка, описывающего стыковки рёбер в вершине **0** на рис.2, относительно отражения от прямой, определяемой вершинами **1, 0, 7**. Второе соотношение следует из симметрии этого рисунка относительно отражений от прямой, проходящей через **5, 0, 11**, а третье – относительно прямой, проходящей через **9, 0, 3**. ■

Л е м м а 6. Матричные элементы S_{ij} обладают свойством $S_{i+4,j+4} = S_{ij}$, где суммы $i + 4$ и $j + 4$ понимаются по модулю 12.

□ Это свойство следует из симметрии рис.2, описывающего возможные соединения рёбер в вершине **0**, относительно поворотов на угол $2\pi/3$. ■

С л е д с т в и е. Матрица \mathcal{S} имеет следующую блочную структуру, составленную из двух 4×4 -матриц F, G

$$S = \begin{pmatrix} F & G & G^+ \\ G^+ & F & G \\ G & G^+ & F \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где G^+ – транспонированная к G матрица.

□ Из леммы 6 следует, что матрица \mathcal{S} на основе 4×4 -матриц F, G, H с матричными элементами $F_{ij} = S_{ij}$, $G_{ij} = S_{i,j+4}$, $H_{ij} = S_{i,j+8}$, $i, j = 1 \div 4$ представляется следующим образом:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} F & G & H \\ H & F & G \\ G & H & F \end{pmatrix}.$$

Из леммы 4 следует, что $H = G^+$, так как $G_{ij} = S_{i,j+4} = S_{i+8,j}$ при $i, j = 1 \div 4$ и одновременно $S_{i+8,j} = S_{j,i+8} = H^+$. ■

Л е м м а 7. $S_{1,5} = 0$.

□ У каждой вершины **x** внешней границы ∂W должна быть смежная с ней вершина **y**, принадлежащая W , и вершина **z**, смежная с **x**, но не принадлежащая $W \cup \partial W$. Допустим, что $S_{1,5} = 1$. Тогда вершины **1** и **5** (см. рис.3) принадлежат ∂W и, следовательно, не принадлежат W . Так как вершина **0** имеет три смежные вершины **1, 5, 9**, то вершина **9** должна одновременно быть вершиной из W и не принадлежать $W \cup \partial W$, что невозможно. ■

Л е м м а 8. $S_{ij} = 0$, $i, j = 1 \div 4$.

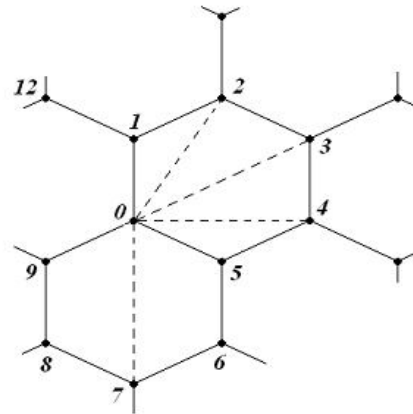


Рис. 3: Возможные соединения вершины 0 в составе внешней границы кластера.

□ Достаточно доказать, что $S_{1,j} = 0$, $j = 2, 3, 4$ и $S_{2,j} = 0$, $j = 3, 4$. Рассмотрим первую группу матричных элементов. Вершины 0 и 1 принадлежат ∂W . Для них существуют вершины $x, y \in W$ такие, что $x \neq 1$, $y \neq 0$, а также существуют вершины $x', y' \notin W \cup \partial W$ такие, что $x' \neq 1$, $y' \neq 0$. Из каждой вершины x' и y' существуют пути на бесконечность, не пересекающиеся с W . Для вершины 1 такими вершинами x, x' могут быть 2 и 12 , а для вершины 0 таковыми могут быть вершины 5 и 9 . Тогда имеется четыре варианта выбора вершин x, x' и y, y' из представленных возможностей. Достаточно рассмотреть два из них, не сводящихся друг у другу зеркальным отражением относительно прямой, проходящей через $1, 0, 7$. В качестве двух таких возможностей мы выберем следующие. Точками x, x' служат 2 и 12 и вершинами y, y' , в первом случае, — 9 и 15 , а, во втором случае, наоборот, вершины 15 и 9 меняются местами.

В первый случае, существует непересекающиеся с W бесконечные пути из вершин 1 и 0 , которые проходят, соответственно, через вершины 12 и 5 . Рассмотрим линию в плоскости, в которой размещена решётка. Эта линия состоит из первого пути по рёбрам решётки и приходит из бесконечности в вершину 12 , далее, из последовательности рёбер $\langle 12, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 5 \rangle$ и из второго пути из вершины 5 на бесконечность. Линия делит плоскость на части так, что вершины x и y находится в разных частях. Тогда, вершины x и y не могут быть вершинами одного и того же кластера W , так как любой путь из вершины x в вершину y по ребрам решётки обязательно пересечёт эту линию, а пересечь он её может только в одной из вершин решётки. Следовательно в

рассмотренном варианте невозможно соединение ребра $\langle 1, 0 \rangle$ ни с одним из рёбер $\langle 0, j \rangle$, $j = 2, 3, 4$.

Во втором случае аналогичным образом рассматривается линия на плоскости, которая состоит из пути, приходящего из бесконечности в вершину 1 без пересечения с кластером W , ребра $\langle 1, 0 \rangle$, диагонали из вершины 0 вершину j представленной на рис.3 грани гексагональной решётки с вершинами $0, 1, 2, 3, 4, 5$ и пути из вершины j на бесконечность по рёбрам решётки без пересечения с W . Эта линия разделяет плоскость на части так, что вершины x и y находятся в разных частях. Поэтому, они не могут быть вершинами одного и того же кластера W , так как любой путь по рёбрам решётки из вершины y в вершину x обязательно пересечёт указанную линию и такое пересечение возможно только в одной из вершин, входящих в состав этой линии.

Полученные в обоих из рассмотренных случаев противоречия показывают, что $S_{1,j} = 0$ при $j = 2, 3, 4$.

Рассмотрим вторую группу матричных элементов S_{23}, S_{24} . Построим линию на плоскости размещения решётки, составленную из пути, который приходит в вершину 2 из бесконечности без пересечения с кластером W (он должен существовать, так как вершина 2 принадлежит ∂W), последовательного прохождения диагоналей, определяемых парами вершин $2, 0$ и $0, j$, где $j = 3, 4$ на грани решётки, представленной на рис.3, и затем пути из вершины j на бесконечность. Эта линия разделяет плоскость на две части и кластер W должен располагаться полностью в одной из них.

Очевидно, что $S_{23} = 0$, так как кластер W не может располагаться справа от построенной линии согласно принятому на ней направлению, так как в противном случае вершина 0 не имеет смежных с ней вершин из W . С другой стороны, кластер W не может находиться слева от этой линии, так как в этом случае путь из вершины 0 , уходящий на бесконечность без пересечения с W , который должен существовать согласно определению вершины из внешней границы, будет также находиться в левой части плоскости. Тогда, этот путь разделяет левую часть плоскости снова на две части. Кластер W должен полностью располагаться в одной из частей, и поэтому одна из вершин 2 или j не может принадлежать внешней границе, так как ей не будет соответствовать никакая смежная с ней вершина из W . Полученное противоречие доказывает равенство $S_{24} = 0$. ■

Т е о р е м а 4. Матрица \mathcal{S} представляется формулой

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & G & G^+ \\ G^+ & \mathbf{0} & G \\ G & G^+ & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где посредством $\mathbf{0}$ обозначена нулевая матрица и матрица.

□ Так как из лемм 5 и 8 следует $S_{3,4} = S_{3,2} = S_{2,3} = 0$, то в силу леммы 4, матрица F в формуле (11) является нулевой.

На основании свойства $S_{1,j} = S_{1,14-j}$ и лемм 7 и 8, находим

$$S_{1,12} = S_{1,2} = 0; \quad S_{1,11} = S_{1,3} = 0; \quad S_{1,10} = S_{1,4} = 0; \quad S_{1,9} = S_{1,5} = 0.$$

Тогда, первая строка в матрице G^+ в формуле (11) и, следовательно, первый столбец в матрице G – нулевые. Остальные элементы матрицы G равны 1, так как на основании указанного выше критерия для определения единичных значений матричных элементов имеем $S_{ij} = 1$ при $i = 1 \div 4, j = 6, 7, 8$ см. рис.4-7. ■

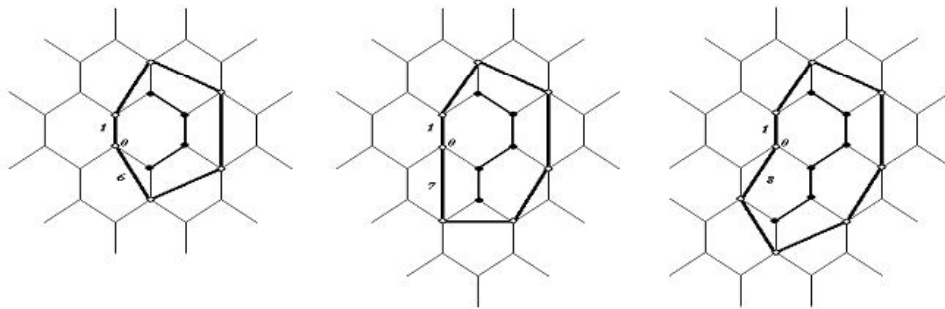


Рис. 4: Кластеры, содержащие ребро 1-0.

З а м е ч а н и е. Из вида матрицы \mathcal{S} следует, что $n_* = 7$.

На основании Теоремы II Приложения, положив в ней $n = 3, m = 4, A = \mathcal{S}, A^{(1)} = \mathbf{0}, A^{(2)} = G, A^{(3)} = G^+$, заключаем, что максимальное собственное число λ_0 матрицы \mathcal{S} совпадает с максимальным собственным числом матрицы

$$B = \mathbf{0} + G + G^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

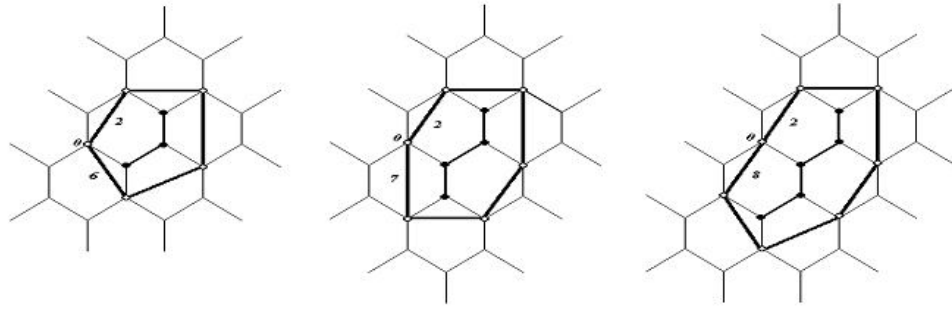


Рис. 5: Кластеры, содержащие ребро 2-0.

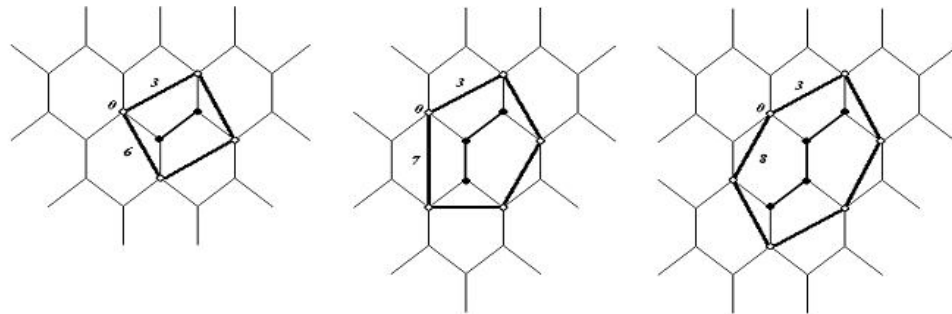


Рис. 6: Кластеры, содержащие ребро 3-0.

Ранг этой матрицы, очевидно, равен двум. Тогда она имеет два нулевых собственных числа. Поэтому, её характеристическое уравнение имеет вид

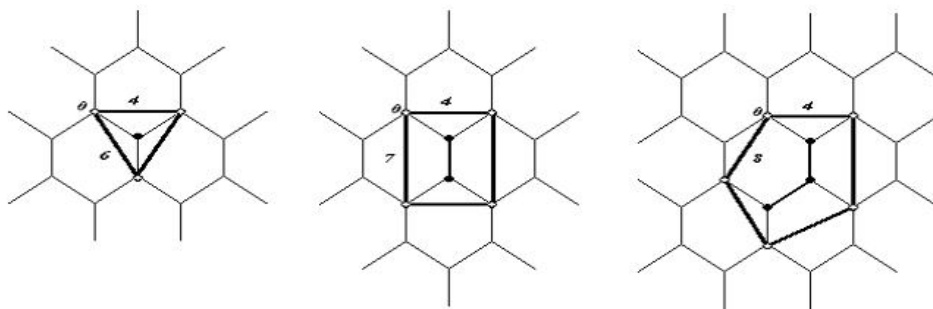
$$\det(B - \lambda I) = (\lambda^2 - \lambda\xi_1 + \xi_2)\lambda^2 = 0,$$

где $\xi_1 = \text{Sp } B$, $\xi_2 = [\text{Sp } B^2 - (\text{Sp } B)^2]/2$. Поэтому $\xi_1 = \text{Sp } B = 6$, и так как диагональные элементы матрицы B^2 равны $(B^2)_{ii} = 3, 13, 13, 13$, то $\xi_2 = 3$. Следовательно число λ_0 является наибольшим корнем квадратного уравнения $\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0$. Откуда получаем $\lambda_0 = 3 + 2\sqrt{3}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. Максимальное собственное число λ_0 матрицы S равно $3 + 2\sqrt{3} \approx 6,46$.

Из теоремы 5 и следствия из теоремы 3, непосредственно, следует

Основное утверждение. Порог перколяции c_* для бернуллиевского поля на гексагональной решётке не превосходит числа $2(1 - \sqrt{3}/3)$.

Рис. 7: Кластеры, содержащие ребро $4-0$.

Литература

1. Вирченко Ю.П. Перколяция // Энциклопедия Математическая физика. – Москва: Российская энциклопедия. – 1998. – С.346-347.
2. Yu.P.Virchenko, Tolmacheva Yu.A. Revision of the upper estimate of percolation threshold in square lattice // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – 10. – 1. – P.29-39.
3. Kesten H., Percolation Theory for Mathematicians / H.Kesten. – Boston: Birkhäuser, 1982. – 420p. (пер. на рус. яз. Кестен Х. Теория просачивания для математиков. – М. Мир, 1986ю – 390с.)
4. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. Method of Sequential Approximative Estimates in Descrete Percolation Theory // Studies in Mathematical Physics Research. ed. Charles V. Benton. – New York: Nova Science Publishers, 2004. – P.155-175.
5. Вирченко Ю.П., Толмачёва Ю.А. Мажорантные оценки порога перколяции бернуллиевского поля на квадратной решётке // Украинский математический журнал. – 2005. – 57. – 10. – С.1315-1326.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер - М.: Наука. – 1966.
7. М.В. Меньшиков, Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения // Итоги науки и техники. сер.теор. вер., мат. стат. и теор.кибер. – Москва: ВИНТИ,1986. – 24. – С.53-110.

Приложение

Л е м м а I. Пусть B – $m \times m$ -матрица с неотрицательными элементами, для которой существует число $\mu > 0$ и вектор с неотрицательными компонентами $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ такие, что имеет место неравенство

$$\mu b_k \leq \sum_{l=1}^m B_{kl} b_l, \quad k = 1 \div m. \tag{III}$$

Тогда максимальное по модулю собственное число $\lambda(B)$ матрицы B положительно и удовлетворяет неравенству $\lambda(B) \geq \mu$.

□ Применим неравенство (III) N раз. Индукцией по N получаем

$$\mu^N b_k \leq \sum_{l=1}^m (B^N)_{kl} b_l. \tag{II2}$$

Докажем сначала неравенство (III) в случае, когда матрица B , заведомо, имеет только одномерные собственные подпространства. Пусть $\mathbf{c}^{(r)} = \langle c_k^{(r)}; k = 1 \div m \rangle$, $r = 1 \div m$ – собственные векторы матрицы B с собственными числами λ_r . Будем считать, что λ_r упорядочены в порядке убывания модулей чисел λ_r (при совпадении модулей, они упорядочиваются по величине фазы). Разложим вектор

$$\mathbf{b} = \sum_{r=1}^m \xi_r \mathbf{c}^{(r)}, \quad \xi_r \in \mathbb{C}, r = 1 \div m.$$

Тогда

$$B^N \mathbf{b} = \sum_{r=1}^m \xi_r \lambda_r^N \mathbf{c}^{(r)},$$

и поэтому неравенство (II2) представляется в виде

$$\mu^N b_k \leq \sum_{r=1}^m \xi_r \lambda_r^N c_k^{(r)}. \tag{II3}$$

Найдётся номер $k \leq m$ такой, что $b_k > 0$. Рассмотрим неравенство (II3) для этого номера. Среди всех $r = 1 \div m$ найдётся минимальный номер r_0 такой, что $\xi_{r_0} c_k^{(r_0)} \neq 0$. Тогда неравенство (II3) переписется в виде

$$\mu^N b_k \leq \sum_{r=r_0}^m \xi_r \lambda_r^N c_k^{(r)},$$

либо, извлекая корень N -й степени из обеих положительных частей неравенства,

$$\mu b_k^{1/N} \leq \lambda_{r_0} \left[\sum_{r=r_0}^m \xi_r (\lambda_r / \lambda_{r_0})^N c_k^{(r)} \right]^{1/N} = |\lambda_{r_0}| \left| \sum_{r=r_0}^m \xi_r (\lambda_r / \lambda_{r_0})^N c_k^{(r)} \right|^{1/N}.$$

Последнее равенство возникает в связи с тем, что правая часть (П3) должна быть положительной. Перейдём к верхнему пределу $N \rightarrow \infty$. При этом $\lim_{N \rightarrow \infty} b_k^{1/N} = 1$. Ввиду ограниченности суммируемого выражения в правой части неравенства, её верхний предел не превосходит единицы. Тогда $\mu \leq |\lambda_{r_0}|$. По определению, в силу теоремы Фробениуса, $|\lambda_{r_0}| \leq \lambda(B)$.

Посредством добавления к матрице B , некоторой матрицы с неотрицательными элементами, сколь угодно близкой к нулевой матрице в топологии пространства \mathbb{R}^{m^2} , можно изменить её таким образом что все её собственные подпространства станут одномерными. Это следует из того, что условие кратности решений характеристического уравнения $\det(B - \lambda \mathbf{1}) = 0$ для собственных чисел, которое выражается с помощью дополнительного уравнения $\frac{d}{d\lambda} \det(B - \lambda \mathbf{1}) = 0$, вырезает некоторое дифференцируемое многообразие ко-размерности единица в пространстве \mathbb{R}^{m^2} допустимых матриц B . При таком добавлении малой матрицы, матрица B перейдёт в матрицу B_ϵ такую, что $B_\epsilon \rightarrow B$ при $\epsilon \rightarrow +0$.

В общем случае, неравенство (П1) доказывается следующим образом. Пусть \mathbf{b} – собственный вектор матрицы B , соответствующий собственному числу $\lambda(B)$. Так как $(B_\epsilon)_{kl} \geq B_{kl}$ при $k, l = 1 \div m$, то

$$\lambda(B)b_k = \sum_{l=1}^m B_{kl}b_l \leq \sum_{l=1}^m (B_\epsilon)_{kl} b_l.$$

Следовательно, для неё имеет место (П1), и при этом она имеет только одномерные собственные подпространства. Поэтому $\mu \leq \lambda(B_\epsilon)$. После этого, переходим к пределу $\epsilon \rightarrow +0$. ■

Т е о р е м а 1. Пусть $n \times n$ -матрица A с неотрицательными элементами составлена из m^2 блоков – прямоугольных матриц $B^{(k,l)}$, имеющих, соответственно, p_k строк и s_l столбцов, $k, l = 1 \div m$, $m \leq n$, $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$,

$$s_1 + s_2 + \dots + s_m = n,$$

$$A = \begin{pmatrix} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} & \dots & B^{(1,m)} \\ B^{(2,1)} & B^{(2,2)} & \dots & B^{(2,m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B^{(m,1)} & B^{(m,2)} & \dots & B^{(m,m)} \end{pmatrix}. \tag{II4}$$

Определим матричные элементы квадратной $m \times m$ -матрицы B формулой

$$B_{kl} = \max \left\{ \sum_{j=1}^{s_l} B_{ij}^{(k,l)}; i = 1 \div p_k \right\}.$$

Тогда, максимальные по модулю собственные числа $\lambda(A)$ и $\lambda(B)$, соответственно, матриц A и B положительны и удовлетворяют неравенству $\lambda(B) \geq \lambda(A)$.

□ Матрица B также как и матрица A обладает неотрицательными элементами. Согласно теореме Фробениуса [6], максимальные по модулю собственные числа матриц A и B положительны. Согласно этой же теореме, у матриц B и A существуют собственные векторы с неотрицательными компонентами, соответствующие этим собственным числам. Обозначим их $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$, $b_j \geq 0$, $j = 1 \div m$; $\mathbf{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $a_i \geq 0$, $i = 1 \div n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}a_j = \lambda(A)a_i, \quad \sum_{l=1}^m B_{jl}b_l = \lambda(B)b_j.$$

Введём вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$ с компонентами $c_k = \max\{a_i; s_1 + \dots + s_{k-1} < i \leq s_1 + \dots + s_k\}$, $k = 1 \div m$. Разбиением суммирования по $k = 1 \div m$ в обеих частях первого равенства введём повторное суммирование: первое – по группам из s_1, \dots, s_m номеров, а второе – внутри каждой из этих групп. В результате, получим

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}a_j = \sum_{l=1}^m \sum_{j=s_1+\dots+s_{l-1}+1}^{s_1+\dots+s_l} A_{ij}a_j \leq \sum_{l=1}^m c_l \sum_{j=s_1+\dots+s_{l-1}+1}^{s_1+\dots+s_l} A_{i,j+s_1+\dots+s_{l-1}}.$$

Производя замену $i \Rightarrow p_1 + \dots + p_{k-1} + i$, $i = 1 \div p_k$, последнее неравенство перепишем в виде

$$\lambda(A)a_{i+p_1+\dots+p_{k-1}} = \sum_{j=1}^n A_{i+p_1+\dots+p_{k-1},j}a_j \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^m c_l \sum_{j=s_1+\dots+s_{l-1}+1}^{s_1+\dots+s_l} A_{i+p_1+\dots+p_k, j+s_1+\dots+s_{l-1}} = \sum_{l=1}^m c_l \sum_{j=1}^{s_l} B_{ij}^{(k,l)}.$$

Вычисляя максимум по $i = 1 \div p_k$ от обеих частей неравенства, получим

$$\lambda(A)c_k \leq \sum_{l=1}^m \left(\max_{i=1 \div p_k} \left\{ \sum_{j=1}^{s_l} B_{ij}^{(k,l)} \right\} \right) c_l = \sum_{l=1}^m B_{kl} c_l. \quad (\text{II5})$$

Неравенство (II5) совпадает с (II1), если положить $\mu = \lambda(A)$ и заменить \mathbf{b} на \mathbf{c} . Тогда, из утверждения леммы I следует утверждение теоремы. ■

Теорема II. Пусть $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ – упорядоченный набор $m \times m$ -матриц с неотрицательными элементами. Пусть, далее, $nm \times nm$ -матрица A составлена из $m \times m$ -матриц $B^{(k,l)}$

$$A = \begin{pmatrix} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} & \dots & B^{(1,n)} \\ B^{(2,1)} & B^{(2,2)} & \dots & B^{(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B^{(n,1)} & B^{(n,2)} & \dots & B^{(n,n)} \end{pmatrix}, \quad (\text{II6})$$

где каждый из упорядоченных наборов $\langle B^{(i,1)}, \dots, B^{(i,n)} \rangle$, $i = 1, \dots, n$ получается некоторой зависящей от номера строки в (II6) перестановкой P набора $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ из группы \mathbb{P}_n перестановок чисел $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$. Тогда максимальное собственное число матрицы A совпадает с максимальным собственным числом $n \times n$ -матрицы $B = A^{(1)} + \dots + A^{(n)}$.

□ Матрица A имеет неотрицательные элементы. Поэтому, согласно теореме Фробениуса, её максимальное по модулю собственное число $\lambda(A)$ положительно. Этому собственному числу соответствует собственный вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nm}$, $\mathbf{a} = \langle a_1, \dots, a_{nm} \rangle$, $a_i \geq 0$, $i = 1 \div nm$, $A\mathbf{a} = \lambda(A)\mathbf{a}$, что означает

$$\sum_{j=1}^{nm} A_{ij} a_j = \lambda(A) a_i, \quad i = 1 \div nm. \quad (\text{II7})$$

Определим вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$, $c_j \geq 0$, $j = 1 \div m$, где

$$c_j = \max\{a_{j+sm}; s = 0, \dots, n-1\}, \quad j = 1 \div m.$$

Тогда, заменяя $i = k + pm$, $j = l + sm$, $s, p = 0, 1, \dots, n-1$ в равенстве (II7) находим, что имеет место неравенство

$$\lambda(A)a_{k+pm} = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{l=1}^m A_{k+pm, l+sm} a_{l+sm} \leq \sum_{l=1}^m \left(\sum_{s=0}^{n-1} A_{k+pm, l+sm} \right) c_l.$$

Беря максимум от обеих частей неравенства по $p = 0, 1, \dots, n - 1$, получим

$$\lambda(A)c_k \leq \sum_{l=1}^m B_{kl}c_l,$$

где

$$B_{kl} = \max \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} A_{k+pm, l+sm}; p = 0, 1, \dots, n - 1 \right\}$$

– матричные элементы матрицы $B = A^{(1)} + \dots + A^{(n)}$. Эта формула следует из равенства

$$\sum_{s=0}^{n-1} A_{k+pm, l+sm} = \sum_{s=0}^{n-1} \left(A^{(P(s+1))} \right)_{kl},$$

где перестановка $P \in \mathbb{P}_n$ определяется числом p , задающим номер строки в блочной матрице (II6). Сделав замену переменной суммирования $P(s+1) \Rightarrow s$, находим, что последнее выражение равно

$$\sum_{s=0}^{n-1} \left(A^{(P(s+1))} \right)_{kl} = \sum_{s=1}^n A_{kl}^{(s)} = B_{kl},$$

и сумма в (II4) не зависит от p .

Применяя утверждение Теоремы I к матрице A , в результате, получим неравенство $\lambda(B) \geq \lambda(A)$. С другой стороны, возьмём собственный вектор \mathbf{b} матрицы B с неотрицательными компонентами, соответствующий собственному числу $\lambda(B)$. Определим вектор $\mathbf{c}' = \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{b} \rangle}_n$. Для этого вектора имеем

$$A\mathbf{c}' = \langle B\mathbf{b}, B\mathbf{b}, \dots, B\mathbf{b} \rangle = \lambda(B)\mathbf{c}',$$

то есть $\lambda(B)$ – собственное число матрицы A с собственным вектором \mathbf{c}' . Согласно определению числа $\lambda(A)$, имеем $\lambda(A) \geq \lambda(B)$. Из двух полученных неравенств следует, что $\lambda(A) = \lambda(B)$. ■

CLUSTER DECOMPOSITION OF PERCOLATION PROBABILITY ON THE HEXAGONAL LATTICE

E.S.Antonova, Yu.P.Virchenko

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

The upper estimate of the percolation threshold of the Bernoulli random field on the hexagonal lattice is found. It is done on the basis of the cluster decomposition. Each term of the decomposition is estimated using the number estimate of cycles on the hexagonal lattice which may be external borders of every possible finite clusters containing the fixed lattice vertex.

Key words: percolation probability, hexagonal lattice, finite cluster, external border, cluster decomposition, percolation threshold.