УДК 533.72

О ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩЕМ ПРИ ДВИЖЕНИИ НАГРЕТОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ

Н.В. Малай, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,

ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: malay@mail.ru

В приближении Стокса, получено распределение температуры в, окрестности неравномерно нагретой крупной частицы сферической формы. Используя метод, сращиваемых асимптотических разложений, учтено влияния двивжения газообразной среды на поле температуры. При решении конвективного уравнения теплопереноса учитывался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры.

Ключевые слова: поле температуры, метод сращиваемых асимптотических разложений.

Введение. Значимость процесса теплообмена, как в природе, так и в технике определяется, прежде всего, тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое в свою очередь само определяется условиями теплообмена [1]. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества, механические, магнитные и другие свойства тел. Кроме того при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение нагретых частиц; при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при математическом моделировании процесса осаждения частиц в разнотемпературных плоскопараллельных каналах и т.п. необходимо знать поле температуры в их окрестности. В случае малых относительных перепадов температуры в окрестности частицы, т.е. когда $(T_S - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$ (T_S – средняя температура поверхности частицы, $T_{e\infty}$ – температура жидкости вдали от нее) в научной литературе имеется достаточно количество работ посвященных этой тематике, например, [2, 3].

В данной работе рассмотрен процесс теплообмена при значительных перепадах температуры в окрестности частицы $(T_S - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim 0(1)$ с учетом зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости жидкости μ_e и теплопроводности частицы λ_i) от температуры и влияния движения среды на теплообмен.

При описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры [4, 5]. Таким образом,

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^{\beta}, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^{\alpha}, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^{\omega},$$

$$\mu_{e\infty} = \mu_e \left(T_{e\infty}\right), \quad \rho_{e\infty} = \rho_e \left(T_{e\infty}\right), \quad \lambda_{e\infty} = \lambda_e \left(T_{e\infty}\right), \quad \lambda_{i\infty} = \lambda_i \left(T_{e\infty}\right),$$

$$t_k = T_k / T_{e\infty}, \quad k = e, i, \quad 0,5 \leq \alpha,\ \beta \leq 1, \quad -1 \leq \omega \leq 1.$$

Здесь и далее индекс e указывает на газообразную среду, индекс i – на принадлежность частице, а индекс ∞ означает параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. вдали от частицы.

Система уравнений теплопроводности, описывающая распределения температур T_e вне – и T_i внутри частицы, решалась методом сращиваемых асимптотических разложений [6]

$$\rho_e c_{pe} \left(\mathbf{U_e} \nabla\right) T_e = \operatorname{div}\left(\lambda_e \nabla T_e\right), \ \operatorname{div}\left(\lambda_i \nabla T_i\right) = -q_i \tag{1}$$

с краевыми условиями в сферической системе координат r, θ, φ

$$r = R, \quad T_e = T_i, \quad \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_o \sigma_1 \left(T_i^4 - T_{e\infty}^4\right), \tag{2}$$

$$r \to \infty, \quad T_e = T_{e\infty}, \tag{3}$$

$$r \to 0, \quad T_i \neq \infty, \tag{4}$$

где R – радиус частицы, σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана; σ_1 – интегральная степень черноты; ρ_e, $\mathbf{U_e}$ и c_{pe} – плотность, массовоая скорость и удельная теплоемкость жидкости; q_i – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых происходит нагрев ее поверхности. В уравнение (1) входит массовая скорость газообразной среды $\mathbf{U_e}$. Для определения этой величины использовались результаты работы. Исследование обыкновенных дифференциальных уравнений показали, что получить равномерно пригодные разложения в случаях, когда в некоторых областях изменения независимых переменных, где зависимые переменные испытывают резкие изменения обычными методами (например, метод растягивания координат и т.п.) невозможно.

Один из методов, связанных с рассматриваемой проблемой, заключается в построении прямых разложений (называемых внешними разложениями) с использованием исходных переменных и в построении разложений (называемых внутренними разложениями), описывающих эти резкие изменения и использующих увеличенные масштабы. Внешние разложения становятся непригодными в областях резких изменений, в то время как пригодность внутренних разложений нарушается при выходе из этих областей. Чтобы связать эти разложения используют так называемую процедуру сращивания. Методу сращиваемых асимптотических разложений свойственна потеря граничных условий. Нельзя ожидать, что внешнее разложение будет удовлетворять условиям, которые наложены во внутренней области, и обратно, внутреннее разложение в общем случае не будет удовлетворять условиям в удаленной области. Таким образом, неудовлетворенные граничные условия вообще присущи как внутреннему, так и внешнему разложениям. Потеря условий восполняется сращиванием двух разложений. Сращивание представляет собой основную черту метода. Возможность сращивания основана на существовании области перекрытия, в которой пригодны как внутреннее, так и внешнее разложения. Используя это перекрытие, можно получить точное соотношение между конечными частными суммами. Реализация этой замечательной возможности осуществима только для возмущения параметра, которое неоднородно в координатах, или для возмущения координаты, которое неоднородно по другим координатам. Нельзя срастить два различных параметрических разложения, таких, как разложение для больших и малых значений числа Рейнольдса, числа Маха и т.д. Такие ряды могут перекрываться в том смысле, что они имеют общую область сходимости, но процесс аналитического продолжения дает только приближенное соотношение для некоторого конечного числа членов.

1. Метод решения. Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты $\rho_{e\infty}$, $\mu_{e\infty}$, $\lambda_{e\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины – R, U_∞ и $T_{e\infty}$. Из этих параметров можно составить следующие безразмерные комбинации: число Ренольдса $\mathrm{Re}_\infty = (\rho_{e\infty} U_\infty R)/\mu_{e\infty}$, число Пекле $\mathrm{Pe}_\infty = \mathrm{Re}_\infty \cdot \mathrm{Pr}_\infty$, где $\mathrm{Pr}_\infty = (c_{pe}\mu_{e\infty})/\lambda_{e\infty}$ – число Прандтля, U_∞ – величина характерной скорости. Обезразмерим уравнения и граничные условия: $\mathbf{V_e} = \mathbf{U_e}/U_\infty$, y/R, x/R.

При $\varepsilon = \mathrm{Re}_\infty \ll 1$ решение уравнений гидродинамики находятся в виде ряда по ε [7]. Перейдем теперь к решению уравнений теплопроводности. Если перейти к безразмерным величинам, то конвективное уравнение теплопроводноти принимает вид

$$\varepsilon \frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_e}\left(V_r \frac{\partial t_e}{\partial y} + \frac{V_\theta}{y}\frac{\partial t_e}{\partial \theta}\right) = \mathrm{div}\left(t_e^\alpha \nabla t_e\right). \qquad (5)$$

Будем решать это уравнение методом сращиваемых асимптотических разложений [6]. Внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры представим как

$$t_e(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y,\theta)\,, \qquad f_0(\varepsilon) = 1,$$
$$t_e^*(\xi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi,\theta)\,, \tag{6}$$

где $\xi = \varepsilon y$ – "сжатая" радиальная координата [6]. При этом требуется, чтобы $f_{n+1}/f_n \to 0$, $f_{n+1}^*/f_n^* \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности продолжения асимптотических разложений того и другого в некоторую промежуточную область, т.е.

$$t_e(y \to \infty, \theta) = t_e^*(\xi \to 0, \theta)\,. \tag{7}$$

Асимптотическое разложение решения внутри частицы, как показывают граничные условия на поверхности частицы, следует искать в аналогичном виде

$$t_i(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{in}(y,\theta)\,. \tag{8}$$

Относительно функций $f_n^*(\varepsilon)$ и $f_n(\varepsilon)$ предполагается, что их порядок малости по ε увеличивается с ростом n.

С учётом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры t_e^*,

$$\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_e^*}\left(V_r^* \frac{\partial t_e^*}{\partial \xi} + \frac{V_\theta^*}{\xi}\frac{\partial t_e^*}{\partial \theta}\right) = \mathrm{div}\left(t_e^{*\alpha} \nabla t_e^*\right), \quad t_e^* \to 1 \text{ при } \xi \to \infty\,, \tag{9}$$

$$\mathbf{V_e^*}(\xi,\theta) = \mathbf{n_z} + \varepsilon \mathbf{V_e^{(1)*}}(\xi,\theta) + ..., \quad P_e^*(\xi,\theta) \to P_\infty \text{ при } \xi \to \infty \tag{10}$$

Здесь $t_e^* = t_e^*(\xi,\theta)$, $\mathbf{n_z}$ – единичный вектор в направлении оси z.

2. Поля температур в окрестности нагретой аэрозольной частицы. При нахождении распределения температуры в окрестности аэрозольной частицы мы ограничимся поправками перкого порядка малости по ε. Они определяются последовательно с учетом условия сращивания. Ввиду громоздкости полученных формул мы приведем нулевые и первые члены разложения в случае малых относительных перепадов температуры

$$t_e^*(\xi,\theta) = t_{e0}^* + \varepsilon t_{e1}^*, \quad t_e(y,\theta) = t_{e0} + \varepsilon t_{e1}, \quad t_i(y,\theta) = t_{i0} + \varepsilon t_{i1},$$

$$t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \quad t_{e0}^* = 1,$$

$$t_{i0}(y) = B_0 + \left[4\,\pi\,R^2 T_{e\infty}\lambda_{e\infty} y^2\right]^{-1} \int_V q_i\,dV + \int_1^y \frac{\psi_0}{y}\,dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_0\,dy,$$

$$t_{e1}^*(\xi,\theta) = \frac{\Gamma_0}{\xi}\exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Pr}_\infty \xi\left(x-1\right)\right\},$$

$$t_{e1}(y,\theta) = \frac{\omega}{2y}\left(1-y\right) + \cos\left[\frac{\Gamma_0}{y^2} + \omega\left(\frac{1}{2} - \frac{A_1}{4y^3} + \frac{A_2}{2y}\right)\right],$$

$$t_{i1}(y,\theta) = \cos\left\{B_1 y + \left[4\,\pi R^2 T_{e\infty}\lambda_{e\infty} y^2\right]^{-1} \int_V q_i\,z\,dV + \right.$$

$$\left. \frac{1}{3}\left[y\int_1^y \frac{\psi_1}{y^2}\,dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_1 y\,dy\right]\right\},$$

$$\psi_n(y) = -\frac{(2n+1)R^2 y^2}{2\lambda_{i\infty} T_{e\infty}} \int_{-1}^{+1} q_i\,P_n(\cos\theta)\,d(\cos\theta), \quad n \geq 0\,,$$

$$x = \cos\theta, \quad \omega = \mathrm{Pr}_\infty \Gamma_0\,.$$

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур определяются из граничных условий на поверхности частицы. Что же касается постоянных A_1, A_2, они определяются из граничных условий для массовой скорости [7].

Заключение. Получены выражения для распределения температур вне и внутри аэрозольной частицы с учетом влияния движения среды (т.е. учтено влияние конвективного члена в уравнении теплопереноса) при произвольных относительных перепадах температуры в окрестности частицы. Поскольку частица нагрета, то при решении уравнений газовой динамики использовался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры.

При нахождении полей температур вне и внутри аэрозольной частицы в случае значительных перепадов температуры предполагалось, что коэффициент теплопроводности частицы, по величине, много больше коэффициента теплопроводности газа, т.е. $\lambda_i \gg \lambda_e$. При выполнении этого условия в коэффициенте динамической вязкости $\mu_e(r, \theta)$ можно пренебречь зависимостью по углу θ в системе частица-газ и считать, что $\mu_e(t_e) \approx \mu_e(t_{e0})$ (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры). Это позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

Литература

1. Брюханов О.Н. Тепломассообмен / О.А. Брюханов, С.Н.Шевченко. – М.: Ассоциация строительных вузов, 2005.– 460с.
2. Гупало Ю.П., Рязанов Ю.С., А.Т. Чалюк А.Т. О поле температур, возникающем при двивжении реагирующей сферы при малых конечных числах пекле и рейнольдса // ПМТФ. – 1972. – 2. – С.59-65.
3. Ландау Л.Д. Механика сплошных сред / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: ГИТ-ТЛ, 1954. – 795с.
4. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С.Бретшнайдер. – М.: Химия, 1966. – 535с.
5. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б.Варгафник. – М.: Наука,1977. – 720с.
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967. – 310с.
7. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. К вопросу о гравитационном движении равномерно нагретой частицы в газообразной среде // ПМТФ. – 2008. – 49;1. – С.74-80.

TEMPARTURE FIELD AT THE MOVING OF HEATED PARTICLE IN THE VISCOUS NONISOTERMIC GASEOUS MEDIUM

N.V. Malay, A.V. Glushak

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: malay@mail.ru

At the Stokes approximation, the temperature distribution in the neighbourhood of nonuniform heated large particle of the spherical form is obtained. Using the method of asymptotic expansions, the influence of the gaseous media moving on the temperature field is taken into account. The power dependence of transport coefficients (the viscousity and the thermal conductivity) and the density of geseous media on the temperature is taken into account when the convective equation is solved.

Key words: temperature field, method of asymptotic сращиваемых expansions.