

СРАВНЕНИЕ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

С.В. ТУЯКОВ

Белгородский
государственный
университет

В работе проводится сравнительный анализ локализации энергии в частотной области некоторых вейвлетов и собственных векторов.

Ключевые слова: частотные представления, вейвлеты, собственные векторы, локализация энергии.

Постановка задачи

В вычислительной математике нередко случаи, когда одну функцию приходится представлять другой, более простой и удобной для дальнейшей работы. Такую задачу называют аппроксимацией функций [1]. Математическая теория аппроксимации предлагает выбирать базис, который с помощью линейной комбинации небольшого числа векторов из этого базиса дает возможность построить достаточно точную аппроксимацию функции. Эти выбранные векторы могут быть интерпретированы как существенные для структуры функции. Коэффициенты разложения функции по базису образуют представление, которое выделяет некоторые определенные свойства функции [2].

В линейной аппроксимации функция $f(t)$ проецируется на M функций, априори выбранных из ортонормированного базиса $B = \{\varphi_k(t)\}_{k \in N}$ [2], например:

$$f_M(t) = \sum_{k=1}^M \alpha_k \varphi_k(t),$$

где $\alpha_k = \langle f(t), \varphi_k(t) \rangle$.

Так как базис ортонормированный, то погрешность аппроксимации равна:

$$\|f(t) - f_M(t)\|^2 = \sum_{k=M+1}^{+\infty} |\alpha_k|^2.$$

Во многих важных приложениях для представления функций используется базис Фурье. При этом базис Фурье образован функцией $e^{jt} = \cos(t) + j \sin(t)$ ($j = \sqrt{-1}$) с помощью масштабных преобразований.

В последние десятилетия для разложения функций успешно используются вейвлеты. Можно построить вейвлеты $\psi(t)$ такие [2], что семейство растянутых и сдвинутых функций

$$\left\{ \psi_{i,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^i}} \psi\left(\frac{t - 2^i k}{2^i}\right) \right\}_{(i,k) \in \mathbb{Z}^2}$$

будет ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{R})$ и любая функция $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ может быть представлена как

$$f(t) = \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} \alpha_{i,k} \psi_{i,k}(t),$$

где $\alpha_{i,k} = \langle f(t), \psi_{i,k}(t) \rangle$.

Простейшим примером вейвлета, образующего ортонормированный базис, является вейвлет Хаара:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & t < 0, t \geq 1. \end{cases}$$

Наряду с данным вейвлетом широко используются ортогональные вейвлеты Добеши. Также имеются вейвлеты, не порождающие ортонормированные базисы: вейвлет Морле, вейвлеты Гаусса и др.

Вейвлет базисы в отличие от базиса Фурье используют локализованную базисную функцию. Вейвлет должен быть локализован и во временной области, и в частотной. В данной работе нас будет интересовать локализация вейвлетов в частотной области. Под этим понимается, что энергия вейвлета в основном сосредоточена в некотором частотном интервале.

Пусть $f(t)$ – некоторая функция с областью определения $t \in [a; b]$. При выполнении определенных условий [3] справедливо представление

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad j = \sqrt{-1} \quad (1)$$

и существует обратное к (1) преобразование

$$F(\omega) = \int_a^b f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2)$$

Функцию $F(\omega)$ принято называть трансформантой Фурье, переменная ω имеет смысл частоты. Поэтому переход от $f(t)$ к $F(\omega)$ часто называют переходом из пространственной области в частотную.

В содержательном отношении преобразования (1) и (2) можно придать разный смысл, который и определяет роль частотных представлений в задачах анализа и синтеза функций [4]. Для функций $f(t)$ и $F(\omega)$ справедливо равенство Парсеваля [3]

$$\int_a^b f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi, \quad (3)$$

которое нетрудно преобразовать к виду

$$\int_a^b f^2(t) dt = \sum_{r=0}^{\infty} \int_{\omega \in D_r} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi, \quad (4)$$

где интервалы D_k определяют разбиение оси частот вида

$$D_r = [-\Omega_{r+1}, -\Omega_r) \cup [\Omega_r, \Omega_{r+1}), \Omega_0 = 0. \quad (5)$$

Таким образом, оказывается возможным осуществить частотный анализ энергетических характеристик исследуемой функции, так как интегралы

$$P_r = \int_{\omega \in D_r} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi \quad (6)$$

определяют доли энергии, попадающие в выбранные частотные интервалы, в частности, можно выделить частотные интервалы, в которых сосредоточена подавляющая доля энергии.

С учетом формулы (6) локализацию вейвлета в частотной области можно записать следующим образом

$$\int_{\omega \in D_r} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi = \max, \quad (7)$$

при дополнительном условии $\|f(t)\|^2 = 1$.

В монографии [4] приводится метод вычисления точных долей энергии отрезка эмпирических данных в выбранных частотных интервалах. Особенностью приведенного метода является то, что все вычисления производятся во временной области, без явного перехода в частотную область. В основе метода лежит применение матриц. В монографии дается обоснование именовать данные матрицы субполосными.

Пусть дан сигнал $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ с $\|\vec{f}\| = 1$ (T – знак транспонирования). Тогда вычисление доли энергии сигнала в заданном частотном диапазоне осуществляется по следующей формуле (8) [4]:

$$P_r = \vec{f}^T A_N^r \vec{f}, \quad (8)$$

где $A_N^r = \{a_{i,k}^r\}$ с элементами вида (9):

$$a_{ik}^r = \begin{cases} \frac{\sin[r \frac{\pi}{R}(i-k)] - \sin[(r-1) \frac{\pi}{R}(i-k)]}{\pi(i-k)}, & i \neq k, \\ 1/R, & i = k \end{cases}, \quad (9)$$

где $i, k = 1, \dots, N, r = 1, \dots, R$.

Для расчетов используется нормированная область частот $\omega \in [0; \pi]$. Частотная область $[0; \pi]$ разбивается на R одинаковых частотных интервалов. A_N^r – субполосная матрица.

Субполосные матрицы являются симметричными и неотрицательно определенными. Поэтому каждая матрица обладает полной системой ортогональных собственных векторов, соответствующих неотрицательным собственным числам. Имеет смысл трактовать такую систему векторов базисом.

Насколько вейвлеты удовлетворяют условию (7)? Решим следующую задачу.

Задача. Найти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, $\|\vec{x}\|^2 = 1$, который удовлетворяет следующему условию

$$\int_{\omega \in V_r} |X_d(\omega)|^2 d\omega / 2\pi = \max, \quad (10)$$

$$X_d(\omega) = \sum_{k=1}^N x_k e^{-j\omega(k-1)} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi),$$

$$V_r = [-v_{r+1}, -v_r) \cup [v_r, v_{r+1}), v_0 = 0, \\ 0 < v_{r+1} \leq \pi.$$

Используя метод точного вычисления доли энергии вектора, функционал (10) можно записать следующим образом:

$$\vec{x}^T A_N^r \vec{x} = \sum_{i,k=1}^N a_{i,k} x_i x_k = \max. \quad (11)$$

Необходимо найти частные производные. Учитывая, что $\|\vec{x}\|^2 = 1$, т.е. это является максимумом, поэтому находим частные производные следующим образом и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i,k=1}^N a_{i,k} x_i x_k - \lambda \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) = 0. \quad (12)$$

В итоге получим систему линейных уравнений с числом уравнений, равным числу переменных и равным N . Данную систему легко переписать в матричном виде

$$A_N^r \vec{x} = \lambda \vec{x}. \quad (13)$$

Последняя формула определяет собственный вектор субполосной матрицы.

Ответ: искомым вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ является собственный вектор субполосной матрицы A_N^r , соответствующий ее максимальному собственному числу.

Следует отметить важное свойство собственных чисел субполосной матрицы. Это свойство заключается в том, что собственные числа численно равны сосредоточенным в выбранных частотных интервалах долям энергий соответствующих собственных векторов [4].

Локализация энергии вейвлетов и собственных векторов в частотной области

Оценим локализацию энергии вейвлетов и собственных векторов в частотной области. Для этого найдем границы частотного интервала, в котором сосредоточено подавляющая доля энергии (например, больше 0,99).

Для краткости будем обозначать субполосную матрицу следующим образом $A_N^r R$, где R – количество частотных интервалов, N – размерность матрицы, а r – номер частотного интервала. Собственные векторы субполосной матрицы будем обозначать q_k^r , где r – номер частотного интервала, k – номер собственного вектора. Будем исследовать собственные векторы субполосных матриц $A_N^r R$, при $N = 26$, $R = 4$, соответствующих максимальным собственным числам и по виду, «близких» рассматриваемым вейвлетам. В примерах с 1-ого по 6-ой для дискретного случая вейвлеты и собственные векторы строятся по 26 точкам. Полученный в результате дискретизации вейвлета вектор нормируем.

Пример 1. Вейвлет Морле. Вейвлет имеет аналитическое выражение $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(5x)$. Эффективный носитель вейвлета Морле есть промежуток $[-4; 4]$. Преобразование Фурье имеет компактный носитель (промежуток $[-9; 9]$), поэтому (по условию Найквиста) шаг эквидистантной дискретизации Δt должен удовлетворять условию: $\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{9}$.

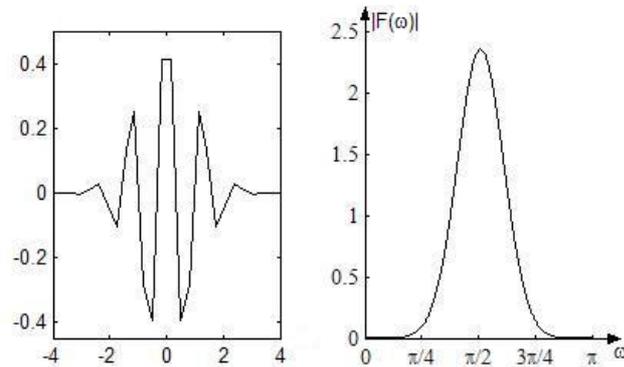


Рис. 1. Вейвлет Морле ($\Delta t = 0,32$) (слева), модуль его трансформанты Фурье (справа)

Пример 2. Собственный вектор субполосной матрицы $A_{26}^2 R = 4$.

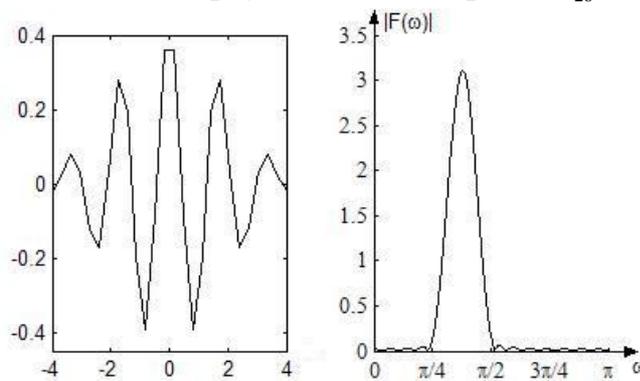


Рис. 2. Собственный вектор q_{25}^2 (слева), модуль его трансформанты Фурье (справа)

Пример 3. Вейвлет «мексиканская шляпа». Вейвлет функция $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3\pi}^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$. Данный вейвлет имеет эффективный носитель $[-5; 5]$. Преобразование Фурье данного вейвлета имеет компактный носитель – $[-5; 5]$, поэтому шаг эквидистантной дискретизации должен удовлетворять условию: $\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{5}$.

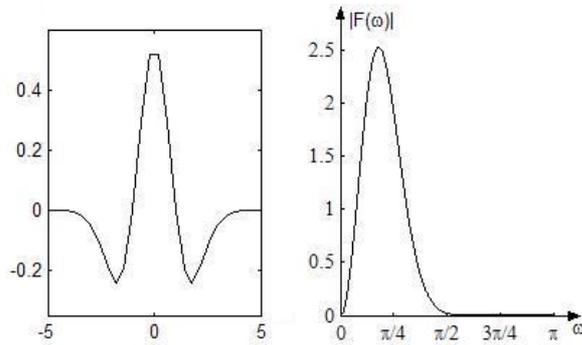


Рис 3. Вейвлет «мексиканская шляпа» ($\Delta t = 0,4$) (слева), модуль его трансформанты Фурье (справа)

Пример 4. Собственный вектор субполосной матрицы A_{26}^1 $R = 4$.

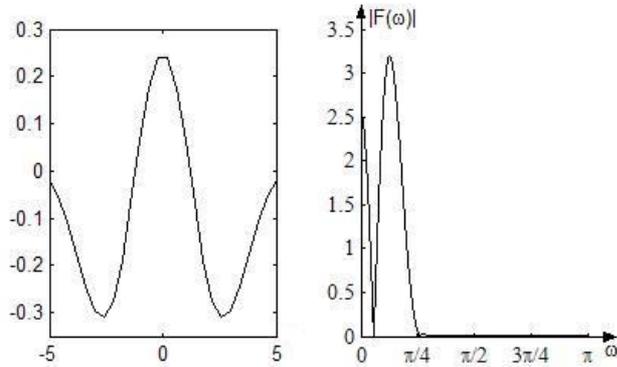


Рис. 4. Собственный вектор q_{24}^1 (слева), модуль его трансформанты Фурье (справа)

Пример 5. Вейвлет Гаусса 1-го порядка. Вейвлет функция $\psi(x) = -2kxe^{-x^2}$, где k выбирается такой, чтобы L_2 – норма функции $\psi(x)$ равнялась 1. В данном случае $k \approx 0,8933$. Вейвлет имеет эффективный носитель $[-5;5]$. Преобразование Фурье данного вейвлета имеет компактный носитель – $[-7;7]$, поэтому шаг эквидистантной дискретизации должен удовлетворять условию: $\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{7}$.

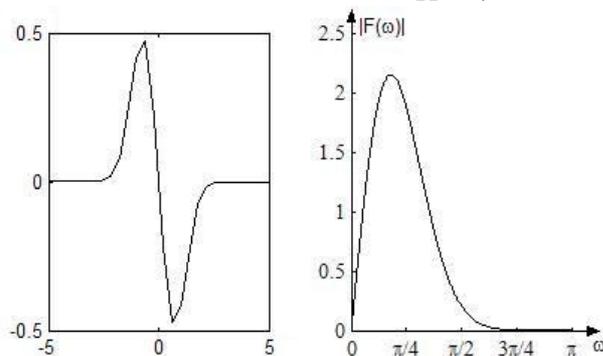


Рис. 5. Вейвлет Гаусса ($\Delta t = 0,4$) (слева), модуль его трансформанты Фурье (справа)

Пример 6. Собственный вектор субполосной матрицы A_{26}^1 $R = 4$.

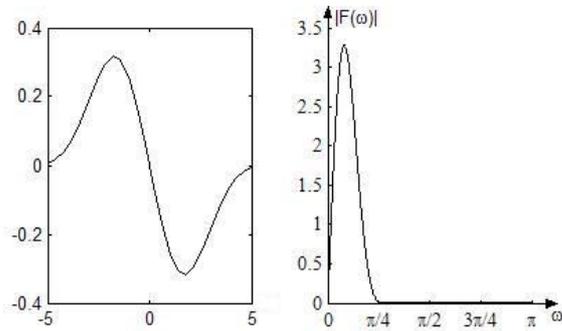


Рис. 6. Собственный вектор $(-q_{25}^1)$ (слева), модуль его трансформанты Фурье (справа)

Пример 7. Вейвлет Добеши 2-го порядка. Вейвлеты Добеши не имеют аналитического выражения. Носитель вейвлета – $[0;3]$. Функция $\psi(x)$ строится итерационно с необходимой точностью.

Алгоритм построения функции $\psi(x)$

1. Выписать коэффициенты масштабирующего фильтра: $L = [0.3415, 0.5915, 0.1585, -0.0915]$
2. Найти к фильтру L квадратурный зеркальный фильтр, взятый в обратном порядке: $H = [-0.0915, -0.1585, 0.5915, -0.3415]$.
3. Подвергнуть фильтр H сгущающей выборке $H1 = H \uparrow 2$.
4. Провести свертку $H1 * L$. На выходе получим первое приближение к вейвлету.

Для получения второго приближения необходимо провести сгущающую выборку к первому приближению и свертку с фильтром L и т.д.

Построим вейвлет по указанному алгоритму, совершив 6 итераций (6 приближений) и полученный вектор нормируем. В результате вектор будет содержать 382 отсчета.

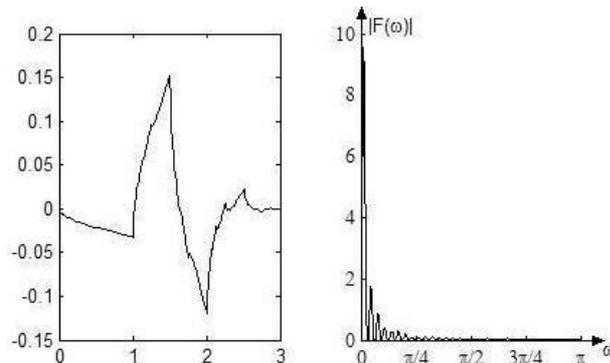


Рис. 7 Вейвлет Добеши-2 (слева), модуль его трансформанты Фурье (справа)

Пример 8. Собственный вектор субполосной матрицы $A_{382}^1 R = 20$.

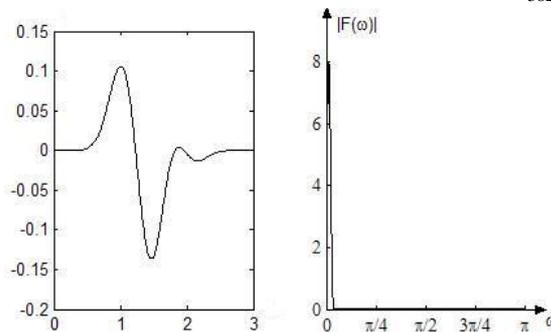


Рис. 8 Собственный вектор q_{378}^1 (слева), модуль его трансформанты Фурье (справа)

Теперь проведем расчеты долей энергии вейвлетов и собственных векторов, используя формулу (8). Результаты отображены в таблице.

Таблица

Доли энергии вейвлетов, собственных векторов и их оценки

	Доля энергии	Границы частотного интервала
Вейвлет Морле	0,9996	$\pi/4 \div 3\pi/4$
Собственный вектор $q_{25}^2 (A_{26}^2 R = 4)$	0,9994	$\pi/4 \div \pi/2$
Вейвлет «мексиканская шляпа»	0,9999	$0 \div \pi/2$
Собственный вектор $q_{24}^1 (A_{26}^1 R = 4)$	0,9999	$0 \div \pi/4$
Вейвлет Гаусса 1-го порядка	0,9985	$0 \div \pi/2$
Собственный вектор $(-q_{25}^1) A_{26}^1 R = 4$	0,9999	$0 \div \pi/4$
Вейвлет Добеши 2	0,9992	$0 \div \pi/4$
Собственный вектор $q_{378}^1 (A_{382}^1 R = 20)$	1	$0 \div \pi/20$

Последний столбец таблицы 1 показывает локализацию энергии вейвлетов и собственных векторов.

Литература

1. Лапчик М.П. Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов [Текст] /М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; Под ред. М.П. Лапчика. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 384 с.
2. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов [Текст] : Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с., ил.
3. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике.– М.: Наука, 1971.
4. Е.Г. Жилияков. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным: монография. Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.

COMPARISON OF BASIS VECTORS FOR REPRESENTATION OF FUNCTIONS

S.V. TUYAKOV

Belgorod State University

In work the comparative analysis of localization of energy in frequency area of some wavelets and eigenvectors is carried out.

Key words: frequency representations, wavelets, eigenvectors, localization of power.