

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНВАРИАНТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

М.Ф.ТУБОЛЬЦЕВ

*Белгородский
государственный
университет*

e-mail: Tuboltsev@bsu.edu.ru

В статье рассматриваются вопросы математического моделирования финансовых потоков кредитного типа, которые широко распространены на практике. Отличительной особенностью постановки рассматриваемой здесь задачи реструктуризации является то, что реструктуризация рассматривается как преобразование финансового потока специального вида. В такой постановке рассмотренная модель адекватно отражает реальную ситуацию, а задача реструктуризации имеет многочисленные применения в математической экономике и финансовой математике. Предложенный алгоритм решения задачи реструктуризации финансовых потоков кредитного типа допускает эффективную реализацию с помощью современных вычислительных средств.

Ключевые слова: финансовые потоки, реструктуризация финансовых операций, реструктуризация долгов, моделирование, компьютерное моделирование.

Введение

В условиях финансового кризиса необходимость реструктуризации финансовых операций возникает постоянно. В большинстве это операции кредитного типа: ипотеки, долгосрочные кредиты, лизинг и т.д. Для них необходимость реструктуризации связана, в первую очередь, с невозможностью выполнения заемщиком графика погашения взятого кредита и, как следствие, пролонгацией выплат. Часто, при этом, меняется также схема выплат. Например, ипотечный кредит первоначально мог погашаться дифференцированными платежами, а после реструктуризации могли измениться не только сроки погашения (в сторону увеличения), но и выплаты могли стать постоянными.

Задача реструктуризации финансовых операций является сложной как в теоретическом, так и практическом плане. В теоретическом аспекте сложность состоит в сохранении баланса интересов кредитора и заемщика, которые плохо поддаются формализации и достигаются путем переговоров. Методика сохранения этого баланса должна быть понятной сторонам, непротиворечивой и максимально простой. Типовым методом решения задачи согласования интересов сторон является использование уравнения эквивалентности платежей [1]. Пусть $\{S_i\}$, $i=1, \dots, n$ некоторая последовательность платежей, которая должна быть осуществлена в будущем, а $\{P_j\}$, $j=1, \dots, m$ другая последовательность платежей, которой предполагается заменить первую. Согласно принципу эквивалентности платежей должно выполняться условие:

$$\sum_{i=1}^n S_i^d = \sum_{j=1}^m P_j^d, \quad (1)$$

где верхние значки d означают, что осуществляется дисконтирование соответствующих платежей на некоторый момент времени.

Существует более общий, системный подход к реструктуризации финансовых операций, частным случаем которого является уравнение эквивалентности платежей [2,3]. Техника системного подхода к реструктуризации основана на использовании функции потока финансовой операции, которая задается следующим образом. Пусть множество упорядоченных пар $\{(t_i, C_i)\}$ $i=1, \dots, n$ представляет собой последовательное выбытие/поступление финансовых активов на счет юридического или физического лица в размере C_i (с учетом знака) в некоторые моменты времени t_i . Функция потока определяется следующей формулой:

$$F(V) = \sum_{i=1}^n C_i V^{t_i - t_1}, \quad (2)$$

где n – число элементов финансового потока, а V – множитель дисконтирования, связанный со ставкой дисконтирования. Внутренняя доходность финансового потока определяется как ставка дисконтирования, обращающая в нуль функцию потока.

Реструктуризация финансовой операции осуществляется путем согласованного изменения параметров на основе следующих соотношений:

$$\begin{cases} F(V) = 0 \\ F_R(V) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

где $F(V)$ – функция потока кредитной операции до реструктуризации, а $F_R(V)$ – функция потока кредитной операции, после реструктуризации. Из первого уравнения системы (3) определяется внутренняя доходность r кредитной операции, связанная с множителем дисконтирования простым соотношением:

$$r = \frac{1}{V} - 1. \quad (4)$$

Второе уравнение системы (3) позволяет, зная доходность до реструктуризации, определить параметры реструктурированной операции кредитования. В целом, система (3) является полностью определенной и не требует априорного задания ставки дисконтирования (является замкнутой). Таким образом, сохранение баланса интересов кредитора и заемщика выражается в неизменности доходности кредита после реструктуризации. Следует отметить, что принцип сохранения доходности не является очевидным и интуитивно ясным.

В практическом плане сложность реструктуризации состоит в том, что в случае применения принципа эквивалентности платежей нет теоретически обоснованного способа выбора ставки дисконтирования, а в случае использования принципа сохранения доходности не ясно, какие преобразования реструктуризации финансовых потоков сохраняют внутреннюю доходность.

Далее будет показано, что доходность кредитной операции, при выполнении некоторых дополнительных условий, является инвариантом преобразований реструктуризации. Тем самым, будет дано обоснование принципа сохранения доходности.

Теоретический анализ

Кредитные финансовые операции имеют очень специфическую структуру своих финансовых потоков. Если рассматривать кредитную операцию с точки зрения кредитора, то финансовый поток будет иметь вид

$$F = \{(-D, t_0), (d_1, t_1), \dots, (d_n, t_n)\}, \quad (5)$$

где $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Здесь удобнее при индексации элементов потока вести нумерацию с нуля, явно выделив неизменяемую часть потока. В начальный момент времени, накопленный долг составляет величину D (знак минус показывает, что это расходование финансовых активов кредитора). Остальные элементы положительны, поскольку это приток денег к кредитору. Будем говорить, что финансовый поток F погашает кредит D , если после поступления денег в момент времени t_n долг выплачен полностью (остаток долга равен нулю). Отметим, что начальный размер долга зафиксирован, и в операциях реструктуризации не меняется, т.е. списание долга не производится. Тем самым, при реструктуризации выплат по кредиту меняются только выплаты по кредиту в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n и, возможно, сами моменты времени, и число выплат n .

Реструктуризацию кредитных выплат можно рассматривать как преобразование на множестве финансовых потоков вида (5), погашающих заданный кредит. Естественно поставить вопрос об инвариантах этого преобразования. Имеет место следующее.

Предложение 1. Внутренняя доходность кредитного потока, погашающего кредит, является инвариантом преобразования реструктуризации, если проценты по кредиту начисляются по сложной процентной ставке.

Пусть r – сложная процентная ставка, по которой происходит начисление процентных денег по кредиту, а $T_i = t_i - t_{i-1}$. Обозначим через D_i остаток долга сразу после выплаты в момент t_i . Будем считать, что $D_0 = D$, тогда выполняется соотношение:

$$D_{i-1}(1+r)^{T_i} = d_i + D_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Левая часть соотношения (6) показывает насколько вырос долг с момента предыдущей выплаты, а правая часть показывает, насколько долг уменьшился после текущей выплаты d_i в момент t_i . Учитывая, что $D_n = 0$ (иначе поток не погашает долг), а $(1+r)^{-1} = V$ – множитель дисконтирования, получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} D_{n-1} &= d_n V^{T_n} \\ D_{n-2} &= d_{n-1} V^{T_{n-1}} + D_{n-1} V^{T_{n-1}}, \\ D_0 &= d_1 V^{T_1} + D_1 V^{T_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Исключая последовательно неизвестные D_i из соотношений (7) и учитывая, что $D_0 = D$, получаем

$$D = d_1 V^{T_1} + d_2 V^{T_1+T_2} + \dots + d_n V^{T_1+T_2+\dots+T_n}, \quad (8)$$

а учитывая, что $T_1 = t_1 - t_0$, $T_1 + T_2 = t_2 - t_0$, ..., $T_1 + T_2 + \dots + T_n = t_n - t_0$, а $v = (1+r)^{-1}$ соотношение (8) преобразуем к виду

$$(-D) \left(\frac{1}{1+r} \right)^{t_0-t_0} + d_1 \left(\frac{1}{1+r} \right)^{t_1-t_0} + \dots + d_n \left(\frac{1}{1+r} \right)^{t_n-t_0} = 0, \quad (9)$$

что является уравнением финансового потока (5), которое используется для определения внутренней доходности. Таким образом, уровень внутренней доходности кредитного потока равен ставке по кредиту (если это сложная процентная ставка). Поскольку это верно для любого потока погашающего кредит (т.е. такого, для которого $D_n = 0$), преобразование реструктуризации сохраняет внутреннюю доходность, т.е. внутренняя доходность является инвариантом реструктуризации, если только не меняется схема начисления процентов и процентная ставка.

Как видно из доказательства, утверждение неприменимо к преобразованиям, которые не являются реструктуризацией, т.е. к таким преобразованиям, у которых меняется процентная ставка, или остаток по кредиту отличен от нуля. Кроме того, финансовый поток должен быть потоком кредитного типа (5).

С теоретической точки зрения полученный результат интересен тем, что в процессе доказательства было установлено равенство локального параметра финансового потока: ставки по кредиту, характеризующего скорость нарастания задолженности по кредиту, с глобальным параметром: уровнем внутренней доходности, который характеризует доходность кредита в целом. Одно из немногих ограничений состоит в том, что скорость нарастания задолженности по кредиту должна быть постоянной.

С практической точки зрения, результат полезен тем, что позволяет обосновать не очевидный принцип сохранения доходности, заменяя его условием погашения задолженности. Принцип (условие) погашения задолженности можно сформулировать следующим образом: при неизменной ставке по кредиту реструктурированный финансовый поток должен погашать кредит. Подчеркнем, что никакое частичное списание долга в рамках реструктуризации не рассматривается. То, что из принципа погашения задолженности следует принцип сохранения доходности для кредитных операций почти очевидно. Действительно, если ставка по кредиту (сложная процентная ставка) сохраняется, то сохраняется и доходность кредитования после реструктуризации.

Завершая теоретический анализ, отметим, что принцип погашения задолженности не распространяется на совокупности кредитных операций, в то время как принцип сохранения доходности может применяться и в этом случае.

Методика применения

С практической точки зрения основной выигрыш от инвариантности внутренней доходности кредитного финансового потока при реструктуризации в том, что снимаются почти все ограничения на то, как осуществлять реструктуризацию: нельзя менять ставку по кредиту и частично списывать долг. Все остальное является допустимым, поскольку не изменяет баланс интересов кредитора и заемщика, который формально выражается в виде принципа погашения задолженности (долг должен быть погашен без частичного списания при неизменной ставке процентов) или вытекающего из него в силу инвариантности принципа сохранения доходности.

При этом баланс интересов поддерживается, так сказать, автоматически без наложения каких-либо дополнительных ограничений на форму реструктуризации: как бы реструктуризация не проходила, важно, чтобы последняя выплата полностью погасила задолженность по кредиту. Время выплат и их количество значения не имеют. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сказанное. Примеры будут касаться реструктуризации ипотечных кредитов, темы актуальной в условиях финансового кризиса.

Первый пример касается такой формы реструктуризации ипотеки как замена дифференцированных платежей на постоянные платежи. Пусть недвижимость стоимостью 3 млн. рублей покупается с привлечением ипотечного кредита (50% стоимости недвижимости) сроком на 3 года под 24% годовых. Погашение должно осуществляться ежемесячными платежами по схеме дифференцированных платежей (основной долг погашается равными частями плюс уменьшающиеся проценты по кредиту). Величина срочной уплаты d_k находится по формуле:

$$d_k = \frac{D}{12n} + D\left(1 - \frac{k-1}{12n}\right) \frac{j}{12}, \quad (10)$$

где $k=1,2, \dots, 12n$, n – число лет погашения ипотечного кредита, а j – номинальная процентная ставка по кредиту.

Таким образом, долг в размере 1,5 млн. рублей должен быть погашен 36 дифференцированными платежами, из которых первый составляет 71667 рублей, а последний – 42500 рублей (при этом платежи уменьшаются в арифметической прогрессии). Стоимость кредита для заемщика (доходность для кредитора) может быть рассчитана и составляет 26,782296%. Она заметно больше, чем ставка по кредиту и это, как будто, противоречит тому, что доходность должна быть равна ставке по кредиту. Но, ставка j , используемая в схеме дифференцированных платежей, является не сложной, а простой ставкой. Если найти эквивалентную ей при 12-ти платежах в год сложную ставку, то она окажется в точности равной 26,782296%.

Заметим, что если бы кредит погашался равными платежами, то их размер составил бы 58850 рублей, что значительно ниже первоначальных дифференцированных платежей. Предположим, что в силу определенных обстоятельств решено заменить последние платежи (24) равными 48 платежами, т.е. сменить схему оплаты и продлить срок погашения на 2 года. В этом случае новые платежи составят 33941 рубль, а стоимость кредита не изменится (погрешности в расчетах дадут расхождение в 4-й цифре после запятой). Постоянные срочные уплаты постоянны ($d_k=d$) и находятся по формуле:

$$d = \frac{D \frac{j}{12} \left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12n}}{\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12n} - 1}, \quad (11)$$

поскольку число платежей за год равно числу начислений процентов по кредиту в году ($m=p=12$) [4]. В данном примере доходность кредитования для кредитора не изменилась, несмотря на значительные изменения финансового потока при реструктуризации.

Рассмотрим теперь второй пример, который также покажет, что доходность не зависит от размера кредита. Пусть недвижимость стоимостью 2 млн. рублей покупается с помощью ипотечного кредита (60% от стоимости недвижимости), ставкой по кредиту 24% и сроком погашения 5 лет по схеме постоянных платежей (ежемесячные платежи 47080 рублей). Расчеты показывают стоимость кредита для заемщика 26,782296%, т.е. ту же, что и в предыдущем примере. В этом нет ничего неожиданного, поскольку внутренняя доходность кредитного потока определяется только сложной процентной ставкой по кредиту, а при использовании других ставок – эффективной процентной ставкой. В предыдущих примерах эффективная процентная ставка, а она по определению является сложной процентной ставкой, равна 26,782296% независимо от размера кредита.

Приведенные примеры хорошо иллюстрируют тот факт, что уровень внутренней доходности кредитного потока (глобальная доходность) определяется только ставкой процентов по кредиту (локальной доходностью) и не зависит от размера кредита и других параметров. Однако, возможности использования инвариантности доходности значительно шире, чем объяснение подобных примеров. Инвариантность доходности позволяет предложить универсальный алгоритм реструктуризации кредитных платежей, легко реализуемый на компьютере.

Пусть в некоторый произвольный момент времени t' после момента t_0 , но до момента t_k производится реструктуризация платежей. Следующий алгоритм решает задачу реструктуризации:

- 1) выбираем произвольный момент времени $t'_k > t'$;
- 2) рассчитываем размер долга на момент времени t'_k ;
- 3) уменьшаем размер долга на произвольную величину d'_k ;
- 4) если остаток долга по кредиту равен нулю, то алгоритм завершается;
- 5) если остаток долга по кредиту не равен нулю, то выбираем произвольный момент времени $t'_{k+1} > t'_k$ и переходим к шагу 2 с новым моментом времени t'_{k+1} .

Наиболее значимым является шаг 3, поскольку именно он определяет количество платежей после реструктуризации. Теоретически алгоритм может продолжаться неограниченно долго, но он завершится через конечное число циклов, если все выплаты d'_k превышают набравшие за предыдущий период проценты на остаток долга по кредиту. Инвариантность доходности гарантирует сохранение баланса интересов кредитора и заемщика.

Предложенный алгоритм имеет две положительные черты: легко реализуем на компьютере; может применяться для повторной реструктуризации в будущем. Легко представить ситуацию, когда представитель банка-кредитора и заемщик вместе согласовывают график реструктуризации выплат по кредиту, используя программу, реализующую данный алгоритм, совместно выбирая время и размер будущих платежей. Моменты будущих платежей, скорее всего, будут образовывать равномерную сетку, но величина платежей может широко варьироваться, а не быть строго предопределенной: убывающей, как при дифференцированных ипотечных платежах, или состоять из одинаковых платежей.

Предложенный алгоритм является универсальным в том смысле. Что может учитывать любые дополнительные ограничения, связанные с выбором времени и размером платежей или учитывать и то и другое. На его основе не трудно создать компьютерную систему моделирования процесса реструктуризации, которая позволяла бы находить параметры реструктуризации. Например, задав число платежей после реструктуризации, можно было бы найти величину платежей постоянных, или изменяющихся по некоторому правилу.

Подводя итог, отметим, что инвариантность доходности доказана только для финансовых потоков кредитного типа, которые образуют хотя и важный, но достаточно узкий класс.

Литература

1. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело, 1995, с. 137.

2. Тубольцев М.Ф. Реинжиниринг систем финансовых операций // «Научные ведомости», серия «История, Политология, Экономика», №4 (35) выпуск 3.– Белгород: Изд-во БелГУ, 2007.– стр.226-231.

3. Тубольцев М.Ф. Математические методы в системном анализе финансовых операций //Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии, 2008, №1. с.124 – 133.

4. Мелкумов Я.С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям. М.: ИНФРА-М, 1996, с. 171.

USING OF INVARIANTS AT MODELLING OF FINANCIAL STREAMS

In article questions of mathematical modeling of financial streams credit the type, which widespread in practice are considered.

Distinctive feature of statement of a problem of re-structuring considered here is that re-structuring is considered as transformation of a financial stream of a special kind.

In such statement the considered model adequately reflects a real situation, and the re-structuring problem has numerous applications in mathematical economy and the financial mathematics.

The offered algorithm of the decision of a problem of re-structuring of financial streams credit type supposes effective realization by means of modern computing means.

M.F.TUBOLTSEV

Belgorod state university

e-mail: Tuboltsev@bsu.edu.ru

Keywords: financial streams, re-structuring of financial operations, re-structuring of debts, modeling, computer modeling.