УДК 519.6

УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ БАЗИСОВ ВЕЙЛЯ-ГЕЙЗЕНБЕРГА ДЛЯ OFTDM СИГНАЛОВ

В. П. ВОЛЧКОВ [1]
Д. А. ПЕТРОВ [2]

[1] Московский технический университет связи и информатики

e-mail: volchkovvalery@mail.ru

[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

e-mail: dapetroff@gmail.com

В статье рассматриваются технология передачи информации с ортогональным частотно-временным мультиплексированием (OFTDM). OFTDM сигнал формируется при помощи ортогонального обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга, обладающего хорошей частотно-временной локализацией. Для этого базиса доказываются условия ортогональности, критерий и теорема Найквиста, которые гарантируют отсутствие межканальной и межсимвольной интерференции сигнала в гауссовских каналах. На основе этих критериев предложен вычислительно-эффективный метод ортогонализации на основе быстрого преобразования Фурье.

Ключевые слова: OFTDM, критерий Найквиста, ортогонализация.

В настоящее время одной из наиболее распространенных технологий, лежащих в основе передачи информации, как по проводным, так и по беспроводным каналам, является ортогональное частотное мультиплексирование (Orthogonal Frequency Division Multiplexing или OFDM). Структура и свойства OFDM сигнала определяются собственным конечномерным базисом, из которого он формируется, как некоторая линейная комбинация базисных функций. Коэффициенты линейной комбинации (модулирующие символы) могут быть вещественными или комплексными и определяются выбранным сигнальным созвездием (например, QAM, PSK, и др.).

Однако, прямоугольная форма формирующего импульса, характерная для классических OFDM систем [1, 2], не является оптимальной с точки зрения устойчивости к межканальной интерференции (МКИ). Поскольку в этом случае локализация формируемых на основе неё базисных функций в частотной области будет наихудшей. По этой же причине в таких OFDM системах уровень внеполосного излучения оказывается завышенным. Причем, природа межканальных помех такова, что их нельзя скомпенсировать или отфильтровать обычными методами цифровой обработки.

В литературе [3, 4] был предложен ряд подходов к подавлению МКИ. Однако, эти методы приводят либо к весьма значительной потере спектральной и энергетической эффективности, либо к нарушению ортогональности. Поэтому задача борьбы с межканальной интерференцией в мобильных OFDM системах является очень актуальной, и во многих случаях пока не находит удовлетворительного решения.

Одним из основных методом борьбы с частотно-временным рассеянием сигнала является использование специальных ортогональных хорошо локализованных базисов, минимизирующих уровень взаимного влияния поднесущих каналов, как в частотной, так и во временной областях, но при этом не ухудшающих спектральную и энергетическую эффективность системы. Однако, теорема Балиан-Лоу (Balin-Low) [5] ограничивает возможность построения ортогональных плотно упакованных и хорошо локализованных базисов на основе сдвигов по времени и частоте единственного формирующего импульса. Другими словами, в этом случае невозможно построить ортогональный сигнальный базис с хорошей частотно-временной локализацией без потери спектральной эффективности. С другой стороны, ортогональность остается обязательным требованием, приводящим, в частности, к минимизации ошибок, обусловленных действием в канале аддитивного белого гауссовского шума. Альтернативной технологией, которая позволяет в значительной степени преодолеть указанные недостатки и получить наилучшее частотно-временное уплотнение базисных функция, является ортогональное частотно-временное мультиплексирование – OFTDM (Orthogonal Frequency Time Division Multiplexing) [2].

В OFTDM системах при построении ортогонального сигнального базиса вместо одного формирующего импульса используется несколько инициализирующих функций с хорошей частотно-временной локализацией. Эти функции отличаются друг от друга только фазами, а сам базис получается в результате их равномерных сдвигов по времени и частоте (обобщенный базис Вейля-Гейзенберега).

До последнего времени одной из основных проблем при применении на практике (в частности, в абонентских телекоммуникационных устройствах) таких базисов являлась сложность алгоритма их формирования. В статье выводятся упрощенные условия ортогональности обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга для OFTDM сигналов, учитывающие свойства формирующего импульса. В теории связи эти условия часто называются критерием или теоремой Найквиста [1]. Данные критерии имеют важное теоретическое и прикладное значение, так как позволяют получить вычислительно эффективный алгоритм построения обобщенных ортогональных базисов Вейля-Гейзенберга с наилучшей частотно-временной локализацией. Таким образом, упрощается процедура синтеза базиса, что позволяет приблизиться к практической реализации OFTDM системы.

Передаваемый OFTDM сигнал $s(t)$ в дискретном времени можно эквивалентно представить в виде:

$$s[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^{R}\,\psi_{k,l}^{R}[n]+\sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^{I}\,\psi_{k,l}^{I}[n]\right),\ n\in J_N, \quad (1)$$

$$\psi_{k,l}^{R}[n]=g\left[(n-lM)_N\right]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha/2)\right), \quad (2)$$

$$\psi_{k,l}^{I}[n]=-jg\left[(n+M/2-lM)_N\right]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha/2)\right), \quad (3)$$

где $c_{k,l}^{R}=\mathrm{Re}(a_{k,l})$, $c_{k,l}^{I}=\mathrm{Im}(a_{k,l})$ – действительные и мнимые части комплексных информационных QAM символов $a_{k,l}$; $s[n]=s(nT/M)$, $g[n]=g(nT/M)$, $J_N=\{0,1,\dots,N-1\}$, $\psi_{k,l}^{R}[n]$ и $\psi_{k,l}^{I}[n]$ – комплексные функции, полученные в результате равномерных сдвигов по времени и частоте двух классов инициализирующих функций: $g[n]\exp\left(j\pi/_{M}\,k\alpha\right)$ и $g[n+M/2]\exp\left(j\pi/_{M}\,k\alpha\right)$; $M\ge 2$ – количество поднесущих, $N=ML\ge M$; $F=1/T$ – расстояние между поднесущими, T – символьный временной период; $\alpha\in\mathrm{R}=(-\infty,\infty)$ – фазовый параметр; $(a)_N=(a)_{\mathrm{mod}\,N}$ – значение числа a по модулю n. Система базисных функций $\mathrm{B}[J_N]=\{\psi_{k,l}^{R}[n],\psi_{k,l}^{I}[n]\}$ ортонормирована на дискретном интервале J_N в смысле вещественного скалярного произведения

$$\langle x[n],y[n]\rangle_R=\mathrm{Re}\left(\langle x[n],y[n]\rangle\right),\quad \langle x[n],y[n]\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,y^*[n].$$

Важно упростить условия ортогональности базиса $\mathrm{B}[J_N]$ и привести их к виду, удобному для использования на практике.

Пусть OFTDM сигнал $s[n]$ передается по гауссовскому каналу с идеальной частотной характеристикой, а его выход описывается уравнением:

$$r[n]=s[n]+w[n],\quad w[n]\sim\mathrm{N}(0,\sigma_w^2), \quad (4)$$

где $w[n]$ – белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_w^2. Оптимальный прием такого сигнала обеспечивается схемой, состоящей из согласованного фильтра с импульсной характеристикой $h_{сф}[n]=s^*[(-n)_N]$ и оператора взятия реальной части комплексного числа $\mathrm{Re}(\cdot)$. Выход данной схемы описывается уравнением:

$$y[n]=\mathrm{Re}\left(r[n]\otimes h_{сф}[n]\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{N-1} r[m]\, s^*[(m-n)_N]\right),$$

где $\otimes$ означает циклическую свертку двух функций.

Отсюда видно, что в момент времени $n=0$ на выходе оптимального приемника формируется реальная часть корреляционной суммы:

$$y[0]=\mathrm{Re}\left(\langle r,s\rangle\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} r[n]\, s^*[n]\right)=\mathrm{Re}\left(r[n]\otimes s^*\left[(-n)_N\right]\Big|_{n=0}\right).$$

Учитывая вид OFTDM сигнала (1), после преобразований получим:

$$y[0]=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1}\left(c_{k,l}^R y_{k,l}^R + c_{k,l}^I y_{k,l}^I\right), \tag{5}$$

$$y_{k,l}^R=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} r[n]\,\psi^{*R}_{k,l}[n]\right)=\mathrm{Re}\left(r[n]\otimes\psi^{*R}_{k,0}\left[(-n)_N\right]\Big|_{n=lM}\right),$$

$$y_{k,l}^I=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} r[n]\,\psi^{*I}_{k,l}[n]\right)=\mathrm{Re}\left(r[n]\otimes\psi^{*I}_{k,0}\left[(-n)_N\right]\Big|_{n=lM}\right).$$

реальные части выходов фильтров, согласованных с базисными функциями (2) и (3) соответственно (СФБИ фильтров).

Таким образом, оптимальный прием OFTDM сигнала может быть осуществлен при помощи банка из $2M$ СФБИ фильтров, реальные выходы которых замеряются в моменты времени, кратные M.

Условия накладываемые на структуру сигнала $s[n]$ в гауссовском канале, при которых на выходе оптимального приемника (5) отсутствуют МСИ и МКИ, принято называть критерием Найквиста.

Очевидно, что сложность структуры OFTDM сигналов не позволяет воспользоваться напрямую критерием Найквиста, сформулированным для модели посимвольной передачи [6]. Однако критерий может быть расширен и на такие сигналы.

Нетрудно убедиться, что в случае модели канала (4) межсимвольная и межканальная интерференция будут отсутствовать, если выполнены условия ортогональности для обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга, т.е.

$$\left\langle\psi_{k,l}^R[n],\psi_{k',l'}^R[n]\right\rangle_R=\delta_{k,k'}\delta_{l,l'},\quad \left\langle\psi_{k,l}^R[n],\psi_{k',l'}^I[n]\right\rangle_R=0,\quad \left\langle\psi_{k,l}^I[n],\psi_{k',l'}^I[n]\right\rangle_R=\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}. \tag{6}$$

Действительно, если условия (6) выполнены, то при $r[n]=s[n]$ (отсутствии шума) сигнал на выходе оптимального приемника (5) не содержит интерференционных составляющих и равен:

$$y[0]=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1}\left(c_{k,l}^R\right)^2+\left(c_{k,l}^I\right)^2=E,$$

где E – энергия OFTDM сигнала. Таким образом, условия (6) описывают критерий Найквиста для OFTDM сигнала.

Воспользовавшись свойствами скалярного произведения, нетрудно доказать следующую лемму, позволяющую записать критерий в более компактном виде:

Лемма 1. Необходимыми и достаточными условиями ортогональности базиса $\mathrm{B}[J_N]$ являются равенства:

$$\left\langle \psi_{k,l}^{R}[n], \psi_{0,0}^{R}[n] \right\rangle_{R} = \delta_{k,0}\delta_{l,0}, \tag{7}$$

$$\left\langle \psi_{k,l}^{R}[n], \psi_{0,0}^{I}[n] \right\rangle_{R} = 0, \forall k \in J_M, \forall l \in J_L. \tag{8}$$

Если учесть конкретный вид базисных функций (2), (3), то лемма 1 позволяет сформулировать критерий Найквиста в следующей форме:

Критерий Найквиста (для OFTDM сигнала)**.** Необходимым и достаточным условием отсутствия МСИ и МКИ в канале (4) с OFTDM сигналом является условие ортогональности базиса $\mathrm{B}[J_N]$, которое сводится к выполнению следующих равенств:

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} g[(n-lM)_N] \exp\left(j\,{}^{2\pi}\!/_{M}\, k(n-\alpha/2)\right) g^*[n] \right) = \delta_{k,0}\delta_{l,0}, \forall k \in J_M, \forall l \in J_L, \tag{9}$$

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} g[(n-lM)_N] \exp\left(j\,{}^{2\pi}\!/_{M}\, k(n-\alpha/2)\right) g^*\left[\left(n+{}^{M}\!/_{2}\right)_N\right] \right) = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим частный случай, когда $g[n]$ является сопряженной N-симметричной функцией:

$$g[n] = g^*\left[(-n)_N\right]. \tag{11}$$

Как было показано в работе [7], этому типу симметрии соответствует оптимальное значение фазового параметра $\alpha = M/2$, позволяющее получить наилучшую частотно-временную локализацию ортогонального базиса (5), (6). Причем, отклонение от оптимально выбранного значения α приводит как к ухудшению локализации базисных функций, так и к потере симметрии [8].

При указанных выше условиях равенство (10) выполняется автоматически, а равенство (9) преобразуется к виду

$$p(l,k) = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] g[(n-lM)_N] \exp\left(j\frac{2\pi kn}{M/2} \right) = \delta_{l,0}\delta_{k,0}, \forall k \in J_{M/2}, \forall l \in J_L. \tag{12}$$

Определим импульс Найквиста для OFTDM сигнала выражением

$$B(\tau,\upsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] g^*\left[(n+\tau)_N\right] \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\upsilon n\right), \tau,\upsilon \in J_N. \tag{13}$$

В отличие от обычного импульса Найквиста [1], функция $B(\tau,\upsilon)$ зависит от двух переменных (времени и частоты) и совпадает по смыслу с дискретной функцией неопределенности

$$B(\tau,\upsilon) = \left\langle g_o[n,m], g_o[(n+\tau)_N, (m+\upsilon)_N] \right\rangle, \tau,\upsilon \in J_N$$

базового импульса $g_o[n,m] = g[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}mn \right), n,m \in J_N$.

Из (12) и (13) следует, что

$$B(Ml, 2Lk) = p(l,k) = \delta_{l,0}\delta_{k,0}, \tag{14}$$

т.е. импульс Найквиста равен нулю во всех точках (τ,υ) частотно-временной плоскости, кратных M и $2L$, соответственно, исключая точку $(\tau,\upsilon) = (0,0)$, где он отличен от нуля.

Таким образом, при $\alpha = M/2$ и выполнении условия сопряженной N-симметрии (11) критерий Найквиста для OFTDM сигнала упрощается и справедлива следующая теорема.

Теорема Найквиста (для OFTDM сигналов)**.** Если формирующий импульс $g[n]$ базиса OFTDM сигнала обладает свойством сопряженной N-симметрии (11), а фазовый параметр выбран оптимально ($\alpha = M/2$), то необходимым и достаточным условием отсутствия МСИ и МКИ в канале (4) является равенство (14), которое во временной области эквивалентно условию

$$\sum_{r=0}^{2L-1} g\left[\left(n - r\,M/2\right)_N\right] g\left[\left(n - r\,M/2 - lM\right)_N\right] = \frac{2}{M}\delta_{l,0},\ \forall n \in J_N, \tag{15}$$

а в частотной области – условию

$$\sum_{k=0}^{M-1} G\left[(p-kL)_N\right] G^*\left[(p-kL-2Ll)_N\right] = M\delta_{l,0},\ \forall p \in J_N, \tag{16}$$

где $G[p] = \sum_{p=0}^{N-1} g[n]\exp\left(-j\,2\pi/N\,pn\right)$ – дискретное преобразование Фурье функции $g[n]$.

Доказательство. Введем функцию $f_1^l[n] = g\left[(n-lM)_N\right] g\left[\left(n+M/2\right)_N\right]$. Она является симметричной на интервале $n \in [0; lM - M/2]$, т.е.

$$f_1^l\left[lM - M/2 - n\right] = g\left[-M/2 - n\right]_N g\left[lM - n\right]_N = g\left[n + M/2\right]_N g\left[n - lM\right]_N = f_1^l[n],$$

а также на интервале $n \in [lM - M/2 + 1; N-1]$, т.к. для любых $p \in \left[1; N-1-lM+M/2\right]$

$$f_1^l[N-p] = g\left[(N-p-lM)_N\right] g\left[\left(N-p+M/2\right)_N\right] =$$

$$= g\left[\left(p+lM-M/2+M/2\right)_N\right] g\left[\left(p+lM-M/2-lM\right)_N\right] = f_1^l\left[p+lM-M/2\right]$$

На этих же интервалах функция $\sin\left(2\pi/M\,k\left(n-\pi/2\right)\right)$ является антисимметричной:

$$\sin\left(2\pi/M\,k\left(lM - M/2 - n - M/4\right)\right) = \sin\left(2\pi/M\,k\left(-n - 3M/4\right)\right) = -\sin\left(2\pi/M\,k\left(n - M/4\right)\right),$$

$$\sin\left(2\pi/M\,k\left(lM - M/2 + p - M/4\right)\right) = \sin\left(2\pi/M\,k\left(p + M/4\right)\right) = -\sin\left(2\pi/M\,k\left(N - p - M/4\right)\right).$$

Поэтому условие (8) ортогональности базиса k, которое можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} j\, f_1^l[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha/2)\right)\right\} = -\sum_{n=0}^{N-1} f_1^l[n]\sin\left(\frac{2\pi}{M}k\left(n-M/4\right)\right) =$$

$$= -\left\{\sum_{n=0}^{lM-M/2} f_1^l[n]\sin\left(\frac{2\pi}{M}k\left(n-M/4\right)\right)\right\} - \left\{\sum_{n=lM-M/2+1}^{N-1} f_1^l[n]\sin\left(\frac{2\pi}{M}k\left(n-M/4\right)\right)\right\} = 0,$$

выполняется автоматически для любых $k \in J_M$ и любых $l \in J_M$, т.к. обе суммы произведений симметричной и антисимметричной функции обращаются в ноль.

Отсюда непосредственно следует, что необходимым и достаточным условием ортогональности базиса $\mathrm{B}[J_N]$ является только условие (7).

Определим следующую вспомогательную функцию

$$f_2^l[n] = g\left[(n-lM)_N\right] g\left[(n)_N\right]. \tag{17}$$

Она является N-периодической и симметричной на интервале $n \in [0; lM]$, т.к.

$$f_2^l[lM-n] = g\left[(-n+lM)_N\right] g\left[(-n)_N\right] = g\left[(n-lM)_N\right] g[n] = f_2^l[n], \tag{18}$$

а также на интервале $n \in [lM+1; N-1]$, т.к. для любого $p \in [1; N-lM-1]$

$$f_2^l[p+lM] = g\left[(p+lM)_N\right] g\left[(p)_N\right] = g\left[(-p-lM)_N\right] g\left[(-p)_N\right] = f_2^l[N-p] \tag{19}$$

Причем, на этих же интервалах симметричность функции $\cos\left(2\pi/M\,k\left(n-M/4\right)\right)$ зависит от четности k:

$$\cos\left(2\pi/M\,k\left(lM-n-M/4\right)\right) = \cos\left(2\pi/M\,k\left(n-M/4\right)+\pi k\right) = (-1)^k\cos\left(2\pi/M\,k\left(n-M/4\right)\right),$$

$$\cos\left(2\pi/M\,k\left(lM+p-M/4\right)\right) = \cos\left(2\pi/M\,k\left(N-p-M/4\right)+\pi k\right) = (-1)^k\cos\left(2\pi/M\,k\left(N-p-M/4\right)\right).$$

Условие (7), которое можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k(n-\alpha/2)\right)\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\cos\left(\frac{2\pi}{M}k\left(n-M/4\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{Ml} f_2^l[n]\cos\left(\frac{2\pi}{M}k\left(n-M/4\right)\right) + \sum_{n=Ml+1}^{N-1} f_2^l[n]\cos\left(\frac{2\pi}{M}k\left(n-M/4\right)\right) = \delta_{l,0}\delta_{k,0},$$

выполняется автоматически для нечетных k, т.к. обе суммы в левой части равенства, очевидно, обращаются в 0.

Остается рассмотреть случай, когда k является четным, т.е. $k = 2m, m \in J_{M/2}$.

Дискретное преобразование Фурье функции $f_2^l[n]$ имеет вид

$$F_2^l[v] = \sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}vn\right), v \in J_N, \tag{20}$$

следовательно

$$F_2^l[2Lm] = \sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}2Lmn\right). \tag{21}$$

Учитывая свойства симметрии (18) и (19) функции $f_2^l[n]$ можно показать, что:

$$F_2^l[-2Lm] = F_2^l[2Lm]. \tag{22}$$

Действительно,

$$F_2^l[-2Lm] = \sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}(-2Lm)n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{lM} f_2^l[lM-n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}2Lmn\right) + \sum_{n=lM+1}^{N-1} f_2^l[N-n+lM]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}2Lmn\right) =$$

$$= \sum_{n'=0}^{lM} f_2^l[n']\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}2Lmn'\right)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}2LmlM\right) +$$

$$+ \sum_{n''=lM+1}^{N-1} f_2^l[n'']\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}2Lmn''\right)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}2Lm(lM+N)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}2Lmn\right) = F_1^l[2Lm],$$

где была использована замена переменных: $n' = lM - n$, $n'' = N - n + lM$.

Для четных $k = 2m$ левая часть условия (7) принимает вид

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}2m\left(n-M/4\right)\right)\right\} = (-1)^m\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\cos\left(\frac{2\pi}{M}2mn\right) =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2}\left(\sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}2mn\right) + \sum_{n=0}^{N-1} f_2^l[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{M}2mn\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2}\left(F_2^l[2Lm] + F_2^l[-2Lm]\right).$$

Учёт равенства (22) приводит к следующему условию ортогональности базиса $\mathrm{B}[J_N]$, являющегося аналогом соотношения (7):

$$F_2^l[2Lm] = F_2^l[-2Lm] = \delta_{l,0}\delta_{m,0}, \forall m \in J_{M/2}; \forall l \in J_L. \tag{23}$$

Принимая во внимание вид функции $f_2^l[n]$ (17) и соотношение (21) для ее преобразования Фурье, получим из равенства (23) следующую форму необходимого и достаточно условия ортогональности базиса Вейля-Гейзенберга:

$$\sum_{n=0}^{N-1} g[n]g[(n-lM)_N]\exp\left(-j\frac{2\pi mn}{M/2}\right) = \delta_{l,0}\delta_{m,0}, \forall m \in J_{M/2}, \forall l \in J_L. \tag{24}$$

Докажем сначала необходимость условия (15) во временной области.

Учитывая выражение (20) для дискретного преобразования Фурье функции $f_2^l[n]$, она может быть представлена в виде

$$f_2^l[n] = \frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1} F_2^l[v]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nv\right).$$

Поэтому, для любого $r \in J_{2L}$

$$f_2^l\left[n - r\, M/2\right] = \frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1} F_2^l[v]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}\left(n - r\, M/2\right)v\right).$$

Произведем в последнем выражении суммирование по r от 0 до $2L-1$ и учтем явный вид функции $f_2^l[n]$ (17)

$$\sum_{r=0}^{2L-1} f_2^l\left[n - r\, M/2\right] = \sum_{r=0}^{2L-1} g\left[\left(n - r\, M/2\right)_N\right] g\left[\left(n - r\, M/2 - lM\right)_N\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1}\exp\left(j\frac{2\pi}{N}vn\right) F_2^l[v]\sum_{r=0}^{2L-1}\exp\left(j\frac{2\pi}{2L}r(-v)\right).$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2L}\sum_{r=0}^{2L-1}\exp\left(j\, 2\pi/2L\, r(-v)\right) = \begin{cases} 1, \text{ при } v \text{ кратных } 2L \\ 0, \text{ для остальных } v \end{cases},$$

а так как $v \in J_N$, то можно заключить, что $\sum_{r=0}^{2L-1}\exp\left(j\, 2\pi/2L\, r(-v)\right)$ отлична от 0 и равняется $2L$ только при $v = 2Lm, m \in J_{M/2}$, поэтому

$$\sum_{r=0}^{2L-1} g\left[\left(n - r\, M/2\right)_N\right] g\left[\left(n - r\, M/2 - lM\right)_N\right] = \frac{2}{M}\sum_{m=0}^{M/2-1}\exp\left(j\frac{4\pi}{M}mn\right) F_2^l[2Lm] \tag{25}$$

Очевидно, что в случае, когда выполняется условие (23), выполняется и равенство (15), которое является необходимым для ортогональности базиса Вейля-Гейзенберга.

Для доказательства достаточности этого условия, заметим, что если оно выполнено, то из соотношения (25) следует:

$$\frac{2}{M}\sum_{m=0}^{M/2-1}\exp\left(j\frac{4\pi}{M}mn\right) F_2^0[2Lm] = 1, \forall m \in J_{M/2}.$$

$$F_2^l[2Lm] = 0, \forall l \in \{1,2,\ldots,L-1\}, \forall m \in J_{M/2},$$

Причем, последнее равенство выполняется только в том случае, когда

$$F_2^0[2Lm] = \delta_{m,0}, \forall m \in J_{M/2},$$

следовательно, полностью выполняется необходимое и достаточное условие ортогональности базиса в виде (23).

Для доказательства необходимости и достаточности условия ортогональности (16) в частотной области, отметим, что условие (24) можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{N-1} g[n]\left(g\left[(n - lM)_N\right]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}2Lmn\right)\right)^* = \delta_{l,0}\delta_{m,0}, \forall l \in J_L, \forall m \in J_{M/2}.$$

Применив равенство Парсеваля, получим

$$\sum_{\kappa=0}^{N-1} G[\kappa]G^*\left[(\kappa - 2Lm)_N\right]\exp\left(-j\frac{2\pi}{L}l\kappa\right) = \delta_{l,0}\delta_{m,0}, \tag{26}$$

где $G[\kappa]$ – дискретное преобразование Фурье функции $g[n]$.

Левую часть условия (26) представим в виде разложение в ряд Фурье некоторой L-периодической функции $\Gamma_m[p]=\sum_{k=0}^{M-1}G[(p+kL)_N]G^*[(p+kL-2Lm)_N]$, $p\in J_L$, поэтому

$$\sum_{p=0}^{L-1}\exp\left(-j\frac{2\pi}{L}pl\right)\Gamma_m[p]=\delta_{l,0}\delta_{m,0}.$$

Очевидно, что при $m\neq 0$ это равенство выполняется только в том случае, если $\Gamma_m[p]=0, \forall p\in J_L$, а при $m=0$, если $\Gamma_m[p]=1/L, \forall p\in J_L$. Таким образом, условие

$$\Gamma_m[p]=\frac{1}{L}\delta_{l,0}, \forall p\in J_L$$

представляет собой необходимое и достаточное условие ортогональности базиса $\mathrm{B}[J_N]$.

Если учесть вид функции $\Gamma_m[p]$ и ее L-периодичность, то мы получим искомый вид условия ортогональности (10) в частотной области для любых $p\in J_N$.

Теорема полностью доказана.

Форма базиса Вейля-Гейзенберега $\mathrm{B}[J_N]$ фактически определяется инициализирующей функцией $g[n]$, поэтому можно упростить алгоритм его синтеза, получив специальные критерии ортогональности, аналогичные (15), в виде условий на эту функцию. Для этого введем базис Винера:

Определение 1 [9]. Совокупность функций $f_0, f_1,\dots,f_{N-1}$ линейного подпространства $V\subset\widetilde{\mathrm{C}}^N$ ($\widetilde{\mathrm{C}}^N$ – пространство N-периодических комплексных функций целочисленного аргумента) называется базисом Винера подпространства V, если для нее справедлив дискретно-периодический аналог теоремы Винера: функции $\{g[\cdot-kN/J]\}_{k=0}^{J-1}$ образуют базис пространства V в том и только том случае, когда $g\in\widetilde{\mathrm{C}}^N$ и представима в виде $g=\sum_{k=0}^{J-1}a_k f_k$, где все a_k отличны от нуля.

Таким образом, существование базиса Винера необходимо и достаточно для существования функции g, чей вектор сдвигов

$$\vec{g}[n]=\left(g[n], g[(n-N/J)_N],\dots, g[(n-(J-1)N/J)_N]\right)^T$$

является базисом подпространства V.

Определение 2. Преобразование, позволяющее перейти от вектора сдвигов к ортогональному базису Винера, называется преобразованием Винера и может быть записано в виде:

$$\eta_k[n]=\sum_{r=0}^{2L-1}g\left[\left(n-r\,{}^{N}\!/_{2L}\right)_N\right]\exp\left(\frac{2\pi j}{2L}rk\right). \tag{27}$$

Обратное преобразование Винера определим следующим образом:

$$g[n]=\frac{1}{2L}\sum_{k=0}^{J-1}\eta_k[n]. \tag{28}$$

Используя (15) и вид преобразования Винера (27), можно показать, что необходимым и достаточным условием ортонормированности обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга $\mathrm{B}[J_N]$ (а следовательно, отсутствия МКИ и МСИ) во временной области является следующее равенство

$$\left|\eta_k^{M/2}[n]\right|^2+\left|\eta_{k+L}^{M/2}[n]\right|^2={}^{4}\!/_{M}. \tag{29}$$

Этот критерий позволяет сформировать эффективную процедуру ортогонализации.

Действительно, возьмем некоторую функцию $g_o[n], n \in J_N$, являющуюся сопряженной N-симметричной. Для получения хорошей локализации ортогонального базиса в качестве $g_o[n]$ следует выбрать функцию Гаусса.

Построим базис Винера в следующем виде:

$$\eta_k^{M/2}[n] = \frac{2\tilde{\eta}_k^{M/2}[n]}{\sqrt{M\left|\tilde{\eta}_k^{M/2}[n]\right|^2 + M\left|\tilde{\eta}_{k-L}^{M/2}[n]\right|^2}}, \qquad (30)$$

где $\tilde{\eta}_k^{M/2}[n] = \sum_{r=0}^{2L-1} g_o\left[\left(n - rM/2\right)_N\right]\exp\left(\frac{2\pi j}{2L}rk\right)$.

Нетрудно проверить, что при непосредственной подстановке выражения (30) в критерий ортогональности (29) мы получим равенство. Отсюда следует, что базис Вейля-Гейзенберга $\mathrm{B}[J_N]$, построенный на основе функции $g[n]$, получаемой обратным преобразованием Винера из базиса $\eta_k^{M/2}[n]$, является ортогональным.

Заметим, что получение элементов базиса Винера (27) на основе функции $g_o[n]$ фактически представляет собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ), для реализации которого разработаны специальные быстрые алгоритмы.

Таким образом, теорема Найквиста является не только удобной формой представления условий отсутствия МКИ и МСИ OFTDM сигналов, но является важным шагом в формировании вычислительно эффективного алгоритма синтеза сигнального базиса, обладающего высоким уровнем частотно-временной локализации.

Литература

1. Прокис, Дж. Цифровая связь [Текст]: пер. с англ. / Дж. Прокис; Под ред. Д.Д. Кловского. – Москва: Радио и связь, 2000.
2. Волчков, В. П. Сигнальные базисы с хорошей частотно-временной локализацией [Текст] / В. П. Волчков // Журнал «Электросвязь». – 2007. – №2. – С. 21-25.
3. Haas, R. A time-frequency well-localized pulse for multiple carrier transmission [Текст] / R. Haas, J.C. Belfiore // Wireless Personal Communications. – 1997. – vol. 5. – pp. 1-18.
4. Muschallik, C. Improving an OFDM reception using an adaptive Nyquist windowing [Текст] // *IEEE Transactions on Consumer Electronics. – 1996.* – vol. 42. – no. 3. – pp. 259 – 269.
5. Mallet, S. A Wavelet Tour of Signal Processing [Текст]: Second Edition / S. Mallet. – Academic Press. – 1999.
6. Волчков, В.П., Петров Д.А. Обобщенная теорема Найквиста для OFTDM сигналов [Текст]/ В.П. Волчков, Д.А. Петров // Сборник докладов. Всероссийский научно-технический семинар «Системы синхронизации формирования и обработки сигналов для связи и вещания». – 2009. – Воронеж. – С. 28-32.
7. Волчков, В.П. Оптимизация ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга для цифровых систем связи, использующих принцип OFDM/OQAM передачи [Текст] / В.П. Волчков, Д.А. Петров // Научные ведомости БелГУ. Серия «История. Политология. Экономика. Информатика». – 2009. – №1(56). – Вып. 9/1. – С.102-110.
8. Volchkov, V.P. Orthogonal Well-Localized Weyl-Heisenberg Basis Construction and Optimization for Multicarrier Digital Communication Systems [Электронный ресурс] / V.P. Volchkov, D. A. Petrov // International Conference on Ultra Modern Telecommunications (ICUMT 2009). – Oct 12-14, 2009. – St. Petersburgh, Russia. – ISBN: 978-1-4244-3941-6. – IEEE Catalog Number: CFP0963G-CDR (http://ieeexplore.ieee.org)
9. Петухов А.П. Периодические дискретные всплески [Текст] / А.П. Петухов // Алгебра и анализ. – 1996. – Вып. 8. – №3. – С. 151-183.

GENERALIZED WEYL-HEYSENBEG BASES ORTHOGONALITY CONDITIONS FOR OFTDM SYGNALS

V. P. VOLCHKOV [1]
D. A. PETROV [2]

[1] *Moscow technical university of telecommunications and informatics*

e-mail: volchkovvalery@mail.ru

[2] *M.V. Lomonosov Moscow state university*

e-mail: dapetroff@gmail.com

Article considers information transmission technology with orthogonal time-frequency multiplexing (OFTDM). OFTDM signal is formed by generalized well-localized Weyl-Heisenberg basis. Special orthogonality conditions are derived for this basis in the form of Nyquist criterion and theorem. These conditions grantee the absence of intercarrier and intersymbol interference in Gaussian channels. In addition they allow to formulate computationally efficient orthogonalization algorithm on the base of fast Fourier transform.

Key words: OFTDM, Nyquist theorem, orthogonalization.