УДК 539.2

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КАСКАДНОЙ ТЕОРИИ ФРАГМЕНТАЦИИ ПРИ НАРУШЕНИИ САМОПОДОБИЯ ДРОБЛЕНИЯ

Р.Е. Бродский

Институт монокристаллов НАН Украины, 61001, Харьков, Украина

В работе изучен процесс каскадной кинетической фрагментации в случае, когда условная плотность вероятности образования осколков не зависит от времени и обладает свойством $P(\rho,r,t)=P(\rho/r)$. Получено уравнение для предельной при $t\to\infty$ плотности распределения вероятности числа фрагментов в терминах преобразования Меллина. В частном случае $P(\rho/r)=C(\rho/r)^{\alpha}$ найдено решение этого уравнения, которое отличается от закона Колмогорова.

Ключевые слова: фрагментация, самоподобие, кинетическое уравнение, финальная плотность распределения.

В настоящей работе исследуется каскадный процесс фрагментации образца материала. Этот процесс является частным случаем каскадных кинетических процессов, изучаемых в различных областях теоретической физики (см., например, [1]). Несмотря на то, что каскадный тип фрагментации является простейшим, и более распространённой в природе является фрагментация, которая не носит каскадный характер, тем не менее, этот тип процессов не является полностью изученным. В частности, не изучен процесс каскадной фрагментации, который не является полностью масштабно инвариантным, в отличие от рассмотренного в классической работе [2]. В настоящем сообщении изучается не масштабно инвариантный процесс фрагментации, аналогичный введённому в работе [3].

Мы описываем процесс фрагментации материала посредством плотности числа частиц $n(r,t)$. Величина $n(r,t)dr$ указывает среднее число фрагментов, имеющих размеры в интервале $(r,r+dr)$ в момент времени t. Процесс фрагментации полностью определяется условной плотностью вероятности $P(\rho,r,t)$ образования осколков фрагментов. А именно, вероятность образования осколка с размером в интервале $(\rho,\rho+d\rho)$ за интервал времени $(t,t+dt)$ при распаде фрагмента размера r равна $P(\rho,r,t)d\rho dt$. Введём также интенсивность распадов фрагментов $\mu(r,t)$ – среднее число распадов фрагментов с размером r в интервале времени $(t,t+dt)$. Эволюция плотности $n(r,t)$ описывается, в терминах указанных величин, на основе кинетического уравнения

$$\dot{n}(r,t)=\int_r^{\infty}P(r,\rho,t)n(\rho,t)d\rho-\mu(r,t)n(r,t). \tag{1}$$

В статье [4], следуя идее пионерской работы [2], исследовался масштабно инвариантный процесс дробления, у которого вероятность $P(\rho/r)d\rho/r$ образования осколков с размерами в интервале $(\rho,\rho+d\rho)$ из фрагмента с размером r зависит от отношения ρ/r. Соответственно, плотность условной вероятности перехода имеет вид

$$P(\rho,r,t)=\frac{1}{r}P(\rho/r).$$

В данной работе, как и в работе [3], будет рассмотрен процесс дробления с нарушением масштабной инвариантности, которая предполагает наличие выделенного физического масштаба

$$P(\rho,r,t)=P(\rho/r) \tag{2}$$

в том смысле, что плотность $P(\rho,r,t)$ приобретает размерность обратной длины и, благодаря чему, в теории имеется выделенная величина размерности длины. Следуя работам [3-5], будем учитывать сохранение объёма системы фрагментов

$$V=\int_0^\infty r^3 n(r,t)dr=\text{const}. \tag{3}$$

Это свойство приводит к следующему соотношению для интенсивности

$$\mu(r,t)=\int_0^r P(\rho/r)\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 d\rho = r\int_0^1 P(x)x^3dx \equiv \mu r, \quad \mu=\text{const}. \tag{4}$$

Таким образом, мы рассматриваем следующее кинетическое уравнение для плотности числа частиц

$$\dot{n}(r,t)=\int_r^\infty P(r/\rho)n(\rho,t)d\rho-\mu r n(r,t). \tag{5}$$

Формула (2) позволяет использовать, для изучения уравнения (5), преобразование Меллина

$$M(s,t)=\int_0^\infty r^{s-1}n(r,t)dr.$$

В этом случае $M(1,t)=N(t)$ – число фрагментов в момент времени t; $M(2,t)=N(t)\lambda(t)$, где $\lambda(t)$ – средний размер фрагмента; $M(3,t)=S(t)$ – суммарная площадь поверхности фрагментов; $M(4,t)=V=const$ – суммарный объём фрагментов. Применение преобразования Меллина к обоим частям уравнения (5) приводит к уравнению

$$\dot{M}(s,t)=M(s+1,t)(p(s)-\mu), \tag{6}$$

где $p(s)=\int_0^1 x^{s-1}P(x)dx$ и $\mu=p(4)$, согласно (4). В частности, так как $M(4,t)=V=const$, то

$$M(3,t)=M(3,0)+V(p(3)-p(4))t. \tag{7}$$

Нас будет интересовать асимптотическое поведение при $t\to\infty$ плотности распределения $f(r,t)$. В этом случае можно оставить в последнем выражении только второе слагаемое, $M(3,t)\propto V(p(2)-p(4))t$ $M(3,t)\sqsupset V(p(3)-p(4))t$. Из уравнений (6) и (7) находим

$$M(2,t)\propto\frac{1}{2}V(p(3)-p(4))(p(2)-p(4))t^2=N(t)\lambda(t), \tag{8}$$

$$M(1,t)\propto\frac{1}{6}V(p(3)-p(4))(p(2)-p(4))(p(1)-p(4))t^3=N(t). \tag{9}$$

Отсюда следует

$$\lambda(t)\propto\frac{M(2,t)}{M(1,t)}=\frac{3}{p(1)-p(4)}\frac{1}{t} \tag{10}$$

Решение дифференциально-разностного уравнения (6) представляется чрезвычайно сложным в общем случае. Однако, для плотности распределения вероятности $f(r,t)=n(r,t)/N(t)$ фрагментов по размерам, в которой переменная r заменена на $\lambda(t)r$, где $\lambda(t)$ – средний размер, анализ этого уравнения значительно упрощается.

Обозначим посредством $F(s,t)$ преобразование Меллина

$$F(s,t)=\lambda^{s}(t)\int_{0}^{\infty}r^{s-1}f(\lambda(t)r,t)dr.$$

плотности распределения $\lambda(t)f(\lambda(t)r,t)$. Вводя замену переменных $r\Rightarrow\lambda(t)r$ в уравнении (5) и вычисляя указанное преобразование Меллина, получим

$$\dot{F}(s,t)=-F(s,t)\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{N}{\lambda}\right)-\frac{s}{\lambda}F(s,t)\dot{\lambda}+(p(s)\lambda-\mu\lambda)F(s+1,t). \qquad (11)$$

Плотность распределения $\lambda(t)f(\lambda(t)r,t)$ и, соответственно, её преобразование Меллина $F(s,t)$ стремятся $\lambda(t)f(\lambda(t)r,t)\to f_{\infty}(r)$, $F(s,t)\to F(s)$ при $t\to\infty$ к нетривиальным предельным значениям ($\neq 0;\infty$). При этом $\dot{F}(s,t)\to 0,\quad t\to\infty$. Поэтому, при асимптотически больших значениях t, уравнение (11) принимает вид

$$0=-F(s)\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{N}{\lambda}\right)+\lambda(p(s)-\mu)F(s+1)-\dot{\lambda}\frac{s}{\lambda}F(s). \qquad (12)$$

Найдём предельную плотность распределения $f_{\infty}(r)$ для модельной зависимости $P(x)$:

$$P(\rho/r)=C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha}. \qquad (13)$$

В этом случае имеем выражения

$$p(s)=\frac{C}{\alpha+s},\quad \mu=p(4)=\frac{C}{\alpha+4}.$$

Таким образом, суммарная площадь и средний размер определяются формулами

$$S(t)\propto\frac{CV}{(\alpha+3)(\alpha+4)}t, \qquad (14)$$

$$\lambda(t)\propto\frac{(\alpha+1)(\alpha+4)}{C}t^{-1}, \qquad (15)$$

а полное число фрагментов

$$N(t)\propto\frac{C^{3}V}{(\alpha+4)^{3}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}t^{3}.$$

Используя (13), преобразуем уравнение (12) как

$$F(s+1)=\frac{\alpha+s}{\alpha+1}F(s).$$

Решением этого функционального уравнения, удовлетворяющим условию нормировки $F(1,t)=1$, является

$$F(s)=\frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)^{s-1}}.$$

Вычисляя обратное преобразование Меллина, находим предельную плотность распределения по размерам

$$f_{\infty}(r)=\frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}r^{\alpha}e^{-(\alpha+1)r}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

что находится в согласии с результатом работы [3], полученным в случае, когда α – целое число, однако существенно отличается от логарифмически нормального закона Колмогорова.

Литература

1. Bharucha-Reid A.T., Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, 1960. 510p.
2. Колмогоров А.Н. // ДАН СССР. 1941. Т. XXXI. №2. С.99-101.
3. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. // Functional Materials. 2003. V.10. N.3. P.378-387.
4. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. // Functional Materials. 2006. V.13. N.1. P.2-13.
5. Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В. // ДАН СССР. 1987. Т. 294. №5. С.1105-1110.

INVESTIGATION OF THE KINETIC EQUATION OF CASCADE FRAGMENTATION THEORY AT THE BREAKING DOWN OF SELF-CONSISTENT SUBDIVISION

Brodskii R.Ye.

Single Crystal Institute NASU, 61001, Kharkov, Ukraine

The cascsde kinetic fragmentation process is investigated when the condition probability density of splinter forming do not depends on time and has the prorerty $P(\rho, r, t) = P(\rho / r)$. It is obtained the equation for the probability distribution density in terms of the Mellin transformation. In the particular case $P(\rho / r) = C(\rho / r)^{\alpha}$, at the limit in $t \to \infty$, the solution of this equation is found that is differs from the Kolmogorov law.

Key words: fragmentation, self-similarity, kinetic equation, final distribution density