УДК 517.927

ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОДНОМЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ

В. Л. ПРЯДИЕВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Pryadiev@bsu.edu.ru

Для волнового уравнения на одномерной пространственной сети доказывается аналог правила параллелограмма. На основании этого аналога для случая рационально соизмеримых длин ветвей строится точная численная схема решения начально-краевой задачи. Краевые условия при этом - 1-го и/или 2-го рода.

Ключевые слова: волновое уравнение на одномерной пространственной сети, правило параллелограмма, начально-краевая задача, численная схема.

Введение

Правило параллелограмма (см., например, [1]) для волнового уравнения

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

гласит, что если A, B, C, D - последовательные вершины прямоугольника со сторонами на характеристиках уравнения (1.1), то

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D). \tag{1.2}$$

Причём верно и обратное: если дважды дифференцируемая функция u такова, что для любой четвёрки последовательных вершин A, B, C, D прямоугольника со сторонами на характеристиках уравнения (1.1) выполнено (1.2), то u есть решение волнового уравнения (1.1). Свойство (1.2) можно положить (см., например, [1]) в основу точной[1] численной схемы решения начально-краевой задачи для уравнения (1.1).

В настоящей работе доказывается аналог свойства (1.2) для случая, когда x в (1.1) пробегает не $\mathbb{R}$, а одномерную пространственную сеть[2].

2. Одномерная пространственная сеть

Пусть $\mathcal{N}$ – одномерная пространственная сеть, причём конечная и ограниченная. Не уменьшая общности можно считать, что $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i$, где γ_i – непрерывные кривые без внутренних самопересечений, причём $i \neq j \Rightarrow \gamma_i \cap \gamma_j = \partial\gamma_i \cap \partial\gamma_j$; здесь $\partial\gamma_k$ обозначает множество концов γ_k. Кривые γ_i будем называть ветвями $\mathcal{N}$. Говоря, что γ_i – кривая, мы имеем ввиду, что $\gamma_i := \{\pi_i(\xi) \mid \ell_i \xi m_i\}$, где ℓ_i,

---

[1]Точной в том смысле, что равенство (2) для решения уравнения (1) -- *точное*, а не *приближённое*.

[2]Этот аналог был получен автором совместно с Шаталовым С. С. -- см. [2].

m_l – некоторые вещественные числа, $\ell_l < m_l$, $\pi_l: [\ell_l; m_l] \to \mathbb{R}^n$, π_l – непрерывна. Отсутствие внутренних самопересечений у γ_l означает, что

$$[(\ell_l \leq \xi_1 < \xi_2 \leq m_l) \wedge (\xi_2 - \xi_1 < m_l - \ell_l)] \Rightarrow [\pi_l(\xi_1) \neq \pi_l(\xi_2)].$$

Точки из $\{\pi_l(\ell_l), \pi_l(m_l)\}$, и только их, мы называем концами γ_l. Параметризации π_l ветвей $\mathcal{N}$ далее фиксируются.

Всюду далее предполагается связность $\mathcal{N}$.

Элементы из $V := \bigcup_{l=1}^{m} \partial\gamma_l$ будем называть узлами сети. Во множестве узлов $\mathcal{N}$ выделим подмножество D так, чтобы $\mathcal{N} \setminus D$ оставалось связным. Узлы из D будем называть закреплёнными, а узлы из $V \setminus D$ – свободными[1].

3. Дифференцирование функций, заданных на одномерной пространственной сети

Пусть теперь функция y определена на $\mathcal{N}$ или на $\mathcal{N} \setminus V$, и пусть $x \in \mathcal{N} \setminus V$. Производную $(y(8,8)(3,3)3\pi_l)'(\pi_l^{-1}(x))$, где i определяется включением $x \in \gamma_l$, будем обозначать через $y'(x)$ и будем называть производной функции y в точке x. Если $u = u(x,t)$, где x пробегает $\mathcal{N}$ или $\mathcal{N} \setminus V$, t пробегает промежуток вещественной оси, то через u_x (или $u_x(x,t)$) будем обозначать производную функции u по первому аргументу, т. е. производную функции $u(\,\cdot\,, t)$. Производную по второму аргументу будем обозначать аналогично: u_t или $u_t(x,t)$.

Пусть теперь γ_l^1 и γ_l^2 – половинки γ_l, т. е. $\gamma_l^1 := \{\pi_l(\xi) \mid \ell_l \leq \xi \leq (\ell_l + m_l)/2\}$, $\gamma_l^2 := \{\pi_l(\xi) \mid (\ell_l + m_l)/2 \leq \xi \leq m_l\}$. Ясно, что каждая половинка ветви содержит ровно один узел $\mathcal{N}$. Для каждого узла $x \in V$ через $\mathcal{E}(x)$ обозначим множество всех половинок ветвей, содержащих x. Пусть теперь $x \in V$, $h \in \mathcal{E}(x)$, а функция y определена в точках множества h. Если $x_1 \in h \in \mathcal{E}(x)$, то производную функции y в точке x_1 вдоль h в направлении от x будем обозначать через $y'_h(x_1)$, т. е.

$$y'_h(x_1) := \begin{cases} (y(8,8)(3,3)3\pi_l)'(\pi_l^{-1}(x_1)), \text{если} h = \gamma_l^1 \\ -(y(8,8)(3,3)3\pi_l)'(\pi_l^{-1}(x_1)), \text{если} h = \gamma_l^2 \end{cases}.$$

Аналогично будет пониматься символ $u'_h(x_1, t)$ для $u: H \times I \to \mathbb{R}$, где $H \supseteq h$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Наконец, $y''_{hh} := (y'_h)_h$ и $u''_{hh}(\,\cdot\,, t) := (u'_h)_h(\,\cdot\,, t)$.

4. Волновое уравнение на одномерной пространственной сети

Далее мы будем рассматривать волновое уравнение

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \mathcal{N} \setminus V,\ t \in \operatorname{int} I) \tag{4.1}$$

при условиях трансмиссии

$$\textstyle\sum_{h \in \mathcal{E}(x)} u'_h(x,t) = 0 \quad (x \in V \setminus D,\ t \in I), \tag{4.2}$$

где I – некоторый промежуток вещественной оси. Систему (4.1)–(4.2) будем называть волновым уравнением на сети $\mathcal{N}$.

[1] Эти термины продиктованы тем, что в точках из D мы будем задавать далее условия Дирихле -- для функций, определённых на $\mathcal{N}$.

Замечание. Чтобы оправдать этот термин, заметим: если $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^1$, то условие (4.2), в предположении, что классическое решение системы (4.1)–(4.2) существует, влечёт выполнение уравнения $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ при $x \in V$.

5. Правило параллелограмма в случае одномерной пространственной сети

Пусть $x_0 \in \mathcal{N} \setminus D$ и $t_0 \in \operatorname{int} I$. Договоримся далее: если $x_0 \in \mathcal{N} \setminus V$ и $x_0 \in \gamma_l$, то $\gamma_l^1(x_0) := \{\pi_l(\xi) \mid \ell_l < \pi_l^{-1}(x_0)\}$, $\gamma_l^2(x_0) := \{\pi_l(\xi) \mid \pi_l^{-1}(x_0) < m_l\}$; множество $\{\gamma_l^1(x_0), \gamma_l^2(x_0)\}$ будем обозначать при этом через $\mathcal{E}(x_0)$. Положим:

$$\operatorname{dist}(x_0, V \setminus \{x_0\}) :=$$
$$:= \begin{cases} \min\{m_j - \ell_j \mid \gamma_j \ni x_0\}, \text{если} x_0 \in V \\ \min\{m_l - \pi_l^{-1}(x_0); \pi_l^{-1}(x_0) - \ell_l\}, \text{если} x_0 \in \mathcal{N} \setminus V \text{и} x_0 \in \gamma_l \end{cases}$$

(в этом определении мы допускаем и случай $x_0 \in D$). Скажем, что $\Delta > 0$ допустимо в точке (x_0, t_0), если $\Delta < \operatorname{dist}(x_0, V \setminus \{x_0\})$ и $(t_0 \pm \Delta) \in I$. Для Δ, допустимого в точке (x_0, t_0), определим точки $B_h(x_0, t_0, \Delta)$, $h \in \mathcal{E}(x_0)$, следующим образом: если $x_0 \in V \setminus D$, то

$$B_h(x_0, t_0, \Delta) := \begin{cases} (\pi_l(\ell_l + \Delta), t_0), \text{если} h = \gamma_l^1 \\ (\pi_l(m_l - \Delta), t_0), \text{если} h = \gamma_l^2 \end{cases},$$

а если $x_0 \in \mathcal{N} \setminus V$, то

$$B_h(x_0, t_0, \Delta) := \begin{cases} (\pi_l(\pi_l^{-1}(x_0) - \Delta), t_0), \text{если} h = \gamma_l^1(x_0) \\ (\pi_l(\pi_l^{-1}(x_0) + \Delta), t_0), \text{если} h = \gamma_l^2(x_0) \end{cases}.$$

Лемма. *Пусть $x_0 \in \mathcal{N} \setminus D$, $t_0 \in \operatorname{int} I$, а число Δ допустимо для точки (x_0, t_0). Тогда любое решение волнового уравнения (4.1)–(4.2) удовлетворяет равенству:*

$$\frac{1}{2}[u(x_0, t_0 - \Delta) + u(x_0, t_0 + \Delta)] = \frac{1}{|\mathcal{E}(x_0)|} \sum_{h \in \mathcal{E}(x_0)} u(B_h(x_0, t_0, \Delta)). \quad (5.1)$$

Верно и обратное: если функция $u: \mathcal{N} \times I \to \mathbb{R}$ удовлетворяет функциональному уравнению (5.1), причём для любой $t_0 \in \operatorname{int} I$ определены $u_{tt}(\cdot, t_0)$ (на $\mathcal{N}$) и $u_{xx}(\cdot, t_0)$ (на $\mathcal{N} \setminus V$), и $u_{tt}(\cdot, t_0)$ непрерывна на $\mathcal{N}$, то u есть решение уравнения (4.1)–(4.2).

Замечание. Точки $B_h(x_0, t_0, \Delta)$, $h \in \mathcal{E}(x_0)$, есть точки пересечения характеристик волнового уравнения (4.1), проходящих через $(x_0, t_0 - \Delta)$ и $(x_0, t_0 + \Delta)$. Поэтому равенство (5.1) и есть аналог правила параллелограмма для волнового уравнения (1.1).

Доказательство леммы начнём с первой её части. При этом достаточно ограничиться случаем $x_0 \in V \setminus D$. Пусть $\Delta_{\max}$ – максимум чисел Δ, допустимых в точке (x_0, t_0). Функция

$$v(\xi, \tau) := \frac{1}{|\mathcal{E}(x_0)|} \sum_{h \in \mathcal{E}(x_0)} u(B_h(x_0, \tau, \xi))$$

является решением волнового уравнения на треугольнике

$$\{(\xi,\tau) \mid 0 < \xi < \Delta_{\max}, |\tau - t_0| < \Delta_{\max} - \xi\},$$

удовлетворяя при этом краевому условию второго рода: $v_\xi(0,\tau) = 0$. Поэтому, в силу правила параллелограмма для уравнения (1.1),

$$2v(\widetilde{\Delta}, t_0) = v(0, t_0 - \widetilde{\Delta}) + v(0, t_0 + \widetilde{\Delta}),$$

для всех $\widetilde{\Delta} \in (0;\Delta)$, где Δ – по-прежнему, некоторое допустимое в точке (x_0,t_0) число. Отсюда, предельным переходом при $\widetilde{\Delta} \to \Delta -$, и получаем (5.1).

Докажем вторую часть леммы. Поскольку случай $x_0 \in \mathcal{N}\backslash V$ совпадает с классическим (и влечёт сразу же (4.1)), то достаточно рассмотреть только случай, когда $x_0 \in V\backslash D$. Вычитая $u(x_0,t_0)$ из обеих частей равенства (5.1), получим:

$$\frac{1}{2}[u(x_0,t_0-\Delta) - u(x_0,t_0) + u(x_0,t_0+\Delta) - u(x_0,t_0)] =$$
$$= \frac{1}{|\mathcal{E}(x_0)|}\sum_{h\in\mathcal{E}(x_0)} [u(B_h(x_0,t_0,\Delta)) - u(x_0,t_0)].$$

Поделив это равенство на Δ и устремив Δ к 0, получим (4.2).

Лемма доказана.

Из этой леммы очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $(m_i - \ell_i)/(m_j - \ell_j) \in \mathbb{Q}$ *для любых* i *и* j. *Пусть* $\Delta > 0$ *таково, что* $(m_i - \ell_i) \in \Delta\mathbb{N}$ *для любого* i. *Пусть* M *– равномерная сетка с шагом* Δ *на* $\mathcal{N} \times I$, *содержащая точки с абсциссами из* V, *т. е.*

$$M := (\mathcal{N} \times I) \cap (X_\Delta \times (t_1 + \Delta\mathbb{Z})),$$

где $X_\Delta := \{x \in \mathcal{N} \mid dist(x, V\backslash\{x\}) \in \Delta\mathbb{N}\}$, *а* t_1 *– некоторая точка из* I. *Обозначим:*

$$\partial M := \{(x,t) \in M \mid x \in D \ \vee \ (t+\Delta) \not\in I \ \vee \ (t-\Delta) \not\in I\}.$$

Пусть u *– решение уравнения (4.1)–(4.2). Тогда для любой точки* (x_0,t_0) *из* $M\backslash\partial M$ *выполнено (5.1).*

Следствие. *Пусть в условиях теоремы* $I = [0;+\infty)$, $t_1 = 0$ *и*

$$u(x,t) = 0 \quad (x \in D,\ t[illegible]).$$

Тогда для любой $(x_0,t_0) \in M\backslash\partial M$ *выполнено (5.1), причём для любой* $x \in X_\Delta\backslash D$ *выполнено*

$$u(x,\Delta) = \frac{1}{|\mathcal{E}(x)|}\sum_{h\in\mathcal{E}(x)} \left[u(B_h(x,0,\Delta)) + \int_0^\Delta u_t(B_h(x,0+,s))\,ds\right]. \qquad (5.2)$$

Доказательство.

В силу теоремы достаточно обосновать лишь (5.2). Но (5.2) следует из аналога формулы Даламбера для (4.1)–(4.2), доказанного, например, в [3][1].

---

[1]Для $D \neq \emptyset$ этот аналог доказан в [4] (см. также [5] -- перевод [4] на английский язык).

Таким образом, если $u(\cdot\ ,0)$, $u_t(\cdot\ ,0)$ и $u(x,\cdot)$ $(x \in D)$ заданы, то спомощью (5.2) мы можем найти $u(x,\Delta)$ при $x \in X_\Delta$, а затем, с помощью (5.1), шаг за шагом найти $u(x,2\Delta)$, $u(x,3\Delta)$, … – при $x \in X_\Delta$.

Замечание. В полученном следствии можно считать охваченным случай, когда в некоторых точках из D заданы краевые условия не первого рода, а второго:

$$u'_h(x,t) = 0 \quad (x \in D_1,\ h \in \mathcal{E}(x),\ t\square),$$

где D_1 – некоторое подмножество D, такое, что $x \in D_1 \Rightarrow |\mathcal{E}(x)| = 1$. Действительно, достаточно точки из D_1 объявить свободными узлами пространственной сети $\mathcal{N}$, и мы окажемся в условиях следствия.

Список литературы:

1. John F. Partial differential equations. - N.-Y., Heidelberg, Berlin: Springer Verlag. - 1982. - 251 p.
2. Прядиев В. Л., Шаталов С. С. Правило параллелограмма для волновых уравнений на сетях. Визуализация решений// Современные методы теории функций и смеж-ные проблемы: Матер. конф. - Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. - С. 206-207.
3. Прядиев В. Л., Фадеева Л. Г. Представление решения волнового уравнения на неограниченном геометрическом графе без граничных вершин// Совершенствование преподавания физико-математических и общетехнических дисциплин в педвузе и школе : Сб. науч. тр. - Вып. 4. - Борисоглебск: Борисоглебский гос. пед. ин-т, 2007. - С. 39-53.
4. Прядиев В. Л. Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравне-ния на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Современная математика и её приложения. Т. 38. Тр. междун. конф. по динамическим системам и дифференциальным уравнениям, Суздаль, 5-10 июля 2004 г. Часть 3. - Тбилиси: Ин-т Академии наук Грузии, 2006. - С. 82-94.
5. Pryadiev V. L. Description of solutions to the initial-boundary-value problem for a wave equation on a one-dimensional spatial network in terms of the Green function of the corresponding boundary-value problem for an ordinary differential equation// J. of Math. Sci. - 2007. - V. 147, № 1. - P. 6470-6482.

PARALLELOGRAM RULE FOR WAVE EQUATION ON ONE-DIMENSIONAL SPATIAL NETWORK

V.L. PRYADIEV

Belgorod State University

e-mail: pryadiev@bsu.edu.ru

For the wave equation on one-dimensional spatial network an analogue of the parallelogram rule is proved. On the basis of this analogue for a case of rationally commensurable lengths of branches the exact numerical circuit of the decision of a initial-boundary problem is constructed. Boundary conditions thus is 1-st and/or 2-nd kinds.

Key words: wave equation on one-dimensional spatial network, parallelogram rule, initial-boundary problem, numerical circuit