УДК 517, 517.9

К СВОЙСТВАМ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.З. МЕШКОВ, И.П. ПОЛОВИНКИН

Воронежский государственный университет

e-mail: polovinkin@yandex.ru

В рамках символического подхода к формулам средних значений предложен способ получения новых формул среднего значения для гармонических функций.

Ключевые слова: теорема о среднем, гармонические функции, дифференциальные уравнения.

Введение

Настоящая работа посвящена формулам среднего значения для решений линейных уравнений в частных производных, прежде всего, для уравнения Лапласа. В разных разделах и прикладных задачах под понятиями "формула среднего", "теорема о среднем" часто подразумевают несколько разнородные факты. Так или иначе, многообразные результаты для различных типов уравнений объединяет то, что в них участвует среднее (возможно, с весом) достаточно гладкой функции по некоторому множеству, чаще всего по сфере.

Теоремы о среднем для эллиптических уравнений наиболее широко известны. Базовым для использования в приложениях является следующий классическая теорема о среднем (см., напр.,[1]), восходящая к Гауссу: для того, чтобы непрерывная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция $u(x)$ была гармонической в Ω, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $x \in \Omega$ и всякого значения $r > 0$, такого, что замыкание шара $B(x,r) = \{\xi \in \mathbb{R}^n\colon |\xi - x| < r\}$ вложено в Ω, ее значение в точке x равнялось среднему по границе шара (по шару). Этот факт обобщается на эллиптические уравнения второго порядка. В работах В.А. Ильина и Е.И. Моисеева (см. [2] – [7]) устанавливались формулы среднего для эллиптических операторов более общего вида. Эти формулы использовались авторами при изучении вопросов, связанных со спектральным разложением по собственным функциям эллиптических операторов. Кроме того, теорема о среднем указанного типа переносится и на римановы многообразия (см. [8], [11]).

1. Понятие сопровождающего распределения оператора

Следуя [9], будем через K обозначать пространство финитных основных функций переменных $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, через S – пространство Шварца быстро убывающих основных функций, через K', S' – соответствующие двойственные пространства распределений.

Через $\hat{f}$ будем обозначать преобразование Фурье распределения $f \in S$. Этим же символом $\hat{f}(w)$ мы будем пользоваться и для обозначения преобразования Фурье - Лапласа распределения f с компактным носителем, представляющего собой в этом случае целую аналитическую функцию комплексной переменной $w \in \mathbb{C}^n$(см. [10]). Далее, пусть

$$D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 1,\dots,n,\ D = (D_1,\dots,D_n),\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}.$$

Всюду далее в этой работе предполагается, что мультииндекс α имеет неотрицательные целые координаты. Через $S_R(x_0)$ мы обозначаем сферу в $\mathbb{R}^n$, через $|S_n|$ – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Через $\delta(x-x_0)$ обозначается мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0, через $\delta_{S_R(x_0)}(x)$ – мера Дирака, сосредоточенная на сфере $S_R(x_0)$.

Предлагаемый в настоящей работе подход к теоремам о среднем значении можно выразить следующим образом. Тот или иной факт, затрагивающий средние значения решения линейного однородного дифференциального уравнения, мы связываем с существованием некоторого специально подобранного распределения, действие которого на решения уравнения равно нулю. Более точно, примем следующее определение.

Пусть $P(w)$ однородный многочлен порядка m. Рассмотрим уравнение

$$P(D)u = 0. \tag{1.1}$$

Определение 1. *Распределение Φ с компактным носителем назовем сопровождающим уравнение (1.1), если для любого решения $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство*

$$\langle \Phi, u\rangle = 0. \tag{1.2}$$

Будем также в этом случае называть распределение Φ сопровождающим оператор $P(D)$ или, короче, сопровождением оператора $P(D)$ и уравнения (1.1).

Отметим сразу же, что для любого многочлена $P(D)$ существуют тривиальные сопровождающие распределения вида $Q(D)P(D)\delta(x-x_0)$, где $\delta(x-x_0)$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0, $Q(D)$ – произвольный многочлен. Между тем теорема о среднем для бесконечно дифференцируемых решений эквивалентна существованию некоторого нетривиального сопровождающего распределения.

Пример 1. Для уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.3}$$

имеет место следующее утверждение (теорема о среднем, или одномерный принцип Асгейрсона): для того, чтобы функция $u(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ являлась решением уравнения (1.3), необходимо и достаточно, чтобы для каждого прямоугольника, образованного прямыми $x \pm y = const$, выполнялось равенство

$$u(M_1) + u(M_3) - u(M_2) - u(M_4) = 0, \tag{1.4}$$

где $M_k = (x_k, y_k)(k = 1,2,3,4)$ суть последовательно пронумерованные вершины этого прямоугольника.

Подвергнув решение уравнения (1.3) более жесткому требованию $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, нетрудно заметить, что необходимость равенства (1.4) эквивалентна утверждению о том, что распределение

$$\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1}\delta(M - M_k), \tag{1.5}$$

где $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, является сопровождающим для уравнения (1.3).

Пример 2. Теорема о среднем для уравнения Лапласа имеет следующий вид: Для того, чтобы функция $u \in C(\mathbb{R}^n)$ являлась решением уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $R > 0$ и для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ имело место равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} u(x)\, dS_x, \tag{1.7}$$

где dS_x – элемент площади поверхности сферы $S_R(x_0)$ с центром в точке x_0 и радиусом R.

Отсюда непосредственно вытекает, что распределение

$$\delta(x - x_0) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \delta_{S_R(x_0)}(x) \tag{1.8}$$

является сопровождающим для оператора Лапласа Δ.

Приведенных примеров достаточно, чтобы составить представление о предлагаемом здесь подходе к теоремам о среднем, связанном с сопровождающими распределениями, изучению которых мы уделим внимание ниже. Базовым результатом для нижеследующего повествования будет следующее утверждение, доказанное в [12].

Теорема 1. *Для того, чтобы распределение Φ компактным носителем являлось сопровождающим уравнение (1.1), необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\frac{\Phi(w)}{P(w)},\ w \in \mathbb{C}^n \tag{1.9}$$

была целой аналитической.

2. О получении новых формул средних для гармонических функций.

Теорема 1 теоретически дает возможность получения новых формул средних для линейных однородных дифференциальных операторов. Для получения такой формулы нужно задать целую аналитическую функцию, которая делится нацело на символ заданного оператора и применить к ней обратное преобразование Фурье, в результате чего мы и получим сопровождающее распределение оператора, а значит, формулу среднего для него. На практике эта схема может натолкнуться на технические трудности. Здесь мы укажем, как эта схема может быть сравнительно легко реализована для оператора Лапласа.

Зададим некоторое сферически симметричное относительно заданной точки (без ограничения общности ее можно считать началом координат) распределение $\Xi(x)$ с компактным носителем. Пусть $\hat{\Xi}(\omega)$ – образ Фурье распределения $\Xi(x)$. Наше предположение о сферической симметрии означает, что распределение $\Xi(x)$ можно считать условно зависящим от $r = |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$. В связи с этим мы будем пользоваться обозначением $\Xi(r)$. Предположим также, что распределение $\Xi(r)$ удовлетворяет условию четности по переменной r. В таком случае образ $\hat{\Xi}(\omega)$ представляет собой четную аналитическую функцию переменной $s = |\omega| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \omega_k^2}$, которая может быть найдена с помощью применения к распределению $\Xi(r)$ преобразования Ганкеля (см. [9]). Для этой функции мы будем использовать обозначение $\hat{\Xi}(s)$. Разложим функцию $\hat{\Xi}(s)$ в степенной ряд:

$$\hat{\Xi}(s) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s^{2k}$$

Теперь ясно, что целая аналитическая функция

$$\hat{\Phi}(s) = \hat{\Xi}(s) - a_0$$

делится нацело на s^2, то есть на символ оператора Лапласа. То, что функция $\hat{\Phi}(s)$ представляет собой образ Фурье некоторого компактного распределения $\Phi(r)$, доказывается, как и при доказательстве теоремы 1. Впрочем, и без того ясно, что прообраз функции $\hat{\Phi}(s)$ будет иметь вид

$$\Phi(r) = \Xi(r) - a_0\delta(x).$$

Остается заметить, что

$$a_0 = \hat{\Xi}(0) = \langle \Xi, 1 \rangle.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть распределение $\Xi(x)$ с компактным носителем удовлетворяет условиям сферической симметрии и четности по переменной $r = |x - x^{(0)}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^{(0)})^2}$. Тогда распределение*

$$\Phi(x) = \Xi(x) - a_0\delta(x),$$

где

$$a_0 = \langle \Xi, 1 \rangle,$$

представляет собой сопровождение оператора Лапласа, то есть имеет место формула следующая среднего для гармонической функции:

$$\langle \Phi(x), u \rangle = 0.$$

Пример 3.

Пусть

$$\Xi(x) = \begin{cases} h^2 - |x|^2, & \text{если } |x| \le h; \\ 0, & \text{если } |x| > h. \end{cases}$$

Тогда

$$\hat{\Xi}(s) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} s^{\frac{2-n}{2}} \int_0^h r^{n/2}(h^2 - r^2) J_{\frac{n-2}{2}}(rs)\, dr =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^h r^{n-1}(h^2 - r^2) j_{\frac{n-2}{2}}(rs)\, dr,$$

где $j_\nu(z)$ – нормированная функция Бесселя первого рода порядка ν, определенная формулой

$$j_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{z^\nu} J_\nu(z) =$$

$$= \Gamma(\nu+1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m+\nu+1)},$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма - функция Эйлера, $J_\nu(\cdot)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν,

$$a_0 = \hat{\Xi}(0+) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^h r^{n-1}(h^2 - r^2)\, dr = |S_n| \frac{2h^{n+2}}{n^2+2n} .$$

Отсюда следует, что распределение вида

$$\Phi(x - x^{(0)}) = \Xi(x - x^{(0)}) - |S_n| \frac{2h^{n+2}}{n^2+2n} \delta(x - x^{(0)})$$

является сопровождением оператора Лапласа. Следовательно, имеет место формула среднего для гармонической функции вида

$$|S_n| \frac{2h^{n+2}}{n^2+2n} u(x^{(0)}) = \int_{|x-x^{(0)}|\le h} (h^2 - r^2) u(x)\, dx.$$

3 Замечания об обращении теорем о среднем

Относительно обращения теорем о среднем можно заметить следующее. Пусть имеется некоторое семейство сопровождений оператора $P(D)$, зависящих от точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и от некоторого параметра $\mu \in \Lambda$. Обозначим через $\Phi_{\mu,x^{(0)}}(x)$ сопровождение из этого семейства. Относительно множества Λ мы будем предполагать, что имеет смысл предельный переход по этому множеству при $\mu \to \mu_0$, где μ_0 – предельная точка множества Λ.

Теорема 3. *Пусть функция* $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *для каждого сопровождения* $\Phi_{\mu,x^{(0)}}(x)$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \mu \in \Lambda$ *удовлетворяет соотношению*

$$\langle \Phi_{\mu,x^{(0)}}(x), u(x) \rangle = 0,$$

причем семейство сопровождений $\Phi_{\mu,x^{(0)}}(x)$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \Lambda$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \Phi_{\mu,x^{(0)}}(x) = P(D)\delta(x - x^{(0)}).$$

Тогда функция $u(x)$ является решением уравнения

$$P(D)u = 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\Phi_{\mu,x^{(0)}}(x) = P(D)\psi_{\mu,x^{(0)}}(x)$, где $\psi_{\mu,x^{(0)}}(x)$ – некоторое распределение с компактным носителем. Поэтому из условий теоремы получим:

$$\left\langle \Phi_{\mu,x^{(0)}}(x), u(x) \right\rangle = 0.$$

Переходя к пределу при $\mu \to \mu_0$ в этом равенстве, получим

$$0 = \left\langle P(D)\delta(x - x^{(0)}), u(x) \right\rangle =$$

$$= (-1)^m \left\langle \delta(x - x^{(0)}), P(D)u(x) \right\rangle = (-1)^m P(D)u(x^{(0)}),\ \ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

В силу произвольности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ теорема доказана.

Список литературы

1. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464с.
2. Ильин В.А. О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами // Дифференциальные уравнения. – 1969. - Т. 5, N 11. – С. 1940 - 1978.
3. Ильин В.А. Некоторые свойства регулярного решения уравнения Гельмгольца в плоской области // Математич. заметки. – 1974. - Т. 15, N 6. – С. 885 - 890.
4. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Об одном обобщении формулы среднего значения для регулярного решения уравнения Шредингера. – ИПМ АН СССР, 1977. – С. 157 - 166.
5. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Формула среднего значения для присоединенных функций оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения. - 1981. – Т. 17, N 10. – С. 1908 - 1910.
6. Моисеев Е.И. Формула среднего для собственных функций эллиптического самосопряженного оператора второго порядка // Докл.АН СССР. – 1971. – Т. 197, N 3. – с. 524 - 525.
7. Моисеев Е.И. Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, N 5. – С. 827 - 844.
8. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. - М.: Мир, 1964. - 534 с.
9. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Государственное издательство физико - математической литературы, 1958. – 440 с.
10. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
11. Иванов Л. А., Половинкин И. П. О некоторых свойствах оператора Бельтрами в римановой метрике //Доклады Академии наук РФ. - 1999, - Т. 365, N 3. - С. 306 - 309.
12. Мешков В.З., Половинкин И.П. К свойствам решений линейных уравнений в частных производных // Черноземный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". – 2007. - Вып. 1 (5). – С. 3 - 11.

ABOUT PROPERTIES OF MEAN VALUES OF SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.Z. MESHKOV, I.P. POLOVINKIN

Voronezh State University

e-mail: polovinkin@yandex.ru

We derive new mean value theorems for harmonic functions by a symbolic method based on distribution theory.

Keywords: mean value theorem, harmonic functions, distribution theory,differential equations.