УДК 539.2

ФИНАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ САМОПОДОБНОМ МЕХАНИЗМЕ ДРОБЛЕНИЯ

Р.Е. БРОДСКИЙ[1], Ю.П. ВИРЧЕНКО[2]

[1]*Институт монокристаллов НАНУ*
[2]*Белгородский государственный университет*

e-mail: virch@bsu.edu.ru

В рамках физического представления о медленной фрагментации твердотельной среды и на основе предложенного А.Н.Колмогоровым однопараметрического описания систем фрагментации, строится математическая модель фрагментации с самоподобным механизмом дробления и с учётом законов сохранения энергии и вещества в системе. В условиях масштабной инвариантности, эта модель приводит асимптотически, при неограниченном продолжении эволюции, к классическому логарифмически нормальному распределению. В общем случае, при ненулевом показателе β самоподобия, получено уравнение для финальной плотности распределения, которое исследовано в простейшем частном случае $\beta = 2$ и, в этом случае, оно даёт плотность распределения со степенным $\propto r^{-5}$ убыванием по размерам r.

Ключевые слова: фрагментация, самоподобие, финальные распределения

Статистическая теория фрагментации твердотельных материалов берёт своё начало с классической работы А.Н.Колмогорова[1]. В ней было предложено описывать состояния каждого из фрагментов системы посредством одного параметра - обобщённого размера r и, в рамках простых и очень прозрачных предположений, была построена вероятностная модель, описывающая эволюцию системы в дискретной шкале времени. На её основе, было найдено финальное распределение вероятностей для случайных размеров фрагментов в виде логарифмически нормального распределения. Одним из существенных предположений Колмогорова является масштабная инвариатность механизма дробления, которая состоит в неизменности эволюционного уравнения при замене $\lambda r \Rightarrow r$. В дальнейшем, модель Колмогорова получила развитие в различных направлениях (см., например, [2],[3]), с точки зрения исследования родственных вероятностных моделей. Однако, было отмечен ещё один существенный её недостаток [4], она не учитывает законов сохранения энергии и вещества в процессе фрагментации. В последней работе был намечен путь преодоления этого недостатка. Необходимо также отметить, что Колмогоровым был исследован только случай масштабно инвариантного дробления, в то время как дальнейшее развитие статистической физики потребовало изучения так называемых фрактальных структур [5] и, поэтому, стало актуальным изучение, в рамках статистической теории фрагментации, механизмов дробления, которые не обладают масштабной инвариантностью, а, наборот, как это принято в теории фракталов, обладают свойством самоподобия при изменении масштаба (см., например, [6] - [8]). Поэтому, несмотря на то, что в последнее время приобрёл популярность подход к изучению динамики фрагментации на основе стохастической геометрии [7], [9], возникла необходимость исследования класса финальных распределений вероятностей для математических моделей фрагментации, обладающих свойством самоподобия, в рамках традиционного однопараметрического подхода. Это связано, прежде всего с тем, что результаты, полученные в рамках такого подхода, непосредственно приложимы к обработке статистических данных, связанных с физическими системами фрагментации. Поиску финальных распределений, в условиях самподобия механизма дробления, посвящена настоящая работа, в которой, помимо этого, преодолевается основной недостаток работы [1], то есть производится учёт основных законов сохранения. Здесь мы показываем, что, при реализации так называемого режима медленной фрагментации, когда имеется возможность описания эволюции на основе диффузионного уравнения для плотности $g(r,t)$ числа фрагментов по размерам, возникает распределение вероятностей с степенной, в отличие от колмогоровского режима, асимптотикой в области больших размеров. Этот результат существенно также отличается от распределения, полученного также в случае масштабно неинвариантного дробления, когда аналогичная асимптотика является экспоненциальной [10] - [12].

1. Диффузионное описание медленной фрагментации

В этом разделе мы сформулируем проблему исследования эволюционного процесса так называемой медленной фрагментации. Математическая формулировка задачи состоит в следующем. Пусть $g(r,t)$ – плотность распределения конечной положительной меры на R_+. С физической точки зрения, мера представляет собой среднее число фрагментов с размерами не по размерам. В рамках теории медленной фрагментации, в предположении, что, в неизменных внешних условиях протекания процесса, устанавливается автономный эволюционный режим, эта плотность является решением диффузионного уравнения

$$\dot{g}(r,t) = c(r)g(r,t) + \frac{\partial}{\partial r}[a(r)g(r,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[b^2(r)g(r,t)], \qquad (1.1)$$

у которого коэффициенты $c(r)$ – распределённая интенсивность рождения фрагментов и $b^2(r)$ – коэффициент диффузии положительны. При этом $c(r)$ предполагается интегрируемой в окрестности нуля и ограниченной на R_+ за пределами этой окрестности.

Плотность $g(r,t)$, согласно конструкции математической модели медленной фрагментации, должна удовлетворять условиям сохранения объёма и энергии, которые записываются, соответственно, в виде

$$\int_0^\infty r^3 g(r,t)dr = \text{const}, \quad \int_0^\infty r^2 g(r,t)dr = \text{const}. \qquad (1.2)$$

Задача состоит в вычислении асимптотики финальной плотности распределения $f(r,t) = g(r,t)/N(t)$ при $t \to \infty$, где $N(t) = N(\infty,t)$ – среднее число всех фрагментов в системе фрагментации.

Дифференцированием по t обеих частей первого из равенств (1.2),

$$\int_0^\infty r^3 \dot{g}(r,t)dr = 0,$$

после подстановки выражения для производной, следующего из уравнения (1.1), получаем

$$\int_0^\infty r^3 \left[c(r)g(r,t) + \frac{\partial}{\partial r}[a(r)g(r,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[b^2(r)g(r,t)] \right] dr = 0 .$$

Интегрируя по частям второе и третье слагаемые в этом равенстве, находим

$$\int_0^\infty [r^3 c(r) - 3r^2 a(r) + 3rb^2(r)] g(r,t) dr = 0 .$$

Ввиду независимости коэффициентов $a(r)$ и $b^2(r)$ от произвольной плотности $g(r,t)$, из последнего равенства, следует уравнение

$$r^2 c(r) - 3ra(r) + 3b^2(r) = 0 . \tag{1.3}$$

Точно также рассуждая, получим условие на коэффициенты $c(r)$, $a(r)$, $b^2(r)$, следующее из второго равенства (1.2),

$$r^2 c(r) - 2ra(r) + b^2(r) = 0 . \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) и (1.4) приводят к следующим связям между коэффициентами $a(r)$ и $b^2(r)$ и распределённой интенсивностью рождения фрагментов.

$$b^2(r) = \frac{1}{3} r^2 c(r) , \quad a(r,t) = \frac{2}{3} rc(r) . \tag{1.5}$$

Подставив выражения (1.5) для коэффициентов $a(r)$ и $b^2(r)$ в уравнение (1.1), мы приходим к следующему уравнению, описывающему процесс медленной фрагментации

$$\dot{g}(r,t) = c(r)g(r,t) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}[rc(r)g(r,t)] + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r^2 c(r)g(r,t)] . \tag{1.6}$$

С целью изучения финального поведения решений этого уравнения, выделим два класса функций $c(r)$, для которых реализуется тип эволюции, который назван нами самоподобным. К первому классу отнесём $c(r) \to c_0 > 0$ при $r \to +0$, а второй класс характеризуется функциями $c(r)$, которые обладают, при тех же условиях, асимптотическим поведением $c(r) = c_0 r^\beta (1 + o(1))$, где показатель $\beta > 0$ мы называём показателем самоподобия дробления фрагментов. Для функций первого класса, показатель самоподобия $\beta = 0$, но мы их выделяем в отдельный класс, так как, для таких интенсивностей рождения фрагментов, реализуется принципиально иной тип финального поведения, по сравнению с моделями, у которых $\beta > 0$.

2. Колмогоровский режим медленной фрагментации

В этом разделе мы покажем, что для функции $c(r)$ первого из указанных выше типов реализуется колмогоровское финальное распределение. Введём функцию $h(x,s)$ при $x > 0$, согласно формуле

$$h(x,t) = \lambda(t) f(\lambda(t)x, t) , \tag{2.1}$$

где $f(r,t)$ – плотность распределения вероятностей $f(r,t) = g(r,t)/N(t)$ и введена подходящая функция $\lambda(t) \to 0$ при $t \to \infty$, которая будет определена позже. Подставляя выражения (2.1) в уравнение (1.6), умножив на $\lambda(t)$ и совершая замену переменной $r/\lambda(t) = x$, получим следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x,t) - \left(\frac{d}{dt}\ln\lambda(t)\right)[h(x,t) + xh'(x,t)] =$$

$$= [c(\lambda(t)x) - 1]h(x,t) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}[xc(\lambda(t)x)h(x,t)] + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[x^2 c(\lambda(t)x)h(x,t)],$$

где штрих обозначает частную производную функции $h(x,t)$ по первому аргументу функции $h(x,t)$. Из этого уравнения следует, что, для существования финального поведения решения $h(x,t)$ при $t \to \infty$, необходимо существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\ln\lambda(t) = -\grave{u}\,, \quad \grave{u} \geq 0\,. \tag{2.2}$$

Поэтому функцию $\lambda(t)$, в полученном уравнении, выбираем следующим образом

$$\lambda(t) = e^{-\grave{u}t}\,, \quad \lambda(0) = 1\,.$$

Учитывая, что

$$\lim_{t\to\infty} c(\lambda(t)x) = c_0\,,$$

находим уравнение, определяющее финальную плотность распределения

$$c_0^{-1}\dot{h}(x,t) = (2/3 - \grave{u})[xh(x,t)] + \frac{1}{6}[x^2 h(x,t)]\,. \tag{2.3}$$

Оно решается точно сведением к уравнению на $\mathbf{R}$ с постоянными коэффициентами посредством замены независимой переменной $y = \ln x$, которое, в свою очередь, решается стандартным образом при естественных для плотности $h(e^y,t)$ распределения вероятностей граничных условиях $h(e^y,t) \to 0$, $y \to \pm\infty$. В результате, получим

$$h(x,t) = x^{-1}\sqrt{\frac{3}{2\pi c_0 t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{3[\ln(xe^{c_0 t(5/6-\grave{u})}/x')]^2}{2c_0 t}\right)h(x',0)dx' \tag{2.4}$$

Соответственно, финальная при $t \to \infty$ плотность распределения вероятностей по размерам фрагментов определяется формулой

$$f(r,t) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{2\pi c_0 t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{3[\ln(re^{5c_0 t/6}/r')]^2}{2c_0 t}\right)f(r',0)dr'\,. \tag{2.5}$$

Если $f(r,0) = \delta(r - r_0)$, что, с физической точки зрения означает, что фрагментация начинается с цельного образца с размером r_0, то формула (2.5) принимает колмогоровский вид [1].

3. Масштабно неинвариантные процессы медленной фрагментации

В этом разделе мы рассмотрим второй, из выделенных нами классов процессов медленной фрагментации. В этом случае, финальный этап эволюции системы фрагментации должен описываться масштабно неинвариантными плотностями распределения. Это связано с тем, что получающееся эволюционное уравнение (9), которому удовлетворяет финальная плотность распределения, неинвариантна относительно преобразования $r \Rightarrow \lambda r$.

При отличном от нуля показателе самоподобия β, введём величину $r_* = c_0^{-1/\beta}$ и положим $c(r) = (r/r_*)^\beta(1 + o(1))$. В этом разделе, мы получим общее уравнение, решениями которого являются финальные плотности распределения в описанной выше ситуации самоподобного механизма дробления и, далее, вычислим финальную плотность распределения в частном случае, когда $\beta = 2$. В дальнейшем, удобно, начиная с этого места, во всех вычислениях, пользоваться безразмерными переменными r, которые получаются в результате замены $r/r_* \Rightarrow r$, то есть считать, что $c(r) = r^\beta(1 + o(1))$. В конце же вычислений, в найденной финальной плотности распределения $g(r,t)$, мы произведём обратную замену $r \Rightarrow r/r_*$.

Совершив в уравнении (1.6) подстановку

$$g(r,t) = \lambda^{-1}(t)h(r/\lambda(t),t)$$

с функцией $\lambda(t)$, стремящейся к нулю при $t \to \infty$, и умножив, далее, на $\lambda(t)$ с заменой переменной $r/\lambda(t) = x \in R_+$, получаем уравнение в терминах обозначений, использованным в предыдущем разделе

$$\dot h(x,t) - \left(\lambda^{-1}(t)\frac{d}{dt}\lambda(t)\right)[h(x,t) + xh'(x,t)] =$$

$$= c(\lambda(t)x)h(x,t) + \frac{2}{3}\,[xc(\lambda(t)x)h(x,t)] + \frac{1}{6}\,[x^2c(\lambda(t)x)h(x,t)]\,.$$

Так как $\lambda(t)$ стремится к нулю, то, для исследования асимптотики решения этого уравнения при $t \to \infty$, достаточно решить уравнение, которое получается подстановкой асимптотического соотношения $c(r) = r^\beta(1 + o(1))$,

$$\dot h(x,t) - \left(\lambda^{-1}(t)\frac{d}{dt}\lambda(t)\right)[xh(x,t)] =$$

$$= \lambda^\beta(t)x^\beta h(x,t) + \frac{2}{3}\lambda^\beta(t)\left[x^{\beta+1}h(x,t)\right] + \frac{1}{6}\lambda^\beta(t)\left[x^{\beta+2}h(x,t)\right]. \quad (3.1)$$

Для построения требуемого решения, нужно выделить, в обеих частях этого уравнения, члены главного порядка по t при $t \to \infty$. При этом, если эта группа членов не содержит производную по t, то соответствующая финальная плотность распределения является стационарным решением уравнения (3.1). Если же член с производной по t несёт на себе главный порядок по t, а члены в правой части равенства порядка $\lambda^\beta(t)$ являются членами меньшего порядка малости, то получающееся эволюционное уравнение превращается в дифференциальное уравнение первого порядка, решения которого не обладают интересным асимптотическим поведением. Поэтому, мы будем исследовать случай, когда асимптотическое поведение членов в правой части, имеющих один и тот же порядок малости, совпадает с асимптотическим поведением производной по t в левой части. В связи с этим, положим

$$\lambda^{-1}(t)\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\grave{u}\lambda^{\beta}(t)\,. \tag{3.2}$$

где $\grave{u} \geq 0$. Так как, по предположению, $\lambda(t)$ – убывающая функция от t, то $\grave{u} > 0$. Однако, случай $\grave{u} = 0$ мы также будем анализировать, так как он соответствует указанному выше положению, когда второй член в левой части уравнения (3.1) имеет порядок $o(\lambda^{\beta}(t))$ и им можно пренебречь. Определим $\lambda(t)$ таким образом, чтобы $\lambda(0) = 1$. В этом случае, решением дифференциального уравнения (3.3) является

$$\lambda(t) = (1 + \beta\grave{u}t)^{-1/\beta}\,. \tag{3.3}$$

Используя уравнение (3.2), представим уравнение (3.1) в виде

$$\dot{h}(x,t) + \grave{u}\lambda^{\beta}(t)[xh(x,t)] =$$

$$= \lambda^{\beta}(t)\left(x^{\beta}h(x,t) + \frac{2}{3}\left[x^{\beta+1}h(x,t)\right] + \frac{1}{6}\left[x^{\beta+2}h(x,t)\right]\right). \tag{3.4}$$

Заметим, что величина

$$\int_0^{\infty}\lambda^{\beta}(s)ds = \infty$$

и, поэтому, исключив явную зависимость от времени в (3.4), посредством введения новой временно'й переменной s с дифференциалом $ds = \lambda^{\beta}(t)dt$, которая принимает сколь угодно большие значения, можно изучать финальное поведение плотности распределения $h(x,t)$ в терминах этой новой временно'й шкалы. В результате, изучаемое нами уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}h(x,s) + \grave{u}[xh(x,s)] =$$

$$= x^{\beta}h(x,s) + \frac{2}{3}\left[x^{\beta+1}h(x,s)\right] + \frac{1}{6}\left[x^{\beta+2}h(x,s)\right], \tag{3.5}$$

где $h(x,s)$ обозначает, на самом деле, функцию $h(x,t(s))$.

Приведём уравнение (3.5) к более компактному виду. С этой целью, введём новую функцию $u(y,s)$ согласно формуле $u(y,s) = e^{y+\grave{u}s}h(e^{y+\grave{u}s},s)$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}u(y,s) =$$

$$= \frac{1}{6}e^{\beta(y+\grave{u}s)}\left([\beta^2 + 5\beta + 6]u(y,s) + [2\beta + 5]\frac{\partial}{\partial y}u(y,s) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(y,s)\right).$$

Далее, положим $u(y,s) = e^{-(2+\beta)y}v(y,s)$. Следовательно, функция $v(y,s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{v}(y,s) = \frac{1}{6}e^{\beta(y+\grave{u}s)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{v}(y,s) + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{v}(y,s)\right). \qquad (3.6)$$

Заменив независимую переменную $z = e^{-\beta y/2} \in R_+$ так, что $\mathrm{v}(y,s) = w(z,s)$, получим уравнение для функции $w(z,s)$ Подстановка этих выражений и переход к новой шкале времени $s \Rightarrow \tau$, $d\tau = \beta^2 e^{\beta\grave{u}s}ds/12 = \beta^2 dt/12$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\tau}w(z,\tau) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}w(z,\tau) + [1-2/\beta](2z)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}w(z,\tau)\,, \qquad (3.7)$$

где, как и выше, введено переобозначение $w(z,s(\tau)) \Rightarrow w(z,\tau)$.

Требование интегрируемости плотности $g(r,t)$ в окрестности точки $r = 0$ приводит к необходимому ограничению $rg(r,t) \to 0$ при $r \to 0$, а требование существования третьего момента, вместе со свойством убывания плотности, приводит, с необходимостью, к ограничению $r^4 g(r,t) \to 0$ при $r \to \infty$. Отсюда следует, что $z^{2(1+2\beta^{-1})}w(z,\tau) \to 0$ при $z \to \infty$ и $z^{2(1-\beta^{-1})}w(z,\tau) \to 0$ при $z \to 0$.

4. Случай $\beta = 2$

В этом разделе мы вычислим, в частном случае при $\beta = 2$, финальную плотность распределения вероятностей, удовлетворяющую уравнению (3.7), и указанным выше граничным условиям. При $\beta = 2$ уравнение (3.7) упрощается и его решение выражается в терминах элементарных функций

$$\frac{\partial}{\partial\tau}w(z,\tau) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}w(z,\tau)\,, \quad z \in R_+\,. \qquad (4.1)$$

Граничные условия для искомой функции при $\beta = 2$ приводят к требованиям $z^4 w(z,\tau) \to 0$ при $z \to \infty$ и $w(z,\tau) \to 0$ при $z \to 0$. Мы будем решать задачу с менее жёстким первым граничным условием $w(z,\tau) \to 0$ при $z \to \infty$, что позволяет сделать возникающую краевую задачу самосопряжённой в $L_2(R_+)$. Решение этой краевой задачи с заданным начальным условием $w(z,0)$ имеет вид

$$w(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\tau^3}}\int_0^\infty G(z,z';\tau)w(z',0)dz'\,, \qquad (4.2)$$

где введено обозначение

$$G(z,z';\tau) = |z'-z|\exp\left(-\frac{(z-z')^2}{2\tau}\right) + (z+z')\exp\left(-\frac{(z+z')^2}{2\tau}\right). \qquad (4.3)$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, найдём, на основе полученного решения, явный вид плотности распределения $h(x,s)$

$$h(r,t) = \frac{e^{4\aleph\tau}}{\sqrt{8\pi\tau^3}}\int_0^\infty \left(\frac{x}{x'}\right)^5 r'^3 G(x^{-1}e^{\aleph s}, x'^{-1};\tau)h(x',0)\frac{dx'}{x'^2}\,.$$

а затем и плотности распределения $g(r,t)$ числа фрагментов по размерам

$$g(r,t) = \frac{r^{-5}}{\sqrt{\pi(2t/3)^3}}\int_0^\infty r'^3 G(r^{-1}, r'^{-1}; t/3)g(r',0)dr'\,. \qquad (4.4)$$

Для получения окончательной формулы, необходимо произвести замену переменной размера согласно $r \Rightarrow r/r_*$. В этом случае, формула (4.4) принимает вид

$$g(r,t) = \frac{(r/r_*)^{-5}}{\sqrt{\pi(2t/3)^3}} \int_0^\infty r'^3 G(r_*/r, r_*/r'; t/3) g(r',0) d(r'/r_*) .$$

Точно также как и в предыдущем разделе, рассмотрим важный случай, когда фрагментация начинается с одного образца, имеющего размер r_0. В этом случае, $g(r,0) = \delta(r - r_0)$. Тогда формула (4.5) приводит к финальной плотности распределения

$$g(r,t) = \frac{r_0^3 r_*}{\sqrt{\pi(2t/3)^3}} r^{-5} G(r_*/r, r_*/r_0; t/3) . \qquad (4.5)$$

Наконец, учтём, что, в течение эволюции, размеры всех фрагментов становятся много меньшими первоначального размера r_0, то есть плотность $g(r,t)$ должна быть сосредоточена в области значений r, много меньших r_0. Поэтому, в этой формуле, достаточно ограничиться асимптотикой при $r_0 \to \infty$. В результате, получим асимптотическое выражение финальной плотности $g(r,t)$ в виде

$$g(r,t) = \frac{r_0^3 r_*}{\sqrt{\pi(2t/3)^3}} r^{-5} G(r_*/r, 0; t/3) =$$

$$= N(t) \left[\frac{3}{\sqrt{8\pi}} \frac{\Lambda^5(t)}{r^6} \exp\left(-\frac{\Lambda^2(t)}{2r^2} \right) \right] , \qquad (4.6)$$

где

$$N(t) = \frac{t}{2}(r_0/r_*)^3 , \quad \Lambda(t) = r_*(3/t)^{1/2} . \qquad (4.7)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках в (4.6) нормировано на единицу, то есть оно представляет собой финальную плотность распределения $f(r,t)$ вероятностей по размерам фрагментов, а $N(t)$ представляет полное число фрагментов в момент времени. При этом величина $\Lambda(t)$ определяет средний размер фрагментов

$$\rho(t) = \int_0^\infty r f(r,t) dr = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \Lambda(t) .$$

Список литературы

1. Колмогоров А.Н., О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. – 1941. – Т.31. – 242 2. – С.99-101.
2. Филиппов А.Ф. О распределении размеров частиц при дроблении // Теория вероят. и её применен. – 1961. – Т.6. – 242. 3. – P.299 - 318.
3. Epstein B. The mathematical description of certain breakage mechanisms leading to the logarithmico-normal distribution // J.Franclin Inst. – 1947. – V.244. – 242 6. – P.471-477.
4. Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В., Формирование и универсальные свойства распределений по размерам в теории дробления // ДАН СССР. – 1987. – Т.294. – 242 5. – P.1105-1110.
5. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254с.
6. Cheng Z., Redner S. Kinetics of Fragmentation // J.Phys.A. – 1990. – V.23. – 242 7. – P.1233-1258.

7. Krapivsky P.L., Ben-Naim E. Scaling and Multiscaling in Models of Fragmentation // Phys.Rev. E. – 1994. – V.50. – 242 5. – P.3502-3507.
8. Krapivsky P.L., Grosse I., Ben-Naim E. Scale invariance and Lack of Self-Averaging in Fragmentation // Phys.Rev. E. – 2000. – V. 61. – P.R993-R996.
9. Вирченко Ю.П., Шеремет О.И. Геометрические модели статистической теории фрагментации // Теор. и мат. физика. – 2001.– Т.128. – 242 2. – С.161-177.
10. Brodskii R.E., Virchenko Yu.P. Investigation of the kinetic equation of cascade fragmentation theory at not self-similar subdivision // ArXiv 0808.1214v2. – 2008.
11. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. The Kolmogorov equation in the stochastic fragmentation theory and branching processes with infinite collection of particle types // Absract and Applied Analysis. – 2006. – Art.ID 36215. – P.1-10.
12. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. Investigation of the Final Evolution of the Random Fragmentation Processes. "Kolmogorov and Contemporary Mathematics". Abastracts. June 16-21,2003. – Moscow. MGU. – P.582.

THE FINAL PROBABILITY DISTRIBUTIONS OF RANDOM SIZES AT SELF-SIMILAR SUBDIVISION MECHANISM

R.E. BRODSKII[1], YU.P. VIRCHENKO[2]

[1]*Single Crystal Institute of NASU*
[2]*Belgorod State University*

e-mail: virch@bsu.edu.ru

In frameworks of physical presentation of the slow fragmentation of solid media and on the basis of one-parametrical description of fragmentation system states proposed by A.N.Kolmogorov, the mathematical model of fragmentation with the self-similar subdivision mechanism and with the account of the energy and matter conservation laws in the system is built. At the case of the scale invariance, this model gives asymptotically to the classic log-normal distribution at the unbounded continuation of the evolution. In general case, at the nonzero self-similarity power β, the equation for the final distribution density is obtained which is investigated at the simplest particular case $\beta = 2$ when it gives the distribution density with the power $\propto r^{-6}$ decreasing on sizes r.

Key words: fragmentation, self-similarity, final distributions