УДК 517.9

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ С НЕПРЕРЫВНОЙ ПО ГЁЛДЕРУ ПЛОТНОСТИ

В.А. ПОЛУНИН, А.П. СОЛДАТОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

В теории эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными типа Моисило – Теодореско имеют место обобщённые интегралы типа Коши с однородными ядрами. Изучение граничных таких интегралов является важным условием исследования краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными указанного типа. В данной работе рассматривается трёхмерный аналог интеграла типа Коши. Ядро этого интеграла представляет собой функцию, которая однородна по одной из переменных, а по другим принадлежит классу Гельдера.

Ключевые слова: условие Гельдера, интеграл Коши, однородный, поверхность Ляпунова.

Пусть задана ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^3$ и ее границей служит гладкая замкнутая поверхность $\Gamma = \partial D$. Пусть функция $Q(x, y; \xi)$ непрерывна по совокупности переменных $x \in \overline{D}$, $y \in \Gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$, и при фиксированных x, y однородна степени -2 и нечетна:

$$Q(r\xi) = r^{-2}Q(\xi), r > 0, \quad Q(-\xi) = -Q(\xi). \tag{1.1}$$

Рассмотрим интеграл

$$\phi(x) = \int_\Gamma Q(x, y; y - x)\varphi(y)ds_y, \quad x \in D, \tag{1.2}$$

где ds_y означает элемент площади на Γ. Очевидно, этот интеграл определяет непрерывную в D функцию ϕ. Основная цель данной статьи - показать, что в предположении соответствующей гладкости относительно плотности φ, ядра Q и поверхности Γ функция ϕ непрерывно продолжима на граничную поверхность Γ.

Все рассмотрения будут вестись в рамках классов Гельдера C^ν. Напомним, что для заданной на множестве E функции φ ее норма Гельдера определяется равенством

$$|\varphi|_{\nu,E} = |\varphi|_{0,E} + [\varphi]_{\nu,E},$$

где положено

$$|\varphi|_{0,E} = \sup_{x\in E}|\varphi(x)|, \quad [\varphi]_{\nu,E} = \sup_{x\neq y}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1.$$

При $[\varphi]_{1,E} < \infty$ говорят также, что функция φ удовлетворяет условию Липшица. Если множество E является замкнутой областью, то можно ввести класс $C^{1,\nu}(E)$ непрерывно дифференцируемых функций φ условиями $\varphi, \varphi' \in C^\nu(E)$, где штрих означает любую из частных производных.

Условимся отображение α множества $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ на E_2 называть липшицевым, если оно является гомеоморфным и вместе со своим обратным удовлетворяет условию Липшица. Другими словами, существует такая постоянная $M > 0$, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{M} \le \frac{|\alpha(x)-\alpha(y)|}{|x-y|} \le M \tag{1.3}$$

для любых $x, y \in E_1$, $x \neq y$. Очевидно, липшицевы отображения осуществляют изоморфизм $\varphi \to \varphi \circ \alpha$ пространства $C^\nu(E_2)$ на $C^\nu(E_1)$.

Обозначим $C^\nu(\overline{D} \times \Gamma; H^0)$ класс всех непрерывных функций $Q(x,y;\xi)$ со свойством однородности (1), которые при фиксированном ξ принадлежат $C^\nu(\overline{D} \times \Gamma)$, причем

$$|Q|_\nu^{(0)} = \sup_{|\xi|=1} |Q(x,y;\xi)|_{\nu,\overline{D}\times\Gamma} < \infty. \tag{1.4}$$

Пусть дополнительно функция Q принадлежит классу C^m по переменной ξ и ее частные производные

$$\frac{\partial^k Q}{\partial \xi^k}, \quad k = (k_1, k_2, k_3),$$

порядка $|k| = k_1 + k_2 + k_3 \le m$ принадлежат классу $C^\nu(\overline{D} \times \Gamma)$ равномерно по $|\xi| = 1$. В результате получим пространство $C^\nu(\overline{D} \times \Gamma; H^m)$ с соответствующей нормой

$$|Q|_\nu^{(m)} = \sum_{|k|\le m} \left|\frac{\partial^k Q}{\partial \xi^k}\right|_\nu^{(0)}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем предполагается что Γ является поверхностью Ляпунова и принадлежит классу $C^{1,\nu}$. Последнее означает следующее: для любого $y_0 \in \Gamma$ существует гомеоморфное отображение $y = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ единичного круга $B = \{t \in \mathbb{R}^2, |t| \le 1\}$ на некоторую окрестность поверхности Γ в точке y_0, которое принадлежит классу $C^{1,\nu}(B)$ и 3×2 —матрица Якоби $D\gamma$ которого имеет ранг 2 в каждой точке, т.е. касательные векторы

$$c_i(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t_i}, \quad i = 1,2, \tag{1.6}$$

линейно независимы.

Отметим попутно, что элемент площади на Γ дается равенством $ds_y = |[c_1(t), c_2(t)]|dt_1 dt_2$, где $[,]$ означает векторное произведение. Другими словами, интеграл от функции $\varphi \in C(\Gamma)$ по поверхности $\gamma(B) \subseteq \Gamma$ вычисляется по формуле

$$\int_{\gamma(B)} \varphi(x) ds_x = \int_B \varphi[\gamma(t)] |[c_1(t), c_2(t)]| dt. \tag{1.7}$$

Убедимся, что параметризация γ является липшицевым отображением B на $\gamma(B)$. Записывая $\gamma(t) - \gamma(s)$ в виде $f(1) - f(0)$ с функцией $f(\tau) = \gamma[s(1-\tau) + t\tau]$, получим

$$\gamma(t)-\gamma(s)=(t_1-s_1)q_1(s,t)+(t_2-s_2)q_2(s,t), \qquad (1.8)$$

где в обозначениях (1.6)

$$q_i(s,t)=\int_0^1 c_i[s(1-\tau)+t\tau]d\tau, \quad i=1,2.$$

Следовательно,

$$\frac{|\gamma(t)-\gamma(s)|}{|t-s|}=|\lambda_1 p_1(\lambda,s)+\lambda_2 p_2(\lambda,s)|,$$

где положено

$$\lambda_i=(t_i-s_i)/|t-s|, \quad p_i(\lambda,s)=q_i(s,s+\lambda|t-s|).$$

Вектор λ меняется на единичной окружности Ω и вектор-функции p_i непрерывны на компакте $\Omega\times B$. Следовательно, непрерывна и функция $|\lambda_1 p_1(\lambda,s)+\lambda_2 p_2(\lambda,s)|$. Поскольку эта функция нигде в нуль не обращается, она ограничена сверху и снизу положительными постоянными, что приводит к оценкам (1.3) для отображения γ.

По определению липшицево преобразование $y=\alpha(\tilde{y})$ пространства $\mathbb{R}^3$ на себя выпрямляет поверхность Γ в точке a, если существует такая плоскость P, проходящая через точку $\tilde{a}=\alpha^{-1}(a)$, что P совпадает с $\tilde{\Gamma}=\alpha^{-1}(\Gamma)$ в некоторой окрестности V этой точки, т. е. $P\cap V=\tilde{\Gamma}\cap V$.

Лемма 1.

(a) *Пусть $\Gamma\in C^{1,\nu}$ и $a\in\Gamma$. Тогда существует липшицево преобразование α, выпрямляющее Γ в окрестности a, которое вместе со своим обратным непрерывно дифференцируемо, причем матрицы Якоби $D(\alpha^{\pm1})$ принадлежат классу $C^\nu(\mathbb{R}^3)$.*

(b) *Пусть липшицево преобразование $y=\alpha(x)$ вместе со своим обратным непрерывно дифференцируемо, причем матрицы Якоби $D(\alpha^{\pm1})$ принадлежат классу $C^\nu(\mathbb{R}^3)$. Тогда справедлива формула замены переменных*

$$\int_\Gamma \varphi(y)ds_y=\int_{\tilde{\Gamma}}\varphi[\alpha(x)]J(x)ds_x, \quad \tilde{\Gamma}=\alpha^{-1}(\Gamma), \qquad (1.9)$$

с некоторой функцией $J(x)\in C^\nu(\tilde{\Gamma})$. Эта функция определяется равенством

$$J(x)=|[(D\alpha)e_1(x),(D\alpha)e_2(x)]|, \qquad (1.10)$$

где векторы e_1,e_2 лежат в касательной плоскости P в точке x к поверхности $\tilde{\Gamma}$, имеют единичную длину и ортогональны друг другу.

(c) *В условиях (b) существует такая постоянная $0<\delta\le1$, что вектор-функции $q_i(x,y)\in C^\nu(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$, $i=1,2,3$, определяемые аналогично (1.8) по α, и равномерно по $|x-y|\le\delta$ выполнена оценка*

$$\left|\sum_1^3 q_i(x,y)\xi_i\right|\ge\frac{|\xi|}{2M}, \qquad (1.11)$$

где M фигурирует в (1.3).

Доказательство.

(a) Пусть $a = (a_1, a_2, a_3) \in \Gamma$ и гомеоморфное отображение $y = \gamma(t)$ круга $B = \{|t| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ на окрестность точки a поверхности Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}(B)$, причем 3×2 – матрица Якоби $D\gamma$ имеет ранг 2 в каждой точке $t \in B$ и $a = \gamma(0)$. Тогда, один из ее миноров, например, $\det\{\partial\gamma_i / \partial t_j\}, 1 \leq i, j \leq 2$, отличен от нуля. Поэтому по теореме об обратной функции существует отображение $t = \delta(y_1, y_2)$ окрестности G точки a на некоторый круг $|t| \leq \varepsilon$, класса $C^{1,\nu}(\overline{G})$, которое является обратным к $y_i = \gamma_i(t), i = 1,2$. Полагая $f = \gamma_3 \circ \delta$, получим вещественную функцию $f \in C^{1,\nu}(\overline{G})$, график которой совпадает с Γ в окрестности точки a.

Пусть гладкая функция χ тождественно равна 1 в окрестности точки (a_1, a_2) и нулю вне некоторого компакта, содержащегося в G. Тогда функция

$$g(y_1, y_2) = f(y_1, y_2)\chi(y_1, y_2) \in C^{1,\nu}(\mathbb{R}^2)$$

и ее график совпадает с Γ в окрестности точки a. Рассмотрим преобразование $y = \alpha(\tilde{y})$ по формуле

$$y_1 = \tilde{y}_1, y_2 = \tilde{y}_2, y_3 = \tilde{y}_3 + g(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2).$$

Нетрудно видеть, что это преобразование удовлетворяет всем требованиям леммы.

(b) Не ограничивая общности можно считать, что поверхность Γ представлена параметрически уравнением $y = \gamma(t), |t| \leq 1$, класса $C^{1,\nu}$, фигурирующим в (a). Тогда $\tilde{\gamma} = \alpha^{-1} \circ \gamma$ служит параметризацией $\tilde{\Gamma}$ того же типа. Пусть $\tilde{c}_i$ определяются по $\tilde{\gamma}_i$ аналогично (1.6). Тогда по определению (1.7)

$$\int_\Gamma \varphi(x) ds_x = \int_{|t|\leq 1} \varphi[\gamma(t)] |[c_1(t), c_2(t)]| |dt|,$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \varphi[\alpha(y)] J(y) ds_y = \int_{|t|\leq 1} \varphi[\gamma(t)] J[\tilde{\gamma}(t)] |[\tilde{c}_1(t), \tilde{c}_2(t)]| |dt|.$$

Поэтому коэффициент J в (1.10) определяется равенством

$$J[\tilde{\gamma}(t)] |[\tilde{c}_1(t), \tilde{c}_2(t)]| = |[c_1(t), c_2(t)]|.$$

В точке $\tilde{y} = \tilde{\gamma}(t)$ векторы (1.6) являются линейными комбинациями $\tilde{c}_i = p_{i,1}e_1 + p_{i,2}e_2$, $i = 1,2$, векторов e_1, e_2 с определителем $\det p \neq 0$. Очевидно,

$$[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2] = [p_{1,1}e_1 + p_{1,2}e_2, p_{2,1}e_1 + p_{2,2}e_2] = (\det p)[e_1, e_2].$$

Поскольку $c_i = \partial\gamma / \partial t_i$ связаны с $\tilde{c}_i$ соотношением $c_i = (D\alpha)\tilde{c}_i$, где матрица Якоби $D\alpha$ вычислена в точке $\tilde{\gamma}(t)$, можем также записать

$$[c_1, c_2] = [p_{1,1}(D\alpha)e_1 + p_{1,2}(D\alpha)e_2, p_{2,1}(D\alpha)a_1 + p_{2,2}(D\alpha)a_2] = \\ = (\det p)[(D\alpha)e_1, (D\alpha)e_2].$$

Так как $|[e_1, e_2]| = 1$, в результате для J получим выражение (1.10).

Остается убедиться, что $J \in C^\nu(\tilde{\Gamma})$. В силу (1.10) достаточно выбрать единичные векторы $e_i(y) \in C^\nu(\tilde{\Gamma})$. Они выбираются по $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ с помощью стандартной процедуры ортогонализации. Положим $b_1 = \tilde{c}_1$, $b_2 = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)\tilde{c}_1 - (\tilde{c}_1, \tilde{c}_1)\tilde{c}_2$. Эти функции ортогональны и принадлежат классу $C^\nu(B)$. Ясно, что этим свойством обладают и единичные векторы $b_l/|b_l|$. С помощью параметризации $\tilde{\gamma}$ они определяют вектор- функции e_l на $\tilde{\Gamma}$, т.е. $e_l \circ \tilde{\gamma} = b_l/|b_l|$. Поскольку параметризация $\tilde{\gamma}$ является липшицевым отображением, функции $e_l \in C^\nu(\tilde{\Gamma})$, что завершает доказательство.

(c) При фиксированном ξ можем записать

$$(D\alpha)(x)\xi = \sum_{l=1}^{3} q_l(x,x)\xi_l,$$

где учтено, что $q_l(x,x) = \partial\alpha/\partial x_l(x)$. Полагая $x - y = \xi$, имеем:

$$\alpha(x) - \alpha(y) = (D\alpha)(x)\xi + b(y)|\xi|,$$

где $b(y) \to 0$ при $|\xi| \to 0$. Отсюда но основании (1.3) имеем оценку

$$\frac{|\xi|}{M} \le |(D\alpha)(x)\xi| \le M\,|\xi|.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{l=1}^{3} q_l(x,y)\xi_l\right| \ge |(D\alpha)(x)\xi| - \sum_{l=1}^{3} [q_l]_\nu |x-y|^\nu \ge \frac{|\xi|}{2M}$$

при $|x-y| \le \delta = 1/MC$, $C = \sum_l [q_l]_\nu$.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $Q \in C^\nu(\overline{D}\times\Gamma, H^2)$ и $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, $0<\mu<\nu$. Тогда функция ϕ, определяемая интегралом (1.2), непрерывно продолжима на Γ, принадлежит классу $C^\mu(\overline{D})$ и допускает оценку*

$$|\Phi|_{\mu,\overline{D}} \le A|Q|_\nu^{(2)}|\varphi|_{\mu,\Gamma}, \tag{1.12}$$

где постоянная $A>0$ зависит только от μ,ν и Γ.

Доказательство. Докажем сначала, что для каждой точки $a \in \overline{D}$ существует такая ее окрестность V, что оценка (1.12) выполнена по отношению к $V \cap \overline{D}$, т.е.

$$|\Phi|_{\mu,D\cap V} \le C_a|Q|_\nu^{(2)}|\varphi|_{\mu,\Gamma}, \tag{1.13}$$

где постоянная C_a зависит только от μ,ν,Γ и a.

Случаи $a \in D$ и $a \in \Gamma$ рассмотрим отдельно.

1) Пусть $a \in D$. В качестве V выберем замкнутый шар с центром в точке a, содержащийся в D. Тогда расстояние δ от этого шара до границы $\Gamma = \partial D$ положительно. Будем считать, что R есть диаметр области D. Тогда

$$\delta \le |x-y| \le R \quad \text{при} \quad x \in V, y \in \Gamma. \tag{1.14}$$

Рассмотрим шаровой слой $G = \{\delta \le |\xi| \le R\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Если функция $Q(\xi)$ непрерывно дифференцируема по ξ и удовлетворяет условию однородности (1.1), то в обозначениях (1.5) имеем оценку

$$|Q|_{\nu,G} \le C_1 |Q|_{\nu}^{(1)},$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит только от δ и R.

С учетом (1.14) отсюда следует, что функция $Q_0(x,y) = Q(x,y;y-x)$ принадлежит $C^{\nu}(V \times \Gamma)$ и ее C^{ν} - норма оценивается через норму $|Q|_{\nu}^{(1)}$. В результате для функции ϕ на V имеем оценку

$$|\phi|_{\nu,V} \le C |Q|_{\nu}^{(1)} |\varphi|_{0,\Gamma},$$

и тем более оценку (1.13).

2) Пусть $a \in \Gamma$. Согласно лемме 1(a) существует липшицево преобразование α, для которого $(D\alpha)^{\pm 1} \in C^{\nu}(\mathbb{R}^3)$, выпрямляющее Γ в точке a. Другими словами, если $a = \alpha(\tilde{a})$ и $\Gamma = \alpha(\tilde{\Gamma})$, то поверхность $\tilde{\Gamma} \in C^{1,\nu}$ является плоской в окрестности точки $\tilde{a}$.

Положим $x = \alpha(\tilde{x}), y = \alpha(\tilde{y})$, тогда согласно лемме 1(b) интеграл (1.2) при этой подстановке перейдет в

$$\phi[\alpha(\tilde{x})] = \int_{\tilde{\Gamma}} Q[\alpha(\tilde{x}), \alpha(\tilde{y}); \alpha(\tilde{y}) - \alpha(\tilde{x})] \varphi[\alpha(\tilde{y})] J(\tilde{y}) ds_{\tilde{y}}, \quad \tilde{x} \in \tilde{D}. \qquad (1.15)$$

В силу двустороннего неравенства (1.3), которому удовлетворяет липшицево преобразование α справедливы оценки

$$|\phi|_{\nu,E} \le C |\tilde{\phi}|_{\nu,\tilde{E}}, \quad |\tilde{\phi}|_{\nu,\tilde{E}} \le C |\phi|_{\nu,E},$$

где $E \subseteq \overline{D}, E = \alpha(\tilde{E})$ и постоянная C зависит только от M. Поэтому (1.13) достаточно установить по отношению к функциям $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi[\alpha(\tilde{x})]$ и $J(\tilde{y})\varphi[\alpha(\tilde{y})]$ по отношению к, соответственно, $\tilde{D} \cap \tilde{V}$, $V = \alpha(\tilde{V})$ и $\tilde{\Gamma}$. Таким образом, опуская волну в обозначениях (1.15), оценку (1.13) достаточно установить для интеграла

$$\phi(x) = \int_{\Gamma} Q[\alpha(x), \alpha(y), \alpha(y) - \alpha(x)] \varphi(y) J(y) ds_y, \qquad (1.16)$$

где поверхность $\Gamma \in C^{1,\nu}$ является плоской в окрестности точки a. Последнее означает, что для некоторого $r_1 > 0$ и плоскости P пересечение $P \cap \{|y-a| \le r_1\}$ совпадает с $\Gamma \cap \{|y-a| \le r_1\}$. Зафиксируем $0 < r_0 < r_1$ и в качестве V выберем шар $|y-a| \le r_0$, так что $V \cap D$ является полушаром, лежащим с одной стороны от P.

Число r_1 выберем столь малым, что по отношению к α выполнено утверждение леммы 1(c) с $\delta = 2r_1$.

Пусть $\phi_0(x)$ и $\phi_1(x)$ отвечают в (1.16) интегралам по, соответственно, $|y-a| \le r_1$ и $|y-a| \ge r_1$. Расстояние между множествами $\{|x-a| \le r_0\}$ и $\Gamma \cap \{|y-a| \ge r_1\}$ равно $r_1 - r_0$, так что с учетом (1.3)

$$|\alpha(y) - \alpha(x)| \ge \frac{r_1 - r_0}{M}.$$

Поэтому оценка (1.13) для функции $\phi_1(x)$ устанавливается совершенно так же, как в случае 1).

Таким образом, эту оценку требуется установить для функции

$$\Phi_0(x) = \int_{\Gamma_0} Q[\alpha(x), \alpha(y); \alpha(y) - \alpha(x)]\varphi_0(y)ds_y, \quad x \in D_0, \tag{1.17}$$

$\Gamma_0 = \Gamma \cap \{|y - a| \leq r_1\}$, $D_0 = V \cap D$ и $\varphi_0(y) = J(y)\varphi(y)$.Напомним, что $\Gamma_1 \subseteq P$ и D_0 является полушаром шара $V = \{|x - a| \leq r_0\}$, лежащим с одной стороны от P.

В обозначениях леммы 1(c) можем записать

$$\alpha(y) - \alpha(x) = (y_1 - x_1)q_1(x, y) + (y_2 - x_2)q_2(x, y) + (y_3 - x_3)q_3(x, y),$$

где вектор -функции $q_i(x, y) \in C^\nu(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ и при $|x - y| \leq 2r_1$ удовлетворяют оценке (1.11). Положим

$$Q_0(x, y; \xi) = Q[\alpha(x), \alpha(y); \textstyle\sum_{i=1}^3 q_i(x, y)\xi_i]. \tag{1.18}$$

Утверждается, что $Q_0 \in C^\nu(\overline{D}_0 \times \Gamma_0; H^{(2)})$ и выполняется соответствующая оценка

$$|Q_0|_\nu^{(2)} \leq C|Q|_\nu^{(2)}. \tag{1.19}$$

В самом деле, в силу (1.13) вектор-функция $Q_0(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по ξ и, очевидно, удовлетворяет условию (1.1).

При этом частные производные $\partial Q_0/\partial \xi_j$ являются линейными комбинациями частных производных $\partial Q/\partial \xi_j$ с коэффициентами, принадлежащими $C^\nu(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Аналогичным образом определяются частные производные Q_0 второго порядка. Поэтому, при $|\xi| = 1$ функции $\partial^k Q_0/\partial \xi^k, |k| \leq 2$ принадлежат $C^\nu(\overline{D}_0 \times \Gamma_1)$ равномерно по $|\xi| = 1$. Здесь учтено, что при $|\xi| = 1$ в силу (1.1) вектор $\eta = \sum_1^3 q_i\xi_i$ принадлежит шаровому слою $\delta_0 \leq |\eta| \leq \delta_0^{-1}$ с некоторым малым δ_0 и в этом слое функция $Q[\alpha(x), \alpha(y); \eta]$ удовлетворяет по η условию Липшица. В результате в соответствии с определениями (1.4), (1.5) приходим к оценке (1.19).

В обозначениях (1.18) интеграл (1.16) можем переписать в форме

$$\phi_0(x) = \int_{\Gamma_0} Q_0(x, y; y - x)\varphi_0(y)ds_y, \quad x \in D_0. \tag{1.20}$$

Требуется доказать, что

$$|\phi_0|_{C^\mu, D_0} \leq C|Q_0|_\nu^{(2)}|\varphi_0|_{\mu,\Gamma_0}. \tag{1.21}$$

Тогда с учетом (1.19) и очевидной оценки

$$|\varphi_0|_{\mu,\Gamma_0} \leq C|\varphi|_{\mu,\Gamma_0},$$

для функции $\varphi_0 = J\varphi$, вытекающей из леммы 1(b), отсюда будет следовать оценка (1.13) для функции ϕ_0.

Если $Q_0(x, y; \xi)$ не зависит от x, то оценка (1.21) установлена в работе [1]. В общем случае воспользуемся следующим свойством нормы Гельдера [2]: если функция $f(x) \in C^\nu(E)$ и $0 < \mu < \nu$, то функция двух переменных

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^\mu},$$

доопределенная нулем при $x = y$, принадлежит классу $C^{\nu-\mu}(E \times E)$ с оценкой

$$|F|_{\nu-\mu} \leq \hat{C}|f|_{\nu}. \qquad (1.22)$$

норм гельдера, где $\hat{C}$ некоторая постоянная.

Применим этот факт к интегралу (1.20). Запишем

$$\phi_0(x') - \phi_0(x'') = \int_{\Gamma_0} [Q_0(x', y; y - x'] - Q_0(x'', y; y - x')]\varphi(y) ds_y +$$

$$+ \int_{\Gamma_0} [Q_0(x'', y; y - x') - Q_0(x'', y; y - x'')]\varphi(y) ds_y = \Delta_2 + \Delta_1.$$

Слагаемое Δ_1 соответствует случаю, когда $Q_0(x, y; \xi)$ не зависит от x, так что имеем оценку

$$|\Delta_1| \leq C|Q_0|_{\nu}^{(2)}|\varphi|_{\mu}|x' - x''|^{\mu}. \qquad (1.23)$$

Что касается Δ_2, то запишем

$$\frac{\phi_0(x') - \phi_0(x'')}{|x' - x''|^{\mu}} = \int_{\Gamma_0} \tilde{Q}(x', x'', y; y - x')\phi(y) ds_y \qquad (1.24)$$

с ядром

$$\tilde{Q}_0(x', x'', y; \xi) = \frac{Q_0(x', y; \xi) - Q_0(x'', y; \xi)}{|x' - x''|^{\mu}}.$$

На основании оценки (1.22) и определений (1.4), (1.5) функция $\tilde{Q}_0$ принадлежит классу $C^{\nu-\mu}(\overline{D}_0 \times \overline{D}_0 \times \Gamma, H^{(2)})$ с соответствующей оценкой

$$|\tilde{Q}_0|_{\nu-\mu}^{(2)} \leq C|Q_0|_{\nu}^{(2)}. \qquad (1.25)$$

Рассматривая x', x'' в (1.24) как параметр, снова оказываемся в случае когда ядро Q_0 в (1.20) не зависит от x (с заменой ν на, соответственно $\nu - \mu$ и $0 < \varepsilon < \nu - \mu$.) В частности имеем оценку

$$\frac{|\Delta_2|}{|x' - x''|^{\mu}} \leq |\tilde{Q}_0|_{\nu-\mu}^{(2)}|\varphi|_{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \nu - \mu.$$

Совместно с (1.25) отсюда

$$|\Delta_2| \leq |Q_0|_{\nu}^{(2)}|\varphi|_{\mu}|x' - x''|^{\mu}.$$

Объединяя ее с (1.23), приходим к справедливости оценки (1.13) для функции ϕ_0

Тем самым оценка (1.13) для исходного интеграла (1.1) в случае $a \in \Gamma$ установлена.

Итак, для каждой точки $a \in \overline{D}$ найдется такая ее открытая окрестность $V = V(a)$, что выполнена оценка (1.13). В силу компактности $\overline{D}$ из открытого покрытия $\{V(a), a \in \overline{D}\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $V_i = V_i(a)$ $1 \leq i \leq n$.

В силу компактности найдется такое $r > 0$, что при $x, y \in D$ и $|x - y| \leq r$ пара точек x, y принадлежит одному из V_i. Поэтому для этих x, y в силу (1.13) имеем оценку

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|Q|_{\nu}^{(2)}|\varphi|_{\mu}|x - y|^{\mu}.$$

С другой стороны, при $|x - y| \geq r$ имеем очевидную оценку

$$\frac{\phi_0(x) - \phi_0(y)}{|x-y|^{\mu}} \leq \frac{2|\phi|_0}{r^{\mu}}.$$

Поскольку каждая точка $x \in D$ принадлежит некоторому V_i, в силу (1.17)

$$|\phi|_{0,\overline{D}} \leq C|Q|_{\nu}^{(2)}|\varphi|_{\mu}.$$

Совместно с предыдущими двумя оценками отсюда следует, что $\phi \in C^{\mu}(D)$ и выполнена оценка (1.12).

Остается заметить, что если $\phi \in C^{\mu}(E)$ на некотором множестве E, то ϕ непрерывно продолжается на его замыкание $\overline{E}$ с сохранением C^{μ} - нормы. Применительно к функции $\phi(x), x \in D$, это означает, что ϕ непрерывно продолжима на границу Γ области D и выполнена оценка (1.12).

Список литературы

1. Полунин В.А. Граничные свойства трехмерного аналога интеграла типа Коши // В.А. Полунин. - Материалы международного Российско-Азербайджанского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" и VI Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". - Нальчик-Эльбрус, 2008. - 247с.
2. Солдатов А.П. Элементы функционального анализа и теории функций: Учеб. пособие // А.П. Солдатов. - Белгород: Изд-во БелГУ, 2005. - 140с.

THREE-DIMENSIONAL ANALOGUE OF CAUCHY-TYPE INTEGRAL WITH HOLDER-CONTINUOUS DENSITY

V.A. POLUNIN, A.P SOLDATOV

Belgorod State University

e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

The three-dimensional analogue of generalized Cauchy type integral $\phi(x) = \int_{\Gamma} Q(x, y; y - x)\varphi(y)ds_y, \quad x \in D$, is considered. Here Γ is a Lyapunov boundary of the domain $D \subseteq \mathbb{R}^3$ and the kernel $Q(x, y; \xi)$ is odd and homogeneous of degree two with respect to the variable $\xi \in \mathbb{R}^3$. These integrals occur in elliptic boundary problems (especially for elliptic systems of first order). It is shown that under some smoothness assumptions the function $\phi(x), x \in D$, is Holder continuous up to the boundary $\Gamma = \partial D$.

Key words: Holder condition, Cauchy integral, homogeneous, Lyapunov surface.