

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННО - КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СРЕДЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Е.М. БОГАТОВ

*Старооскольский технологический институт
(филиал московского государственного института стали и сплавов)*

e-mail: embogatov@inbox.ru

В работе рассматривается плоская нестационарная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в неоднородной двухфазной среде в черном приближении. При этом газообразная часть среды считается прозрачной для излучения, а расположение компонент связности твердой фазы носит фрактальный характер.

На основе методики А.А. Амосова строится полудискретное приближение к описанной задаче, причём искомая функция (температура) - предполагается кусочно-постоянной в каждый момент времени. Для множества, состоящего из треугольников уменьшающегося размера приведён вид аппроксимирующего оператора и начально-краевых условий.

Ключевые слова: теплообмен излучением, неоднородная среда, полудискретное приближение, фрактальная геометрия, параболическая задача, уравнение теплопроводности, двухфазная среда, квазирегулярная сетка

Введение

Вопросы математического описания процессов теплопереноса в неоднородной среде стали объектом пристального внимания ученых с начала 80-х гг. прошлого столетия [1]. Для решения этих вопросов в некоторых модельных ситуациях (бесконечная среда, отсутствие излучения, периодическая структура системы) хорошо подходит метод усреднения [2], [3]. Для описания теплопроводности в конечной периодической одномерной среде с учетом излучения А.А. Амосовым [4] был предложен новый метод, с помощью которого осуществляется переход к полудискретной параболической задаче на сетке с числом узлов, равным числу тел в системе.

В настоящей работе производится развитие указанного метода дискретизации для задач радиационно-кондуктивного теплообмена в двухфазной среде с фрактальным расположением компонент твердой фазы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об определении температуры в замкнутой системе протяжённых цилиндрических тел сечением $\Omega = \bigcup_{l=0}^n \Omega_l, n \in N$, разделённых прозрачной средой. Здесь Ω_l - кластер i -го поколения ($\forall i \geq 1 \quad \Omega_l = \bigcup_{j \in J} \Omega_{lj}$), состоящий из выпуклых компонент связности одинакового размера, причём

$$\forall (i, \alpha, \beta) \quad \Omega_{l\alpha} = k \Omega_{l-1,\beta}, \quad (1.1)$$

где k – коэффициент подобия.

Будем считать, что тела Ω_{lj} – абсолютно черные, а также, что система Ω помещена во внешнюю излучающую среду с температурой u_c . Тогда математическая модель высокотемпературного нагрева этой системы будет иметь вид



$$c_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda \nabla u), \quad (x, t) \in \Omega_{ij} \times (0, T), \quad (1.2)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + h(u) \right) (\bar{x}) = \sum_p \int_{l_p} h(u(\xi, t)) \varphi(\xi, \bar{x}) d\sigma(\xi), \quad (\bar{x}, t) \in \partial_l \Omega_{ij} \times (0, T), \quad (1.3)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + h(u) = h(u_c) \quad (x, t) \in \partial_e \Omega_{ij} \times (0, T), \quad (1.4)$$

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad x \in \Omega_{ij}. \quad (1.5)$$

Здесь $u(x, t)$ - абсолютная температура точки $x \in \Omega_{ij}$, $x = (x_1, x_2)$ в момент времени t ; c_V и ρ - удельная теплоемкость и плотность материала, из которого изготовлены тела; λ - коэффициент теплопроводности; $h(u) = \sigma_0 u^4$ - плотность потока теплового излучения, определяемая по закону Стефана-Больцмана (σ_0 - постоянная Стефана-Больцмана), n - внешняя нормаль к $\partial \Omega_{ij}$, $d\sigma$ - элемент длины границы, φ - элементарный угловой коэффициент (определение см., например, в [5]); $\partial_e \Omega_{ij}$ и $\partial_l \Omega_{ij}$ - множества точек границы, имеющих и не имеющих контакта с внешней средой соответственно, u_c - температура внешней среды, l_p - границы тел Ω_{pa} ($p \leq i$), которые полностью или частично видны из точки \bar{x} .

Известно, что решение задачи (1.2)-(1.5) существует и единственно в энергетических классах функций (см. [6]).

Отметим, что при $k=1$ в задачах типа (1.2)-(1.5) с регулярным расположением множеств Ω_{ij} возможен переход к дифференциально-разностному приближению лучистой теплопроводности на равномерной сетке [7].

2. Дискретизация задачи с уточненной геометрией

Будем считать, что $k=0,5$, $n=2$; Ω_{ij} - чёрные треугольники, расположенные в соответствии с рис.1 (в центре системы находится Ω_0). Для учета граничных условий дополним Ω "мнимым периметром"- кластером Ω_2 , состоящем из треугольников размера Ω_{2j} , присоединенных к Ω таким образом, что одна из их вершин совпадает с вершиной треугольника из семейства Ω_{2j} . Положим температуру во всех телах, составляющих Ω_2' равной u_c (на рис.1 они белые).

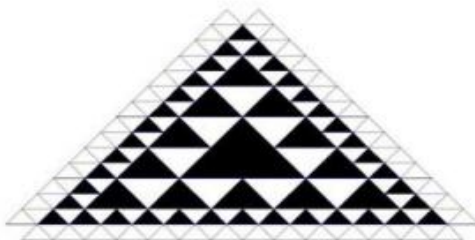


Рис.1

Центры всех треугольников образуют квазиравномерную сетку Ω_a , изображенную на рис.2. Ее границу, соответствующую Ω_2' , обозначим через $\partial \Omega_a$. Разрежем Ω_a на 3 равные части по лучам, являющимся продолжением радиусов окружности, описанной около Ω_0 . Тогда нумерацию узлов в каждой трети Ω_a можно производить способом, соответствующим рис.3.

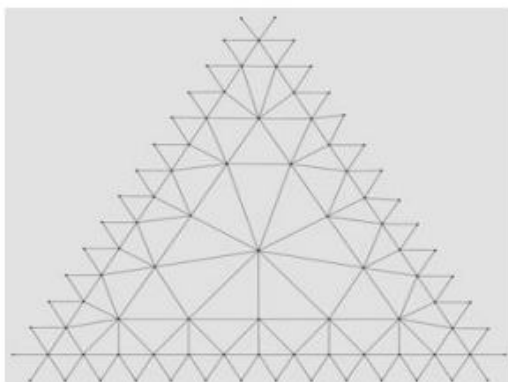


Рис.2

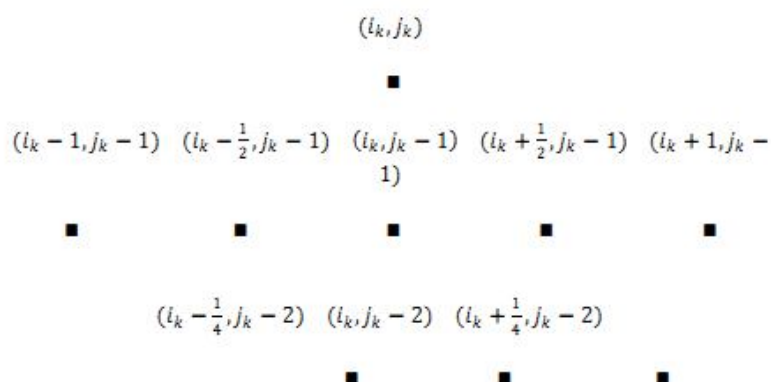


Рис.3

Проинтегрируем (1.1) по множеству Ω_{ij} , получим

$$c_v \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} u dx = \int_{\partial \Omega_{ij}} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \quad (2.1)$$

Разобьем $\partial \Omega_{ij}$ на части γ_{ij}^m по числу компонент связности, на которые он делится касанием с соседними треугольниками.

Проинтегрируем (1.2) по γ_{ij}^m в отдельности и сложим получившиеся равенства, получим

$$\int_{\Omega_{ij}} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_x + \int_{\partial \Omega_{ij}} h(u) d\sigma_x = \sum_m \int_{\gamma_{ij}^m} \left(\sum_p \int_{I_p} h(u(\xi, t)) \varphi(\xi, x) d\sigma_\xi \right) d\sigma_x \quad (2.2)$$

Складывая теперь (2.1) и (2.2), переходим к уравнению теплового баланса

$$c_v \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} u dx + \int_{\partial \Omega_{ij}} h(u) d\sigma_x = \sum_m \sum_p \int_{I_p} h(u) \tilde{\varphi}_{ij}(\xi) d\sigma_\xi, \quad (2.3)$$



где $\tilde{\varphi}_{ij}(\xi) = \int_{\partial\Omega_{ij}} \varphi(\xi, x) d\sigma_x$.

Будем считать температуру в каждом теле приближенно равной среднему по Ω_{ij} значению:

$$u(x, t) \approx U_{ij}(t) = \frac{1}{\Delta_l} \int_{\Omega_{ij}} u(x, t) dx, \quad \text{где } \Delta_l = \frac{a^2\sqrt{3}}{4l+1}, \quad a - \text{сторона } \Omega_0.$$

Это позволит нам перейти к полудискретной аппроксимации задачи (1.2) - (1.5) на основе методики, разработанной в [7].

Ранжируем узлы сетки Ω_a следующим образом:

- центральный узел отнесем к нулевому рангу;
- узлы, соответствующие треугольникам, лежащим на осях симметрии Ω_0 отнесем к первому рангу;
- узлы - ближайшие соседи узлов первого ранга, соответствующие треугольникам, входящим в один и тот же кластер, отнесем ко второму рангу;
- узлы, соответствующие кластеру Ω_2^i отнесем к четвертому рангу;
- все остальные узлы отнесем к третьему рангу.

В зависимости от ранга узла r ($0 \leq r \leq 3$), уравнение (2.3) будет допускать различные аппроксимации.

Узел нулевого ранга обозначим (i_0, j_0) . Для него имеем

$$\begin{aligned} & c_v \rho \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{dU_{i_0j_0}}{dt} = \\ & = \frac{a}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{l=i_k-1/2}^{i_k+1/2} (\varphi_{i_0j_0,lj} h_{l,j,k-1} + \varphi_{i_0j_0,lk,j,k-1} h_{l_k,j,k-1}) - 6h_{i_0j_0} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $h_{ij} = h(U_{ij})$, а суммирование под знаком второй суммы производится с шагом $1/2$. Кроме того, по свойству угловых коэффициентов [6]

$$\varphi_{i_0j_0,lj} = \frac{1}{a/2} \int_{\gamma_{i_0j_0}} \int_{\gamma_{ij}} \varphi(\xi, x) d\sigma_\xi d\sigma_x = \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

Таким образом (2.4) можно преобразовать к виду:

$$\bar{c}_0 \frac{dU_{i_0j_0}}{dt} = a\Delta_0^a h_{ij}, \quad (2.6)$$

где $\bar{c}_0 = \frac{c_v \rho \sqrt{3}}{2}$, а Δ_0^a - следующая разностная аппроксимация оператора Лапласа

$$\Delta_0^a h_{ij} = \left(\sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \sum_{l=i_k-1/2}^{i_k+1/2} (h_{l,j,k-1} + h_{l_k,j,k+1}) - 6h_{i_0j_0} \right) / a^2.$$



Перейдём к узлам первого ранга.

Рассмотрим узел, соответствующий положению $(i_k + 1; j_k - 1)$, на рис.3, обозначив его (i_l, j_l) .

Проделав те же действия, что и для узла (i_0, j_0) , будем иметь

$$\bar{c}_l \frac{dU_{l,l}}{dt} = a\Delta_l^q h_{l,l}, \quad \Delta_l^q h_{l,l} = \frac{\sum_{k=1}^2 h_{i_k+1/2, j_k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{s=3/4}^{5/4} h_{i_k+s, j_k-2} - 5h_{l,l}}{(a/2)^2}, \quad (2.7)$$

где $\bar{c}_l = \frac{c_{l-1}}{2} \forall l \geq 1$, а суммирование по s производится с шагом $\frac{1}{4}$.

Для узла $(i_k + \frac{3}{2}, j_k - 2)$ аппроксимация лапласиана Δ_l^q будет выглядеть так :

$$\Delta_l^q h_{l,l} = \frac{\frac{1}{2} \left(\sum_{s=-1/8}^{1/8} \sum_{m=-1/2}^{1/2} h_{i_k+\frac{3}{2}+s, j_k-2+m} + \sum_{l=-1/4}^{1/4} h_{i_k+\frac{3}{2}+l, j_k-2} \right) - 6h_{l,l}}{(a/4)^2}, \quad (2.8)$$

причём шаг по s в равенстве (2.8) равен $1/4$, шаг по l равен $1/2$, шаг по m равен 1 .

Рассмотрим узлы 2-го ранга.

Для определенности зафиксируем узел $(i_k - \frac{1}{2}, j_k - 1)$ на рис.3, обозначив его (i_{ll}, j_{ll}) .

Аппроксимация уравнения (2.3) примет вид

$$\bar{c}_l \frac{dU_{ll,ll}}{dt} = a\Delta_{ll}^a h_{l,l}, \quad (2.9)$$

$$\Delta_{ll}^a h_{l,l} = \frac{\frac{1}{2} h_{i_k+1/2, j_k-2} + (h_{i_k, j_k} + h_{i_k, j_k-1}) + \sum_{k \in K} h_{i_k-1, j_k-1} + \frac{1}{2} \sum_{s=1/4}^{3/4} h_{i_k-s, j_k-2} - 4h_{ll,ll}}{(a/2)^2}, \quad (2.10)$$

$K = \{1, 3\}$.

По аналогии нетрудно восстановить вид Δ_{ll}^q для узлов 2-го ранга, соответствующих кластеру 2-го поколения.

Наконец, для узлов 3-го ранга (к примеру $(i_k; j_k - 1)$) будем иметь

$$\bar{c}_l \frac{dU_{lll,lll}}{dt} = a\Delta_{lll}^a h_{l,l} \quad (2.11)$$

$$\Delta_{lll}^a h_{l,l} = \frac{h_{i_k-1/2, j_k-1} + 2h_{i_k, j_k} + h_{i_k+1/2, j_k-1} + \frac{1}{2} \sum_{s=-1/4}^{1/4} h_{i_k+s, j_k-2} - 4h_{lll,lll}}{(a/2)^2}, \quad (2.12)$$

Объединяя уравнение (2.8) с системами (2.10)-(2.11), после некоторых преобразований мы приходим к системе

$$\bar{c}_l \frac{dU_{l,l}}{dt} = a\Delta^a h_{l,l} \quad x_{l,l} \in \Omega_a, \quad (2.13)$$

где Δ^a - конечно-разностная аппроксимация оператора Лапласа на квазиравномерной треугольной сетке.

Отметим, что эта аппроксимация (с точностью до множителя перед значениями функции $h(U)$ в "нецентральных" узлах) совпадает с сеточным аналогом её лапласиана, определённым на Ω_a проекционным методом на базисе из



пирамидальных функций (для равномерной сетки этот способ был продемонстрирован в [8]).

Присоединим к (2.12) граничные условия

$$U_{ij} = u_c, \quad x_{ij} \in \partial\Omega_a; \quad (2.14)$$

и начальные значения

$$U_{ij}(0) = U_{ij}^0 = \sum_{i=0}^2 \left(\sum_{j=1}^{J_i} \frac{1}{\Delta_i} \int_{\Omega_{ij}} u^0(x) dx / J_i \right) / 3. \quad (2.15)$$

Получим полудискретную квазилинейную задачу (2.5)-(2.7), решив которую мы будем иметь значения $U_{ij}(t)$, являющиеся приближением к средним значениям температур треугольных тел Ω_{ij} .

Заключительные замечания.

Указанная схема дискретизации применима к любым замкнутым системам, состоящим из тел выпуклого сечения, для которых выполнено условие (1.1). Изменения будут претерпевать лишь коэффициенты в выражениях для операторов семейства Δ^a . Эти коэффициенты будут зависеть от геометрических инвариантов излучения, получаемых в (2.5). Кроме того, следуя [7], можно показать, что вид уравнения (2.9) не изменится, если допустить в телах наличие полостей с гладкой границей (преобразуется лишь величина \bar{c}).

Отметим, что возможен также более точный (но и более трудоёмкий) путь дискретизации задачи (1.2)-(1.5), основанный на галёркинской схеме. При этом в качестве базисных функций выгоднее использовать вейвлеты, отвечающие разным масштабам кластеров [9].

Вопрос об оценке близости решений исходной (1.2)-(1.5) и дискретизированной (2.5)-(2.20) задач выходит за рамки данной статьи. Его можно исследовать методами, предложенными в [4].

Автор выражает признательность профессору А.А. Амосову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 06-08-96312

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Осреднение процесса передачи тепла при наличии излучения // Дифференц. уравнения, 1981. Т.17, № 10. с. 1765-1773.
2. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднения дифференциальных операторов. - М., Наука, 1993. 464 с.
3. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003. - 376 с.
4. Амосов А.А. Полудискретные и асимптотические приближения к решению задачи переноса тепла в системе экранов при наличии излучения // Сб. трудов XII Всеросс. школы-семинара "Современные проблемы математического моделирования", Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2007. С.8-21.
5. Блох А. Г., Журавлев Ю. А., Рыжков Л. Н. Теплообмен излучением: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.
6. Амосов А.А. Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // Дифференц. уравнения, 2005, Т.41, №1, с. 93-104
7. Амосов А. А., Богатов Е. М., Савина Ю. В. Полудискретное приближение к задаче нагрева излучением периодической системы труб // Математические методы в технике и технологиях. Сб. трудов XXI Международ. науч. конф.: в 10 т. Т.1 Секция 1/ под общ. ред. В.С.Балакирева. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2008. с.100-102



8. Макаров В.Л., Макаров С.В. О точности разностных схем для квазилинейных эллиптических уравнений в ромбе с решениями из класса $W_2^1(\Omega)$ // Дифференц. уравнения, 1993, Т. 29, № 7, С.1216-1221.
9. Алтайский М.В., Крылов В.А. Вейвлет-галёркинские методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением параллельных алгоритмов // Вестник РУДН, Серия Прикладная и компьютерная математика. 2002, № 1, с. 98-106.

NUMERICAL METHOD OF A SOLVING OF THE RADIANT-CONDUCTIVE HEAT EXCHANGE PROBLEM IN THE FRACTAL GEOMETRY MEDIUM

E.M. BOGATOV

Starooskolsky Technology Institute of Moscow State Institute of Steels and Alloys

e-mail: embogatov@inbox.ru

A plane problem of the radiation-conductive heat transfer in the black approximation in the heterogeneous two-phase medium is considered. A gaseous medium is accepted as transparent and the disposition of a hard phase connectedness components has a fractal character here.

A half- discrete approximation to this problem basing on A.A.Amosov method is constructed (searching function replace by piecewise constant in the each moment of time function). A view of the approximation operator and initial boundary value problem is given for the set consists of decreasing size triangles.

Key words: thermal radiation, heterogeneous medium, half- discrete approximation, fractal geometry, parabolic problem, heat equation, two-phase medium, quasi-regular net