УДК 517.983

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ АДАМАРА

А.В.ГЛУШАК, Т.А.МАНАЕНКОВА

Белгородский государственный университет

e-mail: glushak@bsu.edu.ru

В работе изучается задача типа Коши для дифференциального уравнения, содержащего две различные дробные производные Адамара и доказывается равномерная корректность этой задачи с ограниченным оператором В .

Ключевые слова: дробные производные Адамара, однозначная разрешимость задачи типа Коши.

Пусть $M_q^{\alpha,\beta}$ – дифференциальный оператор вида

$$M_q^{\alpha,\beta} = {}^A D_{a+}^{\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}\, {}^A D_{a+}^{\beta}\right),$$

содержащий левосторонние дробные производные Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$ и $\beta \in (0,1)$ [1, с. 250], [2, с. 110]

$${}^A D_{a+}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\; t\frac{d}{dt}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{-\alpha} u(x)\frac{dx}{x}\ , \quad t \in (a,\infty),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, $a > 0$.

В банаховом пространстве X рассмотрим следующую задачу типа Коши с линейным замкнутым оператором B

$$M_q^{\alpha,\beta} u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\gamma} Bu(t), \qquad t > a, \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to a+} {}^A D_{a+}^{\beta-1} u(t) = u_0, \quad \lim_{t\to a+} {}^A D_{a+}^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}\, {}^A D_{a+}^{\beta} u(t)\right) = 0, \tag{1.2}$$

где

$${}^A D_{a+}^{\beta-1} u(t) = {}^A I_{a+}^{1-\beta} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{-\beta} u(x)\ \frac{dx}{x}$$

– левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $1-\beta$.

Специфика постановки начальных условий (1.2) состоит в том, что суммарный порядок производных, по сравнению с уравнением (1.1), уменьшается сначала на 1 в одном условии, а потом еще на α – в другом.

Кроме того, особенностью рассматриваемой задачи является наличие двух условий вида (1.2) даже в том случае, когда $0 < \alpha+\beta < 1$. Эта особенность объясняется равенством

$$ {}^{A}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{A}D_{a+}^{\beta}u(t) = {}^{A}D_{a+}^{\alpha+\beta}u(t) - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-\alpha-1}{}^{A}D_{a+}^{\beta-1}u(a)\ . $$

Например, в силу этого равенства уравнение (1.2) при $q = \gamma = 0$ может быть сведено к неоднородному уравнению

$$ {}^{A}D_{a+}^{\alpha+\beta}u(t) = Bu(t) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\ {}^{A}D_{a+}^{\beta-1}u(a)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-\alpha-1}, $$

и для выделения единственного решения следует задавать два условия, а именно: одно условие

$$ \lim_{t\to a}{}^{A}D_{a+}^{\beta-1}u(t) = u_0, $$

чтобы определить правую часть уравнения, и еще одно условие, чтобы получить задачу типа Коши.

Метод сведения к неоднородному уравнению, по-видимому, менее удобен, т.к. он требует отдельного рассмотрения каждого из случаев $0 < \alpha+\beta \le 1$ и $1 < \alpha+\beta < 2$.

Заметим, что при $B = 0$ и ненулевых начальных условиях, задача (1.1), (1.2) принимает вид

$$ {}^{A}D_{a+}^{\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}{}^{A}D_{a+}^{\beta}u\right)(t) = 0, $$

$$ \lim_{t\to a+}{}^{A}D_{a+}^{\beta-1}u(t) = u_0, \quad \lim_{t\to a+}{}^{A}D_{a+}^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}{}^{A}D_{a+}^{\beta}u(t)\right) = u_1, $$

и ее решением является функция

$$ u(t) = \frac{u_0}{\Gamma(\beta)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} + \frac{\Gamma(\alpha-q)u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-q)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-q-1}, $$

что также подтверждает необходимость двух начальных условий.

Примеры решения некоторых конкретных дифференциальных уравнений с дробными производными Адамара могут быть найдены в [2, 3].

Определение 1 . *Решением задачи (1.1), (1.2) называется непрерывная при $t > a$ функция $u(t)$ такая, что ${}^{A}I_{a+}^{1-\beta}u(t)$ и ${}^{A}I_{a+}^{1-\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q}{}^{A}D_{a+}^{\beta}u(t)\right)$ представляют собой непрерывно дифференцируемые при $t > a$ функции, функция $u(t)$ принимает значения из $D(B)$ и удовлетворяет (1.1), (1.2).*

Определение 2 . *Задача (1.1), (1.2) называется равномерно корректной, если существует заданная на X, коммутирующая с B операторная функция $\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)$ и числа $M > \frac{1}{\Gamma(\beta)}$, $\omega \ge 0$ такие, что для любого $u_0 \in D(B)$ функция $\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0$ является ее единственным решением, и при этом для $\mu = \alpha+\beta+\gamma-q$,*

$$ \left\|\Gamma(\beta)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\beta}\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0\right\| = O\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\right)\|Bu_0\|, \quad t \to a, \qquad (1.3) $$

$$ \left\|\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)\right\| \le M\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}t^{\omega}. \qquad (1.4) $$

Согласно определению 2, задача (1.1), (1.2) равномерно корректна, если решение этой задачи существует, единственно и, как следует из (1.4), непрерывно зависит от начальных данных равномерно по t из любого компакта в (a, ∞). Помимо этого определение 2 содержит дополнительную информацию о порядке стремления решения к начальному элементу (соотношение (3)) и о его поведении при $t \to a$ и $t \to \infty$ (неравенство (1.4)). Эти дополнительные свойства решения удается установить в рассматриваемом далее случае.

В настоящей работе изучается задача типа Коши для дифференциального уравнения, содержащего две различные дробные производные Адамара. Доказывается равномерная корректность задачи (1.1), (1.2) с ограниченным оператором.

Пусть далее $L(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X.

Теорема 1 . *Пусть $B \in L(X)$ и параметры задачи (1.1), (1.2) удовлетворяют неравенствам $\beta + \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma - q > 0$, $\gamma \le q$. Тогда задача (1.1), (1.2) равномерно корректна и при этом*

$$\Phi^{\alpha,\beta}_{\gamma,q}(t)u_0 = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{l-1}\frac{\Gamma(\beta+\gamma+j\mu)\Gamma(\mu+j\mu)}{\Gamma(q+\mu+j\mu)\Gamma(\beta+\mu+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{l\mu+\beta-1}B^l u_0 , \qquad (1.5)$$

где $\mu = \alpha + \beta + \gamma - q > 0$.

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения (1.1) оператор ${}^A I^{\alpha}_{a+}$ дробного интегрирования порядка α. Учитывая второе из условий (1.2), получим

$${}^A D^{\beta}_{a+}u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-q}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\gamma}Bu(x)\frac{dx}{x} ,$$

а учитывая первое, будем иметь

$$u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}Bu(s)\frac{ds}{s} .(1.6)$$

Дальнейшее доказательство будем осуществлять методом последовательных приближений. Пусть

$$u_0(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} ,$$

$$u_m(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}Bu_{m-1}(s)\frac{ds}{s} .$$

Используя интеграл 2.2.4.8 из [3]

$$\int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds=\tau^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta),\qquad \tau, \mathrm{Re}\ \alpha, \mathrm{Re}\ \beta>0$$

при $m=1,2,\ldots$ находим

$$u_1(t)=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma+\beta-1}Bu_0\frac{ds}{s}=$$

$$=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}+\frac{B(\alpha,\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta+\gamma-q-1}\frac{dx}{x}\ Bu_0=$$

$$=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}+\frac{B(\alpha,\beta+\gamma)B(\beta,\alpha+\beta+\gamma-q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1}Bu_0=$$

$$=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}+\frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-q)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+2\beta+\gamma-q)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1}Bu_0,$$

$$u_2(t)=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}B\times$$

$$\times\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}+\frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\mu+\beta)}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1}Bu_0\right)\frac{ds}{s}=$$

$$=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}+\frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\mu+\beta)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1}Bu_0+$$

$$+\frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\mu)\Gamma(\alpha+2\beta+2\gamma-q)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\mu+\beta)\Gamma(2\alpha+2\beta+2\gamma-q)\Gamma(2\mu+\beta)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+2\beta+\gamma-q-1}B^2u_0,\ \ldots,$$

что в общем случае приводит к формуле

$$u_m(t)=u_{m-1}(t)+\frac{\prod_{j=1}^m\Gamma(\beta+\gamma+(j-1)\mu)\Gamma(j\mu)(\ln t-\ln a)^{m\mu}B^m u_0}{\Gamma(\beta)\prod_{j=1}^m\Gamma(\mu+q+(j-1)\mu)\Gamma(\beta+\mu+(j-1)\mu)}.$$

Отметим, что в написанных выше соотношениях для сходимости интегралов нужны условия $\beta+\gamma>0$, $\mu=\alpha+\beta+\gamma-q>0$.

Отсюда в пределе при $m\to\infty$ имеем следующее представление искомого решения задачи (1.1), (1.2):

$$\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{l-1}\frac{\Gamma(\beta+\gamma+j\mu)\Gamma(\mu+j\mu)}{\Gamma(q+\mu+j\mu)\Gamma(\beta+\mu+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{l\mu+\beta-1}B^l u_0,$$

что может быть установлено непосредственной проверкой.

Докажем теперь справедливость соотношений (1.3) и (1.4). Действительно, из (1.5) следует, что

$$\left\|\Gamma(\beta)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\beta}\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0-u_0\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\frac{\Gamma(\beta+\gamma+j\mu)\Gamma(\mu+j\mu)}{\Gamma(q+\mu+j\mu)\Gamma(\beta+\mu+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu}B^iu_0\right\|=$$

$$=O\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\right)\|Bu_0\|,\qquad t\to a.$$

Таким образом, равенство (1.3) установлено. Докажем далее оценку (1.4). Из (1.5) выводим неравенство

$$\left\|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\beta}\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0-u_0\right\|\le$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(\beta)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\mu)\cdots\Gamma(\beta+\gamma+(i-1)\mu)\Gamma(i\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\mu+q)\cdots\Gamma(\beta+(i-1)\mu)\Gamma(i\mu+q)\Gamma(i\mu+\beta)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu}\|B\|^i.$$

Для $j=0,1,\cdots,i-1$ справедливо неравенство [4, с.73, соотношение (14)]

$$\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(j\mu-\gamma)}<1, \tag{1.7}$$

поэтому для достаточно больших t имеем

$$\left\|\left(ln\frac{t}{a}\right)^{1-\beta}\Phi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_0-u_0\right\|\le M_1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\|B\|^i}{\Gamma(i\mu+\beta)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu}=$$

$$=M_1E_{\mu,\beta}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\|B\|^{1/\mu}\right)\le$$

$$\le M_2\exp\left(\omega\ln\frac{t}{a}\right)=Mt^{\omega},\quad \omega>\|B\|^{1/\mu^2},$$

при этом мы использовали асимптотическое равенство

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{\alpha}z^{(1-\beta)/\alpha}\exp(z^{1/\alpha})+O(1/|z|),\quad z\to\infty,\quad |\arg z|\le\frac{\alpha\pi}{2}, \tag{1.8}$$

которому удовлетворяет функция типа Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ (см. формулу (22) на с. 224 из [5]).

Следовательно, неравенство (1.4) установлено, и для доказательства равномерной корректности задачи (1.1), (1.2) с оператором $B\in L(X)$ осталось установить единственность решения этой задачи. Предположим, что есть два решения задачи (1.1), (1.2); тогда их разность, которую мы обозначим через $U(t)$, является решением задачи (1.1), (1.2) с двумя нулевыми условиями (1.2), учитывая которые, после интегрирования уравнения (1.1) получим

$$U(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}BU(s)\frac{ds}{s}\,.$$

Пусть $t\in[a,a+\delta]$, $\delta>0$, тогда

$$\|U(t)\|\le$$

$$\frac{\|B\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\;\int_a^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}\frac{ds}{s}\;=$$

$$=\frac{B(\alpha,\gamma+1)\|B\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\int_a^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\gamma-q}\frac{dx}{x}\;=$$

$$=\frac{\|B\|\Gamma(\gamma+1)B(\beta,\alpha+\gamma-q+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\beta)}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\;\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}=$$

$$=\frac{\|B\|\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\gamma-q+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\mu+1)}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\;\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\le$$

$$\le M_0(\ln(1+\delta))^{\mu}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|.$$

Выбирая $\delta>0$ достаточно малым, получим

$$\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|\le\frac{1}{2}\max_{[a,a+\delta]}\|U(t)\|,$$

следовательно, $U(t)=0$ на $[a,a+\delta]$.

Далее покажем, что $U(t)=0$ на произвольном отрезке $[c,c+\delta]$. То есть, докажем, что если решение уравнения (1.1) удовлетворяет условиям

$${}^{A}D^{\beta-1}U(t)\Big|_{t\,\le\,c}=0,\qquad {}^{A}D^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q\,A}D^{\beta}U(t)\right)\Big|_{t\,\le\,c}=0\qquad(1.9)$$

при каком-то $c>a$, то оно обращается в нуль и на некотором промежутке $[c,c+\delta]$, где число $\delta>0$ будет выбрано, не зависящим от c.

Записав уравнение (1.1) в виде

$${}^{A}D^{\alpha}_{c+}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q\,A}D^{\beta}_{c+}U(t)\right)=\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\gamma}BU(t),$$

после интегрирования с учетом нулевых начальных условий (1.9) получим

$$U(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_c^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\int_c^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}BU(s)\frac{ds}{s}\,.$$

Пусть $t\in[c,c+\delta]$, тогда

$$\max_{[c,c+\delta]}\|U(t)\|\le\frac{\|B\|\max\limits_{[c,c+\delta]}\|U(t)\|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\;\int_c^t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q}\frac{dx}{x}\;\int_c^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma}\frac{ds}{s}\;.\qquad(1.10)$$

Используя формулу 2.2.6.1 из [3] и формулы 7.2.1.7, 2.21.1.20 из [6], вычислим интеграл

$$J(t) \ = \int_c^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q} \frac{dx}{x} \int_c^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma} \frac{ds}{s} \ =$$

$$= \int_c^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q} \frac{dx}{x} \int_{\ln\frac{c}{a}}^{\ln\frac{x}{a}} \left(\ln\frac{x}{a} - z\right)^{\alpha-1} z^{\gamma} dz \ .$$

Учитывая формулу 2.2.6.1 из [3] и вводя функцию $w(t) = \ln\frac{t}{a}$, получим

$$J(t) \ = w(c)^{\gamma} B(1,\alpha) \int_c^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{-q} \left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\alpha} {}_2F_1\left(1,-\gamma;\alpha+\right.$$

1;w(c)−w(x)w(c)dxx

После замены переменной $\tau = w(x)$ с учетом равенства $\mathrm{B}(1,\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, получим

$$J(t) \ = \frac{w(c)^{\gamma}}{\alpha} \int_{w(c)}^{w(t)} (w(t)-\tau)^{\beta-1} \tau^{-q} (\tau - w(c))^{\alpha} {}_2F_1\left(1,-\gamma;\alpha+1;\frac{w(c)-\tau}{w(c)}\right) d\tau =$$

$$\frac{w(c)^{\gamma+1}}{\alpha} \ \times$$

$$\times \ \int_{w(c)}^{1-w(c)/w(t)} \left(w(t) - \frac{w(c)}{1-z}\right)^{\beta-1} \left(\frac{w(c)}{1-z}\right)^{-q} \left(\frac{w(c)}{1-z} - w(c)\right)^{\alpha} {}_2F_1\left(1,-\gamma;\alpha+\right.$$

1;zz−1×

$$\times \ \frac{dz}{(1-z)^2} =$$

$$\frac{w(c)^{\alpha+\gamma-q+1} \ w(t)^{\beta-1}}{\alpha} \int_0^{1-w(c)/w(t)} \left(\frac{w(t)-w(c)}{w(t)} - z\right)^{\beta-1} (1-z)^{q-\alpha-\beta} z^{\alpha} \ \times$$

$$\times \ {}_2F_1(1,\alpha+\gamma+1;\alpha+1;z) \ dz = \frac{w(c)^{1-\beta+\gamma}\, \mathrm{B}(\alpha+1,\beta) \ (w(t)-w(c))^{\alpha+\beta}}{\alpha \ w(t)^{k+1-\beta}} \ \times$$

$$\times \ \ F_3\left(\alpha+\beta-q, 1, \beta, 1+\alpha+\gamma; 1+\alpha+\beta; 1-\frac{w(t)}{w(c)}, 1-\frac{w(c)}{w(t)}\ \right), \quad (1.11)$$

где

$$F_3(a,a',b,b';c;\omega,z) = \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{(a)_j (a')_l (b)_j (b')_l}{(c)_{j+l}} \cdot \frac{\omega^j z^l}{j!\ l!}.$$

Если $\gamma \le q$, то из (1.10), (2.6) следует неравенство

$$\max_{[c,c+\delta]} \|U(t)\| \le M_0 (\ln(1+\delta))^{\alpha+\beta} \max_{[c,c+\delta]} \|U(t)\|, \qquad (1.12)$$

где постоянная $M_0 > 0$ не зависит от c , так как

$$\left|1 - \frac{w(t)}{w(c)}\right| \le |1 - w(\delta)| = \left|1 - \ln\frac{\delta}{a}\ \right| \le \frac{1}{2} \ ,$$

если

$$a\sqrt{e} \le \delta \le a\sqrt{e^3} \ ,$$

и при этом

$$\left|1-\frac{w(c)}{w(t)}\right| \leq \left|1-\frac{1}{w(\delta)}\right| \leq \frac{1}{3} \quad .$$

Выбирая в (1.12) $\delta > 0$ достаточно малым, не зависящим от c , мы убеждаемся в том, что $U(t) = 0$ на $[c,\ c+\delta]$. Тем самым доказана единственность решения на любом конечном промежутке. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает, в частности, представление

$$\Phi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)u_0 = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} E_{\alpha+\beta,\beta}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta} B\right)u_0 \ ,$$

а также предельное представление при $\beta = 1$

$$\Phi_{0,0}^{\alpha,1}(t)u_0 = E_{\alpha+1,1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+1} B\right)u_0 \ .$$

Перейдем теперь к изучению задачи

$$M_q^{\alpha,\beta}u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\gamma} Bu(t), \qquad t > a, \tag{1.13}$$

$$\lim_{t\to a+} D_{a+}^{\beta-1}u(t) = 0, \quad \lim_{t\to a+} D_{a+}^{\alpha-1}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{q} D_{a+}^{\beta}u(t)\right) = u_1, \tag{1.14}$$

Определение 3 . *Задача (1.13), (1.14) называется равномерно корректной, если существует заданная на X, коммутирующая с B операторная функция* $\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)$ *и числа* $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ *такие, что для любого* $u_1 \in D(B)$ *функция* $\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1$ *является ее единственным решением, и при этом*

$$\left\|\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-q)}{\Gamma(\alpha-q)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1+q-\alpha-\beta}\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1 - u_1\right\| = O\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta+\gamma-q}\right)\|Bu_1\|,\ t\to a, \tag{1.15}$$

$$\left\|\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)\right\| \leq M\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-q-1} t^{\omega}. \tag{1.16}$$

Теорема 2 . *Пусть* $B \in L(X)$ *и параметры задачи (1.13), (1.14) удовлетворяют неравенствам* $\alpha - q > 0$, $\alpha+\beta+\gamma-q > 0$, $\gamma \leq q$. *Тогда задача (1.1), (1.2) равномерно корректна, и при этом*

$$\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1 = \frac{\Gamma(\alpha-q)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\left(u_1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(\mu-\gamma+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{i\mu} B^i u_1\right), \tag{1.17}$$

где $\mu = \alpha+\beta+\gamma-q > 0$.

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения (1.13) оператор дробного интегрирования и, учитывая условия (1.14), получим

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha-q)\ u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1} +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-q}\ \frac{dx}{x}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma} Bu(s)\ \frac{ds}{s}\ . \qquad (1.18)$$

Для дальнейшего доказательства применим метод последовательных приближений. Пусть

$$u_0(t)=\frac{\Gamma(\alpha-q)\ u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1}\ ,$$

$$u_m(t)=\frac{\Gamma(\alpha-q)\ u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1}\ +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\beta-1}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-q}\ \frac{dx}{x}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\gamma} Bu_{m-1}(s)\ \frac{ds}{s}\ .$$

Используя интеграл 2.2.4.8 [3], при $m=1,2,\dots$ находим

$$u_1(t)=u_0(t)+\frac{\Gamma(\alpha-q)\Gamma(\mu)\Gamma(\alpha-q+\mu)\ Bu_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu)\Gamma(\mu-\gamma)\Gamma(2\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{2\mu-\gamma-1};$$

$$u_2(t)=u_1(t)+\frac{\Gamma(\alpha-q)\Gamma(\alpha-q+\mu)\Gamma(\alpha-q+2\mu)\Gamma(\mu)\Gamma(2\mu)\ B^2u_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu)\Gamma(\alpha+2\mu)\Gamma(\mu-\gamma)\Gamma(2\mu-\gamma)\Gamma(3\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{3\mu-\gamma-1};\dots$$

что в общем случае приводит к формуле

$$u_m(t)=u_{m-1}(t)+\prod_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)\ B^m u_1}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma((j+1)\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{(m+1)\mu-\gamma-1}\ .$$

Отметим, что в написанных выше соотношениях для сходимости интегралов нужны условия $\alpha-q>0$, $\mu=\alpha+\beta+\gamma-q>0$.

Отсюда в пределе при $m\to\infty$ имеем следующее представление искомого решения задачи (1.13), (1.14)

$$\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1=\frac{\Gamma(\alpha-q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)}\ \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu-\gamma-1}\times$$

$$\times\left(u_1+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(\mu-\gamma+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{l\mu}B^l u_1\right).$$

Докажем теперь справедливость соотношений (1.15) и (1.16). Действительно, из (1.17) следует

$$\left\|\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-q)}{\Gamma(\alpha-q)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1+q-\alpha-\beta}\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)u_1-u_1\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{l=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{\Gamma(\alpha-q+j\mu)\Gamma(j\mu)}{\Gamma(\alpha+j\mu)\Gamma(\mu-\gamma+j\mu)}\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{l\mu}B^l u_1\right\|=O\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\right)\|Bu_1\|,$$

когда $t\to a$. Таким образом, равенство (1.15) установлено.

Докажем далее оценку (1.16). Из (1.17) выводим неравенство

$$\left\|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1+\gamma-\mu}\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)\right\| \le \frac{\Gamma(\alpha-q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\gamma)} \times$$

$$\times \left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha-q+\mu)\Gamma(\mu)\cdots\Gamma(\alpha-q+l\mu)\Gamma(l\mu)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{l\mu}\|B\|^{l}}{\Gamma(\alpha+\mu)\Gamma(2\mu-\gamma)\cdots\Gamma(\alpha+l\mu)\Gamma(\mu-\gamma+l\mu)}\right).$$

Учитывая неравенство (1.7), оценим

$$\left\|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1+\gamma-\mu}\Psi_{\gamma,q}^{\alpha,\beta}(t)\right\| \le M_1\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{l\mu}\|B\|^{l}}{\Gamma((l+1)\mu-\gamma)} =$$

$$= M_1E_{\mu,\mu-\gamma}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\mu}\|B\|^{1/\mu}\right) \le M_2exp\left(\omega\ln\frac{t}{a}\right) = Mt^{\omega}, \quad \omega > \|B\|^{1/\mu^2},$$

Поскольку единственность решения задачи (1.13), (1.14) уже установлена при доказательстве теоремы 1, то тем самым теорема 2 доказана.

В частности, если $B \in L(X)$, то

$$\Psi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)u_1 = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}B\right)u_1 =^{A} I_{a+}^{\alpha}\Phi_{0,0}^{\alpha,\beta}(t)u_1.$$

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06 - 08 - 96312

Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск, Наука и техника, 1987.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. - Elsevier. 2006.
3. Килбас А.А., Марзан А.А, Титюра А.А. Дробные интегралы и производные типа Адамара и дифференциальные уравнения дробного порядка // ДАН - 2003. - Т. 389, № 6. - С. 734 - 738.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. - М.: Наука, 1983.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. - М.: Наука, 1965.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. - М.: Наука, 1967.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М: Наука, 1986.
8. Иосида К. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1967.

CAUCHY-TYPE PROBLEM FOR AN ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATION WITH HADAMARD FRACTIONAL DERIVATIVES

A.V. GLUSHAK AND T.A. MANAENKOVA

Belgorod State University

e-mail: glushak@bsu.edu.ru

The well-posedness of a Cauchy-type problem with two Hadamard fractional derivatives and bounded operator is proved.

Key words: Hadamard fractional derivative, one-valued solvability of Cauchy problem.