УДК 533.72

К ВОПРОСУ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ С ОДНОРОДНЫМ ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

А.А. Стукалов

Белгородский государственный университет
308015, Белгород, ул. Победы, 85
e-mail: stykalov@bsu.edu.ru

В приближении Стокса проведено теоретическое описание стационарного движения нагретой аэрозольной частицы сферической формы в неизотермической газообразной среде, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей ее газообразной среды. В процессе решения гидродинамических уравнений получено аналитическое выражение для гидродинамической силы, действующей на равномерно нагретую аэрозольную частицу, с учетом зависимости вязкости и плотности от температуры.

Ключевые слова: гидродинамическое сопротивление, движение нагретых частиц в газе.

1. Постановка задачи. Движение нагретых частиц в вязких газообразных средах рассматривалось в ряде работ [1-5]. Под нагретой частицей понимают частицу, средняя температура поверхности которой по величине значительно превышает температуру окружающей среды. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы и т.д.

Нагретая поверхность оказывает значительное влияние на теплофизические характеристики окружающей среды и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности.

В настоящее время достаточно подробно рассмотрено движение твердых сферических частиц как при малых относительных перепадах в их окрестности, так и при значительных [1-5].

Рассмотрим движение твердой аэрозольной частицы в вязкой неизотермической газообразной среде, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности при малых числах Рейнольдса под действием некоторой силы, например, электромагнитной, термофоретической, диффузиофоретической и т.д. Если перейти в систему координат, связанной с частицей, то задача по существу сводится к задаче обтекания нагретой твердой частицы сферической формы плоскопараллельным потоком газа скоростью $\mathbf{U}_\infty$ ($\mathbf{U}_\infty \parallel OZ$).

При рассмотрении обтекания нагретой сферы вводятся следующие допущения: 1) все процессы, происходящие в системе частица – газ, рассматриваются в квазистационарном приближении, что возможно в силу малости времени тепловой релаксации частицы; 2) определяющими параметрами задачи являются коэффициенты c_{pe}, $\rho_{e\infty}, \mu_{e\infty}, \lambda_{e\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины – R, U_∞. Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации: число Рейнольдса $Re_\infty = \left(\rho_{e\infty} U_\infty R\right)/\mu_{e\infty} << 1$ и тепловое число Пекле – $Pe_\infty = \left(c_{pe} U_\infty R\, \rho_{e\infty}\right)/\lambda_{e\infty} << 1$, где R – радиус частицы [6-7], $U_\infty = \left|U_\infty\right|$ – характерная скорость (величина скорости набегающего потока); 3) движение частицы рассматривается при значительных (больших) относительных перепадах температуры. Под относительным перепадом температуры понимают разность температур между поверхностью частицы и областью вдали от нее. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_S - T_{e\infty})/T_{e\infty} << 1$, где T_S – средняя температура поверхности частицы. При выполнении этого неравенства коэффициенты молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотность можно считать постоянными величинами. Если $(T_S - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$, то относительный перепад температуры считается значительным. В этом случае уже нельзя считать эти величины постоянными. В работе при описании свойств газообразной среды рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры: $\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^{\beta}$, $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^{\alpha}$, $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^{\gamma}$, где $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty})$, $t_k = T_k / T_{e\infty}$, $k = e, i$ [8]; 4) коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа. Это ограничение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью по углу θ в системе «частица – газ» и считать, что вязкость связана только с температурой $t_{e0}(r)$, т.е. $\mu_e(t_e(r,\theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(r))$. Считая, при этом что $t_e(r,\theta) = t_{e0}(r) + \delta t_e(r,\theta)$, где $\delta t_e(r,\theta) << t_{e0}(r)$. Явный вид функций $t_{e0}(r)$ и $\delta t_e(r,\theta)$ определяются из решения конвективного уравнения теплопроводности с соответствующими граничными условиями; 5) частица образована однородным и изотропным по своим свойством веществом; 6) при описании нагретой частицы во внешних заданных полях используется гидродинамический подход [6-7].

В рамках сформулированных выше допущений уравнения для скорости и давления запишутся в виде [6-7]:

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_e\left[\frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\frac{\partial U_m^e}{\partial x_m}\right]\right), (m,k,j = 1,2,3) \qquad (1.1)$$

$$\operatorname{div}(\rho_e \mathbf{U}_e) = 0, \qquad (1.2)$$

где (x_1, x_2, x_3) декартовы координаты

Эта система гидродинамических уравнений решается со следующими граничными условиями в сферической системе координат (r,θ,φ)

$$r = R, \quad U_r^e = 0, \quad U_\theta^e = 0. \qquad (1.3)$$

$$r \to \infty, \ \mathbf{U}_e \to U_\infty \cos\theta \mathbf{e}_r - U_\infty \sin\theta \mathbf{e}_\theta, \ P_e \to P_{e\infty}. \qquad (1.4)$$

Помимо линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса (1.1) и непрерывности (1.2) с граничными условиями (1.3) – (1.4), необходимо также решить уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры вне и внутри частицы с соответствующими граничными условиями на ее поверхности. Это связано с тем, что частица нагрета. Разность температур между частицей и газообразной средой может стационарно поддерживаться, например, за счет выделения тепла при химических реакциях на поверхности частицы, за счет радиоактивного распада вещества частицы, внешним излучением и т.п. В частности, если на частицу падает поток монохроматического излучения (длина волны λ_0) интенсивностью I_0, то поглощаемая ею энергия равна $\pi R^2 I_0 K_\phi$, где R – радиус частицы, K_ϕ – фактор поглощения [9], и распределяется по объему сферы равномерно с плотностью q_i.

Это допущение справедливо в том случае, если коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности внешней среды и $\lambda_o >> R$.

Следовательно, к уравнениям (1.1) – (1.2) необходимо добавить уравнение теплопереноса вне и внутри частицы

$$\operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0, \tag{1.5}$$

$$\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i \tag{1.6}$$

с граничными условиями (1.7)

$$r = R, \qquad T_e = T_i,\ \ \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_{e\infty}^4), \tag{1.7}$$

отражающие равенство температур и непрерывности радиальных потоков тепла с учетом излучения на поверхности частицы; σ_0 – постоянная Стефана – Больцмана, σ – интегральная степень черноты тела [10]; $q_i = const$ – постоянная плотность тепловых источников, действующая внутри частицы [9].

Сила, действующая на частицу со стороны потока, определяется по формуле [6-7]

$$F_z = \int\limits_{(S)} \left(-P_e \cos\theta + \sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta \right) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{1.8}$$

Здесь σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, U_r^e и U_θ^e – компоненты тензора полных напряжений, радиальная и касательная компоненты массовой скорости U_e в сферической системе координат

$$\sigma_{rr} = \mu_e \left(2\frac{\partial U_r^e}{\partial y} - \frac{2}{3} div U_e \right),\ \ \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right),\ \ y = r/R -$$

обезразмеренная радиальная координата.

2. Поле скорости и распределение температуры. Определение силы сопротивления. Чтобы найти силу, действующую со стороны газа на твердую нагретую сферу, нужно знать распределения температуры, массовой скорости и давления в ее окрестности. Интегрируя уравнения (1.5) – (1.6) с соответствующими граничными условиями, получаем

$$t_e(y,\theta) = t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \tag{2.1}$$

$$t_i(y,\theta) = t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{D_0}{y} + \frac{1}{y}\int\limits_y^1 \psi_0 \, dy - \int\limits_y^1 \frac{\psi_0}{y} dy \right)^{\frac{1}{1-\omega}}, \tag{2.2}$$

где постоянные интегрирования определяются из соответствующих граничных условий на поверхности неравномерно нагретой частицы; $\Gamma_0 = t_S^{1+\alpha} - 1$;

$\psi_0 = -\dfrac{R^2}{2\lambda_{i\infty}} y^2 \dfrac{1+\omega}{T_{e\infty}} \displaystyle\int\limits_{-1}^{+1} q_i \, dx$, $D_0 = \dfrac{1+\omega}{4\pi R \lambda_{i\infty} T_{e\infty}} \displaystyle\int\limits_V q_i \, dV$, $t_S = T_S / T_{e\infty}$, T_S – средняя температура поверхности неравномерно нагретой частицы, определяемая из решения трансцендентного уравнения (2.3.3)

$$\frac{t_S^{1+\alpha}-1}{1+\alpha}=\frac{R^2}{3\,\lambda_{e\infty}T_{e\infty}}-\sigma_0\sigma_1\frac{R\,T_{e\infty}^3}{\lambda_{e\infty}}\left(t_S^4-1\right). \tag{2.3}$$

Перейдем теперь к нахождению полей скорости и давления. В сферической системе координат линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, описывающее распределение скорости и давления вне частицы (1.1) имеет вид [7]:

$$\frac{\partial P_e}{\partial y}=\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial y}+\frac{2}{y}\sigma_{rr}+\frac{1}{y}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{y}\sigma_{r\theta}-\frac{\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi}}{y}, \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial P_e}{\partial\theta}=\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial y}+\frac{3}{y}\sigma_{r\theta}+\frac{1}{y}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{y}\left(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi}\right). \tag{2.5}$$

Здесь $\sigma_{rr},\sigma_{r\theta},\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора напряжений в сферической системе координат и они равны

$$\sigma_{rr}=\mu_e\left(2\frac{\partial U_r^e}{\partial y}-\frac{2}{3}divU_e\right),\ \sigma_{\theta\theta}=\mu_e\left(\frac{2}{y}\frac{\partial U_\theta^e}{\partial\theta}+\frac{2}{y}U_r^e-\frac{2}{3}divU_e\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\mu_e\left(\frac{2}{y}U_r^e+\frac{2}{y}ctg\,\theta\,U_\theta^e-\frac{2}{3}divU_e\right),\ \sigma_{r\theta}=\mu_e\left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial y}+\frac{1}{y}\frac{\partial U_r^e}{\partial\theta}-\frac{U_\theta^e}{y}\right).$$

Решая систему уравнений (2.4) – (2.5) методом разделения переменных и, учитывая допущение 4), в конечном итоге получаем уравнений аналогичное [5]. В [5] проведен подробный анализ решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса и выражения для полей скорости и давления.

Зная выражения для полей скорости и давления, подставляя в (1.8), после интегрирования получаем следующее выражение для силы сопротивления сферы, внутри которой действуют источники тепла постоянной мощности:

$$\boldsymbol{F}_z=6\pi R\,\mu_{e\infty}U_\infty f_\mu\ \boldsymbol{n}_z,\qquad f_\mu=\frac{2N_2}{3N_1}, \tag{2.6}$$

где $N_1|_{y=1}=G_1G_2^I-G_2G_1^I$, $N_2|_{y=1}=G_1G_3^I-G_3G_1^I$, G_k^I – первая производная от соответствующих функций. Явный вид которых приведен в [5].

Чтобы оценить какой вклад внутренние источника тепла (нагрев поверхности) оказывает на силу сопротивления, можно рассмотреть наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело [8]. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной $\delta R << R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется с помощью формулы

$$q_i(r,\theta)=\begin{cases}-\dfrac{I_0}{\delta R}\cos\theta,\ \dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi,\ R-\delta R\le r\le R\\ 0,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases},$$

где I_0 – интенсивность падающего излучения.

На рис. 1 приведены значения функции f_μ от интенсивности падающего излучения I_0. Численные оценки проводились для частиц меди радиусом 100 *мкм*, взвешенных в воздухе при нормальных условиях.

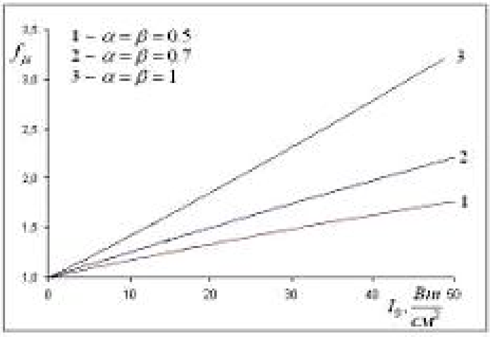

Рис.1. График зависимости функции f_μ от интенсивности падающего излучения I_0

Литература

1. Kassoy D.R., Adamson T.C., Messiter A.F. Compressible Low Reynolds Number around a Sphere //Phys. Fluids. 1966. Vol. 9. № 4. P. 671-681.
2. Щукин Е.Р., Малай Н.В. Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц //ИФЖ. 1988. Т. 54, № 4. С. 630-635.
3. Щукин Е.Р., Малай Н.В, Яламов Ю.И. Движение нагреваемых внутренними источниками тепла капель в бинарных газовых смесях //ТВТ. 1988. Т. 25, № 5. С. 1020-1024.
4. Берковский Б.М., Краков М.С., Никифоров И.В., Полевиков В.К. Гидродинамическое сопротивление эллипсоидальной капли при малых числах Рейнольдса //МЖГ. 1987. № 3. С. 4-8.
5. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде //СО РАН ПМТФ. 2008. № 1. С. 74 – 80.
6. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 630 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидромеханика. М.: Наука. 1986. 736 с.
8. Брейтшгайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия. 1966. 535 с.
9. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир. 1986. 660 с.
10. Шейндлин А.Е. Излучательные свойства твердых материалов. М.: Энергия. 1974. 471 с.

TO THE QUESTION ON HYDRODYNAMICAL RESISTANCE OF THE SPHERICAL PARTICLE WITH THE HOMOGENEOUS INTERNAL THERMAL EMISSION

A.A. Stukalov

Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia
e-mail: stykalov@bsu.edu.ru

The theoretical description of stationary movement of the heated up aerosol particle of the spherical form in not isothermal gaseous environment with intervals distributed heat sources of constant capacity inside is studied in the Stokes approximation.

While consideration of movement it was supposed, that the average temperature of a surface of a particle can differ from temperature of the gaseous environment surrounding it essentially. During the decision of the hydrodynamic equations analytical expression for the hydrodynamic force working on in regular intervals heated up aerosol particle is received, in view of dependence of viscosity and density from temperature.

Key words: hydrodynamic resistance, movement of the heated up particles in gas.