УДК 519.27

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА СЛАГАЕМЫХ С ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПУАССОНОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Ю.П. Вирченко*, М.И. Яструбенко

Белгородский государственный университет

Доказана локальная предельная теорема для распределения вероятностей случайного момента достижения заданного уровня m суммой независимых пуассоновских случайных величин в пределе больших значений m. Найдено, что асимптотически точное распределение вероятностей представляется в форме Вальда, полученной ранее для числа успехов в последовательности независимых испытаний.

Введение

Рассмотрим классическую задачу последовательного статистического анализа. Пусть имеется последовательность $\{\xi_j\,;\ j \in N\}$ независимых в совокупности, одинаково распределённых случайных величин. Пусть, далее,

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_j\,. \tag{1}$$

Введём на основе сумм η_n и заданного числа $m > 0$ случайную величину

$$\nu_m = \min\{n:\ \eta_n \geq m\}\,. \tag{2}$$

Требуется найти распределение вероятностей для случайного числа слагаемых ν_m, определяемого уровнем m. Эта задача уже для простейших модельных распределений вероятностей для случайных величин ξ не допускает точного решения. Исключением являются: решение Вальда для последовательности независимых испытаний, когда $\xi \in \{0,1\}$, $\Pr\{\xi = 1\} = p$ [1]; решение для случая геометрически распределённых случайных величин ξ, т.е. $\xi \in N_+ = N \cup \{0\}$ и $\Pr\{\xi = n\} = q\,p^n$, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$ [2].

В связи с этим возникает необходимость построения методов приближённого решения сформулированной статистической задачи. Особое значение при этом приобретают методы приближённого решения в условиях, когда параметр задачи m является большим, т.е. в этом случае возникает возможность находить приближённые решения как асимптотики точных решений при $m \to \infty$. В настоящей работе мы будем исследовать задачу именно в такой постановке для случая, когда случайные величины ξ являются пуассоновскими, т.е. $\xi \in N_+$,

$$Pr\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\,,\quad \lambda > 0\,.$$

* E-mail: virch@bsu.edu.ru

Производящая функция

Выведем общую формулу для решения поставленной задачи в случае, когда случайные величины ξ являются решёточными, а именно: будем считать, что $\xi \in N_+$.

Заметим, что из условия взаимной независимости случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, на основе формулы полной вероятности получаем

$$P_m(n) = \Pr\{\nu_m = l\} = \sum_{k=0}^{m-1} \Pr\{\eta_{l-1} = k\} \cdot \Pr\{\xi_l \geq m-k\}. \tag{3}$$

Пусть $Q(y)$ – производящая функция распределения вероятностей случайных величин ξ,

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \Pr\{\xi = k\}. \tag{4}$$

Тогда производящая функция для сумм η_n равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k \Pr\{\eta_n = k\} = [\,Q(y)\,]^n. \tag{5}$$

Используя этот факт, выразим производящую функцию

$$R_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} y^m \Pr\{\nu_m = n\}$$

через функцию $Q(y)$. Умножив уравнение (3) на y^m и просуммировав по m, получаем

$$R_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} y^m \sum_{k=0}^{m-1} \Pr\{\eta_{n-1} = k\} \cdot \Pr\{\xi_n \geq m-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} y^k \Pr\{\eta_{n-1} = k\} \sum_{m=k+1}^{\infty} y^{m-k} \Pr\{\xi_n \geq m-k\} =$$

$$= y\,[Q(y)]^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} \Pr\{\xi = l\} \sum_{m=0}^{l-1} y^m = \frac{y}{1-y}\,(1-Q(y))\,[Q(y)]^{n-1}. \tag{6}$$

С помощью производящей функции $R_n(y)$ можно выразить распределение вероятностей $\Pr\{\nu_m = n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ в общем случае решёточно распределённых случайных величин ξ в виде

$$\Pr\{\nu_m = n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} y^{-(m+1)} R_n(y)\, dy,$$

где замкнутый контур C_0 окружает точку $y = 0$ и настолько мал, что находится в области аналитичности функции $R_n(y)$ (для этого достаточно, чтобы он содержался внутри единичного круга).

Пуассоновское распределение величин ξ

Воспользовавшись формулой (2), найдём распределение вероятностей $P_m(n)$. Пусть

$$Pr\{\xi = l\} = \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}.$$

Тогда, ввиду безграничной делимости пуассоновского распределения, имеем

$$\Pr\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = k\} = \frac{(n\lambda)^k}{k!} \exp(-\lambda n). \tag{7}$$

Так как имеют место равенства

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{r+m}}{(r+m)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\lambda} dx_1 \ldots \int_0^{x_{m-1}} \frac{x_m^r}{r!} d x_m = \int_0^{\lambda} dx_1 \ldots \int_0^{x_{m-1}} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x_m^r}{r!} \right) d x_m =$$

$$= \int_0^{\lambda} dx_1 \ldots \int_0^{x_{m-1}} \exp(x_m) d x_m = \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-y)^{m-1} e^{\lambda y} dy,$$

то

$$\Pr\{\xi \geq m-k\} = \sum_{r=m-k}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m-k}}{(m-k-1)!} \int_0^1 (1-y)^{m-k-1} e^{\lambda y} dy.$$

Преобразуя правую часть в (3), используя полученную формулу и (7), находим

$$P_m(n) = \lambda\, e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[\lambda (l-1)]^k}{k!} \cdot \frac{\lambda^{m-k-1}}{(m-k-1)!} \int_0^1 (1-y)^{m-k-1} e^{\lambda y} dy =$$

$$= \lambda\, e^{-\lambda n} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{[\lambda\, (n-1)]^k}{k!} \cdot \frac{[\lambda\, (1-y)]^{m-k-1}}{(m-k-1)!} \right) e^{\lambda y} dy =$$

$$= e^{-\lambda n} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \int_0^1 (n-y)^{m-1}\, e^{\lambda y} dy. \tag{8}$$

Локальная предельная теорема

Докажем следующее утверждение.

Теорема. При $n, m \to \infty$, $n - m \to \infty$ таким образом, что величина $(m - \lambda\, n)\, n^{-1/2}$ остаётся ограниченной, имеет место асимптотически точная формула

$$P_m(n) \sim \lambda \frac{(\lambda\, n)^{m-1}}{(m-1)!} \exp(-\lambda\, n). \qquad (9)$$

Доказательство. Введём величину z, $m - 1 = z\,(\lambda\, n)^{1/2} + \lambda\, n$, которая остаётся ограниченной по условию теоремы при $n \to \infty$, $m \to \infty$. Тогда

$$(1-\frac{y}{n})^{m-1} = (1-\frac{y}{n})^{z(\lambda\, n)^{1/2}} (1-\frac{y}{n})^{\lambda\, n}$$

и, при переходе к пределу, получаем

$$\lim_{n \to \infty} (1-\frac{y}{n})^{m-1} = \lim_{n \to \infty} (1-\frac{y}{n})^{\lambda\, n} = \exp(-\lambda\, y),$$

так как

$$\lim_{n \to \infty} (1-\frac{y}{n})^{n^{1/2}} = 1.$$

Записав формулу (8) в виде

$$P_m(n) = \lambda\, e^{-\lambda n} \frac{(\lambda\, n)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^1 (1-\frac{y}{n})^{m-1} e^{\lambda y} dy,$$

при получении асимптотически точной формулы, перейдём к пределу $m, n \to \infty$ в коэффициенте, выражаемом интегралом. Переходя к пределу в подынтегральном выражении, что допустимо ввиду компактности области интегрирования, получим

$$\lim_{m,n \to \infty} \int_0^1 (1-\frac{y}{n})^{m-1} e^{\lambda y} dy = \int_0^1 e^{-\lambda y} e^{\lambda y} dy = 1.$$

Заключение

Для пуассоновского распределения справедлива локальная предельная теорема типа теоремы Муавра-Лапласа,

$$\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

где $l \to \infty$, $\lambda \to \infty$, $(l-\lambda)\lambda^{-1/2} = x$ – ограниченная величина (доказательство осуществляется на основе формулы Стирлинга). Тогда применение этой асимптотической формулы к (9), положив $l = m-1$, $\lambda \Rightarrow \lambda\, n$, даёт

$$P_m(n) \sim \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda\, n}}\exp(-\frac{x^2}{2}) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\, n}}\exp(-\frac{(m-1-\lambda\, n)^2}{2\lambda\, n}).$$

Определив $x = \frac{\lambda\, n}{m-1}$, $dx = \frac{\lambda}{m-1}$, полученную локальную предельную теорему имеем в форме Вальда [1]

$$P_m(n) \sim \sqrt{\frac{m-1}{2\pi\, x}}\exp[-\frac{m-1}{2}(x^{1/2} - x^{-1/2})^2]\, dx.$$

Однако в этом распределении имеется отличие от распределения Вальда: степень, в которой входит переменная x в предэкспоненте, равна (-1/2), а не (-3/2).

ЛИТЕРАТУРА

1. A.Wald, Sequential Analysis. New York, John Wiley & Sons, Inc. Charman & Hall, Ltd. London, 1947 (пер. на рус. яз. А. Вальд. Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960).

2. Вирченко, Ю.П. О локальной предельной теореме в задаче достижения заданного уровня суммой независимых случайных величин со случайным числом слагаемых / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Математические модели в образовании, науке и промышленности / Международная Академия наук высшей школы, С.-Петерб. отд. СПб., 2003. С. 51-54.

LOCAL LIMIT THEOREM OF RANDOM NUMBER OF RANDOM INDEPENDENT POISSON SUMMANDS HAVING THE GIVEN SUM

Yu.P. Virchenko, M.I. Yastrubenko

Belgorod State University

Local limit theorem of the probability distribution of random passage time of the given level *m* by sum of independent Poisson random values is proved. It is supposed that m is increased infinitely. The probability distribution with asymptotic accuracy is represented in the Wald form that is obtained earlier in the case of random statistically independent {0, 1}-sequences.