УДК 519.654

# УСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА*

***И.Г. Попов***

## ВВЕДЕНИЕ

Математическая модель линейного прибора с воздействием *f(x)* и откликом *u(y)* может быть представлена в виде следующего интегрального соотношения:

$$u(y)=\int_{a}^{b}R(y,x)f(x)dx, \tag{1}$$

где *R(y, x)* – ядро (аппаратная функция линейного прибора).

Реально при проведении экспериментов отклик регистрируется в дискретном наборе точек интервала изменений переменной *y*, то есть $y\in\{y_k\}$, $k=1,\dots,n$.

Для нахождения воздействия *f(x)* по известному отклику $\vec{u}=\{u(y_k)\}^T$ необходимо решить уравнение (1), т.е. приближенно решить интегральное уравнение Фредгольма первого рода (ИУФ1)[1,2].

Отклик часто можно зарегистрировать лишь приблизительно, т.е. с погрешностью. В связи с некорректностью задачи решения ИУФ1, малым погрешностям регистрации отклика могут соответствовать большие погрешности восстановленного входного сигнала. Существует множество публикаций, посвященных проблеме ее решения. Но даже наиболее известные из них не лишены недостатков, так, например. метод регуляризации Тихонова [3] использует априорную информацию об уровне шума, имеющегося в отклике.

В работах [4, 5] предложен новый метод восстановления воздействий линейных систем с известными ядрами по имеющейся информации о соответствующих воздействиях, отличающихся от известных [3].

Воздействие представляется в виде

$$f=f_1+f_2, \tag{2}$$

где для компоненты $f_1$ справедливо [7]

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k R_k(x), \tag{3}$$

$$R_k(x)=R(y_k,x),\ k=1,\dots,n.$$

На основе результатов теории пространства $L_2$ [6], в [5] показано, что в выходном сигнале сохраняется информация только о первой компоненте, а для второй выполняется условие ортогональности, и она теряется. Таким образом, имея отклик, можно восстановить только компоненту $f_1$ воздействия.

Коэффициенты $\vec{\alpha}$ ($\vec{\alpha}\equiv\{\alpha_k\}^T$) находятся по формуле

$$\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i\vec{q}_i}{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{m}p_i\vec{q}_i, \tag{4}$$

* Работа финансировалась в рамках гранта Белгородского государственного университета.

$$p_i = \frac{\gamma_i}{\lambda_i}, \ \vec{p} = \{p_i\}^T, \qquad (5)$$

где $\vec{q}_i, \lambda_i$ – собственные вектора и числа матрицы $A$, а $\gamma_i$ – проекции входного вектора $\vec{u}$ на собственные вектора матрицы $A$, $m$ – ранг матрицы $A$,

$$A = \{a_{ik}\}; \ i,k = 1,...,n, \qquad (6)$$

$$a_{ik} = (R_i, R_k). \qquad (7)$$

Формула (4) для определения коэффициентов $\alpha_k$ очевидно будет хорошо работать в случае отсутствия шума во входном векторе $\vec{u}$. В противном случае влияние шума сильно подействует на $\alpha_k$, т.к. при малых $\lambda$, $\gamma$ не будет мала, она будет содержать проекцию шума, и деление на малое $\lambda$ даст резкое увеличение коэффициентов $\alpha_k$. Таким образом, восстановление входного сигнала по формуле (3) в случае наличия погрешностей в векторе $\vec{u}$ будет невозможным.

## 1. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Предлагается минимизировать норму оценки воздействия $\hat{f}_1$

$$\left\|\hat{f}_1\right\|^2 = min, \qquad (8)$$

где из (3) можно получить

$$\left\|\hat{f}_1\right\|^2 = \left\|R\vec{\alpha}\right\|^T \left\|R\vec{\alpha}\right\| = \vec{\alpha}^T R^T R\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^T A\vec{\alpha}. \qquad (9)$$

С учетом (4), а также $A = QLQ^T$, где Q - матрица, столбцами которой являются собственные вектора матрицы A, а L – диагональная матрица, у которой на диагонали стоят собственные числа матрицы A, можно продолжить

$$\left\|\hat{f}_1\right\|^2 = \vec{\alpha}^T QLQ^T\vec{\alpha} = (Q\vec{p})^T QLQ^T Q\vec{p} = \vec{p}^T L\vec{p} = \sum_{i=1}^{m} p_i^2\lambda_i, \qquad (10)$$

тогда условие (8) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^2\lambda_i = \min. \qquad (11)$$

В качестве дополнительного условия можно потребовать

$$\sum_{i=1}^{m} (\hat{\gamma}_i - p_i\lambda_i)^2 = \varepsilon^2, \qquad (12)$$

где

$$\hat{\gamma}_i = (\vec{v}, \vec{q}_i), \qquad (13)$$

а $\varepsilon^2$ можно определить, исходя из следующих соображений:
регистрируемый отклик в реальных линейных системах имеет вид

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{r}, \ \vec{v} = \{v_i\}^T, \qquad (14)$$

где $\vec{r}$ – шумовая составляющая, которую можно записать в виде

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} k_i\vec{q}_i. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14), а (14) в свою очередь в (13), получаем

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_i = \gamma_i + k_i, & i = 1,...m \\ \hat{\gamma}_i = k_i, & i = m+1,...n \end{cases} \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{\gamma}_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \hat{\gamma}_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} k_i^2 \quad (17)$$

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{m} (\hat{\gamma}_i - \gamma_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} k_i^2 . \quad (18)$$

Если предположить, что $k_i$ одинаково распределены для всех i=1,…,n, то можно провести замену

$$\sum_{i=a}^{b} k_i^2 \approx (b-a+1)\overline{k^2} . \quad (19)$$

Теперь с учетом (19) и (17), (18) можно записать в виде

$$\varepsilon^2 = \frac{m}{n-m}\left( \sum_{i=1}^{r} v_i^2 - \sum_{i=1}^{m} \hat{\gamma}_i^2 \right). \quad (20)$$

Таким образом, не имея априорной информации о входном воздействии, а исходя только из отклика $\vec{v}$, можно оценить уровень шума (20).

Учитывая (11) и (12), можно выписать функцию Лагранжа

$$L(\vec{p}) = \mu \sum_{i=1}^{m} p_i^2 \lambda_i + \sum_{i=1}^{m} (\hat{\gamma}_i - p_i \lambda_i)^2 , \quad (21)$$

где $\mu$ – множитель Лагранжа.

Дифференцируя (21), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 . \quad (22)$$

Подставив (21) в (22), и произведя несложные преобразования, получаем выражение для оценок $p_i$ и $\mu$

$$\hat{p}_i = \frac{\hat{\gamma}_i}{\mu + \lambda_i} , \quad (23)$$

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\gamma}_k^2}{(\lambda_k + \mu)^2}}} . \quad (24)$$

В коэффициентах $\hat{p}_i$, полученных из (23), влияние шума учтено, и их можно использовать в (4) для дальнейших процедур восстановления входного сигнала.

Следует отметить, что в асимптотическом случае, при ε=0, по формуле (24), μ=0, а значит $\hat{p}_i = p_i$, что обеспечивает точное восстановление компоненты $f_1$.

Итак, алгоритм приближенного решения ИУФ1 принимает вид:

1. По формулам (6), (7) насчитать матрицу А.
2. Найти все ненулевые собственные числа $\lambda_i$, и соответствующие им собственные вектора $q_i$ матрицы А одним из численных методов.
3. Найти проекции отклика на собственные вектора $\gamma_i$ по формуле (13).
4. По формуле (20) найти составляющую шума $\varepsilon^2$ .
5. Решая нелинейное уравнение (24), найти μ.

6. Найти коэффициенты $\alpha_k$ по формуле (4), используя вместо $p_i$ их оценки $\hat{p}_i$, которые в свою очередь находятся из (23).

7. Входной сигнал найти, используя (3).

## 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Используя вышеописанный алгоритм, была написана процедура *pro2* на языке программирования С++. Также была переведена с АЛГОЛ-60 на С++ процедура *tikh1* (процедура решения ИУФ1 методом регуляризации Тихонова), взятая из [7].

В экспериментах задавались точные решения *f(x)* и ядра *R(y,x)* в аналитическом виде. Путем численного интегрирования были найдены правые части *u(y)* уравнения (1) в дискретных точках. С помощью датчика псевдослучайных чисел в *u(y)* были внесены ошибки, с получением *v(y)*. Вносимые ошибки имели распределение гаусса, которое часто реализуется в реальных шумах. Затем были осуществлены восстановления входных сигналов процедурами *pro2* и *tikh1* с использованием *v(y)* и *R(y, x)*.

Шум моделировался, как псевдослучайные числа с дисперсией

$$\Delta^2 = q^2\|\bar{u}\|^2, \tag{25}$$

где $q$ – задается.

**Пример** (взят из [3])

$$f(x)=\begin{cases}\left\{\left[1-\left(\dfrac{x}{0.85}\right)^2\right]^2+0.5\sin^4\left(\dfrac{\pi x}{0.85}\right)\cos\left(\dfrac{6.5\pi x}{0.85}\right)\right\}\left(1-\dfrac{x}{4}\right), |x|\le 0.85\\ 0, |x|\ge 0.85\end{cases}$$

$$R(y,x)=\sqrt{\frac{59.9}{\pi}}e^{-\frac{59.9(y-x)^2}{1+y^2}}$$

$a = -0.85,\ b = 0.85\ -0.85<y_i<0.85$; отклик считался для 100 точек.

Относительная ошибка восстановления сигнала считалась по формуле

$$\delta = \frac{\|\hat{f}_1 - f\|}{\|f\|}, \tag{26}$$

т.к. для такого воздействия и ядра $f_1 \approx f$, и $f_2$ можно пренебречь.

В таблице 1 показаны значения некоторых параметров, соответствующие собственным числам (q=0.01). Для заданного ядра матрица A имеет 30 ненулевых собственных чисел ($\lambda_i > 10^{-10}$). Можно заметить, как подавлены $\hat{p}_i$, $\hat{p}_i^2\lambda_i$, $\hat{p}_i\lambda_i$ по сравнению соответственно с $p_i$, $p_i^2\lambda_i$, $\hat{\gamma}_i$, при уменьшении $\lambda_i$.

Таблица 1

| I | $\lambda_i$ | $p_i$ | $\hat{p}_i$ | $\hat{p}_i^2\lambda_i$ | $p_i^2\lambda_i$ без шума | $\hat{\gamma}_i$ | $\hat{p}_i\lambda_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.60E+1 | 7.68E-2 | 7.67E-2 | 3.88E-1 | 3.90E-1 | 5.07E+0 | 5.06E+0 |
| 2 | 6.50E+1 | 5.72E-3 | 5.71E-3 | 2.12E-3 | 2.21E-3 | 3.72E-1 | 3.71E-1 |
| 3 | 5.28E+1 | 7.53E-2 | 7.50E-2 | 2.97E-1 | 2.99E-1 | 3.97E+0 | 3.96E+0 |
| 4 | 4.38E+1 | 3.83E-3 | 3.82E-3 | 6.40E-4 | 5.74E-4 | 1.68E-1 | 1.68E-1 |
| 5 | 3.36E+1 | 2.80E-3 | 2.79E-3 | 2.62E-4 | 2.22E-4 | 9.41E-2 | 9.38E-2 |
| 6 | 2.42E+1 | 9.35E-4 | 9.32E-4 | 2.10E-5 | 1.57E-5 | 2.27E-2 | 2.26E-2 |
| 7 | 1.64E+1 | 5.96E-3 | 5.92E-3 | 5.77E-4 | 6.18E-4 | 9.80E-2 | 9.74E-2 |
| 8 | 1.05E+1 | 2.58E-3 | 2.55E-3 | 6.88E-5 | 1.05E-4 | 2.72E-2 | 2.69E-2 |
| 9 | 6.37E+0 | 3.97E-2 | 3.91E-2 | 9.74E-3 | 9.86E-3 | 2.53E-1 | 2.49E-1 |
| 10 | 3.65E+0 | 2.29E-3 | 2.24E-3 | 1.82E-5 | 2.00E-5 | 8.36E-3 | 8.15E-3 |
| 11 | 1.97E+0 | 2.59E-2 | 2.48E-2 | 1.2[illegible]E-5 | 1.33E-3 | 5.11E-2 | 4.89E-2 |
| 12 | 1.01E+0 | 1.43E-2 | 1.31E-2 | 1.73E-4 | 2.16E-4 | 1.44E-2 | 1.32E-2 |
| 13 | 4.92E-1 | 2.36E-1 | 1.99E-1 | 1.95E-2 | 2.28E-2 | 1.16E-1 | 9.79E-2 |
| 14 | 2.27E-1 | 1.73E-2 | 1.23E-2 | 3.45E-5 | 4.25E-5 | 3.94E-3 | 2.80E-3 |
| 15 | 9.99E-2 | 2.71E-1 | 1.41E-1 | 1.97E-3 | 4.62E-3 | 2.71E-2 | 1.40E-2 |
| 16 | 4.18E-2 | 1.17E-1 | 3.62E-2 | 5.49E-5 | 2.21E-4 | 4.88E-3 | 1.52E-3 |
| 17 | 1.67E-2 | 8.88E-1 | 1.35E-1 | 3.06E-4 | 1.38E-2 | 1.48E-2 | 2.26E-3 |
| 18 | 6.35E-3 | 1.30E+0 | 8.29E-2 | 4.36E-5 | 2.97E-5 | 8.22E-3 | 5.26E-4 |
| 19 | 2.31E-3 | 3.51E+0 | 8.51E-2 | 1.67E-5 | 3.33E-3 | 8.09E-3 | 1.96E-4 |
| 20 | 8.02E-4 | 1.26E+1 | 1.08E-1 | 9.40E-6 | 6.81E-5 | 1.01E-3 | 8.68E-5 |
| 21 | 2.67E-4 | 2.00E+1 | 5.74E-2 | 8.79E-7 | 1.99E-3 | 5.34E-3 | 1.53E-5 |
| 22 | 8.52E-5 | 5.48E+1 | 5.03E-2 | [illegible].15E-7 | 6.88E-6 | 4.67E-3 | 4.28E-6 |
| 23 | 2.61E-5 | 3.38E+1 | 9.48E-3 | [illegible].34E-9 | 3.60E-4 | 8.79E-4 | 2.47E-7 |
| 24 | 7.65E-6 | 9.75E+2 | 8.04E-2 | [illegible].94E-8 | 4.51E-6 | 7.45E-3 | 6.15E-7 |
| 25 | 2.16E-6 | 2.33E+3 | 5.41E-2 | 6.32E-9 | 6.11E-5 | 5.02E-3 | 1.17E-7 |
| 26 | 5.85E-7 | 1.34E+4 | 8.46E-2 | 4.19E-9 | 5.54E-7 | 7.85E-3 | 4.95E-8 |
| 27 | 1.53E-7 | 6.04E+4 | 9.95E-2 | [illegible].51E-9 | 3.40E-7 | 9.23E-3 | 1.52E-8 |
| 28 | 3.84E-8 | 1.11E+5 | 4.61E-2 | 8.17E-11 | 7.93E-9 | 4.28E-3 | 1.77E-9 |
| 29 | 9.31E-9 | 1.67E+5 | 1.68E-2 | 2.61E-12 | 3.51E-7 | 1.55E-3 | 1.56E-10 |
| 30 | 2.18E-9 | 5.32E+6 | 1.30E-1 | 3.66E-11 | 7.53E-10 | 1.20E-2 | 2.82E-10 |

Были проведены серии по 200 восстановлений в каждой, при разных значениях q. Результаты усреднения приведены в таблице 2

Таблица 2

| **процедура** | **$\delta$, $q = 0.001$** | **$\delta$, $q = 0.01$** | **$\delta$, $q = 0.1$** | **$\delta$, $q = 1$** |
|---|---|---|---|---|
| ***pro2*** | 0.066 | 0.147 | 0.234 | 0.447 |
| ***tikh1*** | 0.090 ($\alpha \cong 10^{-4}$) | 0.183 ($\alpha \cong 10^{-5}$) | 0.268 ($\alpha \cong 0.1$) | 1 |

($\alpha$ – параметр регуляризации в методе Тихонова).

Процедуры тестировались и на других примерах, не приведенных в данной статье, и в каждом из них результаты процедуры *pro2* были лучше результатов, которые показывала процедура *tikh1*.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан новый устойчивый алгоритм вычисления приближенного решения ИУФ1, на основе вариационного принципа (8), (11) с учетом (13). Показана его эффективность в сравнении с методом регуляризации Тихонова, а также устойчивость к влиянию погрешностей регистрации отклика.

Алгоритм не использует априорных предположений о входном воздействии, или уровне шума в отклике. Это отличает его от большинства других методов, в частности метода Тихонова, в котором на основании априорных предположений ищется параметр регуляризации $\alpha$.

**Библиографический список**

1. Алексидзе, М. А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач [Текст] / М. А. Алексидзе. – М. : Наука, 1991. – 352 с.
2. Смирнов, В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – Т.4, ч.1. – 336 с.
3. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 285 с.
4. Жиляков, Е. Г. О вычислении приближенных решений интегральных уравнений Фредгольма первого рода с использованием эмпирических данных [Текст] / Е. Г. Жиляков // Дифференциальные уравнения. – 2003. – № 7.
5. Жиляков, Е. Г. О восстановлении сигналов [Текст] / Е. Г. Жиляков // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47, № 1. – С. 1-6.
6. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике [Текст] / К. Ректорис. – М. : Мир, 1985. – 589 с.
7. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы [Текст] : справ. пособие / А. Ф Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наук. думка, 1986. – 541 с.

УДК 628.511:51.001.57

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЫЛЕГАЗОВЫХ ПОТОКОВ В ПЫЛЕУБОРОЧНЫХ НАСАДКАХ СИСТЕМ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ВАКУУМНОЙ ПЫЛЕУБОРКИ

*К. И. Логачев, С. В. Староверов, А. Ю. Феоктистов*

## ВВЕДЕНИЕ

Удаление осевшей пыли и просыпи на предприятиях стройматериалов осуществляют системы централизованной вакуумной пылеуборки (ЦПУ), имеющие высокую производительность и хорошие санитарно-гигиенические характеристики. Однако их широкому распространению препятствуют сложности с расчетом и проектированием элементов этих систем, что отрицательно сказывается на эффективности, экономичности и надежности работы установок в целом. Наибольшие сложности возникают с расчетом и проектированием пылеуборочных насадков, что обусловлено недостаточной изученностью рабочего процесса эвакуации частиц с убираемой поверхности и отсутствием достаточных теоретических обоснований выбора параметров основных конструктивных элементов насадков, влияющих на эффективность процесса уборки.

Целью настоящей работы является разработка математической модели и алгоритма ее численной реализации для расчета пылегазовых потоков в насадках систем вакуумной пылеуборки, а также рекомендаций по проектированию пылеуборочных насадков систем ЦПУ.