УДК 517.977.52

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА ВЛОЖЕНИЯ СРЕДСТВ СТРАТЕГИИ СОЗДАНИЯ НАКОПИТЕЛЬНЫХ ФОНДОВ

М. Ф. Тубольцев

ВВЕДЕНИЕ

Существующие в настоящее время многочисленные способы финансирования инвестиционных проектов ориентированы, главным образом, на заимствования необходимых средств (долгосрочные кредиты и займы, лизинг, облигации). Это во многом связано с настоятельной потребностью получить необходимые для инвестиций средства как можно быстрее. Надежды получить от инвестированных средств такую же скорую отдачу часто не оправдываются, и если не все вопросы привлечения и возврата средств были всесторонне и обстоятельно проработаны, то вполне может потребоваться заимствование средств уже для обслуживания первоначальных финансовых обязательств. Существующий опыт обслуживания подобных финансовых обязательств (особенно внешних) показывает, что этот «рекурсивный» процесс часто бывает и значительно более длительным, чем первоначально предполагалось, и более дорогостоящим, снижая эффективность инвестиционного проекта в целом. Особенно обременительными подобные заимствования являются в социальных проектах небольших муниципальных образований, где, вследствие некоммерческого характера подобных проектов, отсутствует возможность возврата вложенных средств из будущих доходов. Поэтому необходимость возврата заимствований из муниципального бюджета, что создает дополнительную нагрузку на текущий бюджет, требует иных источников финансирования социальных программ.

К числу таких альтернативных финансовых инструментов относятся накопительные фонды. Безусловно, использование накопительных фондов не решает всех проблем инвестирования в социальную сферу. Но такие их преимущества перед прямыми финансовыми заимствованиями, как практически полное отсутствие рисков; способность эффективно агрегировать и консолидировать средства из «маломощных» постоянных источников; возможность произвольного сочетания активного (с вложением средств) и пассивного (только за счет капитализации процентов) режимов накопления, делают их весьма привлекательными.

Недостаточная теоретическая проработка ряда важных в практическом плане задач в немалой степени мешает раскрытию потенциала накопительных фондов. Без этого трудно рассчитывать на то, что удастся реализовать на практике в полной мере возможности, предоставляемые этим финансовым инструментом. В первую очередь это относится к задаче оптимального планирования, которая является относительно простой только при формировании одного фонда. При создании одновременно нескольких накопительных фондов переменной интенсивности источников финансирования задачи оптимального планирования значительно усложняются. Критерии оптимальности могут быть весьма разнообразными. В контексте проблемы финансирования социальных программ небольшого муниципального образования наиболее актуальными являются критерии максимального быстродействия (скорейшего накопления) и минимального вложения средств.

Для получения значимых в теоретическом и практическом плане результатов необходимо привлечение апробированных в естественнонаучных и технических областях методов моделирования и оптимизации. Выбор типа модели определяется характером задачи: постоянные, «маломощные» источники финансирования. Для подобных задач естественен выбор непрерывной модели. В технических областях существует и доказала свою эффективность теория оптимальных процессов, основанная на принципе максимума Понтрягина ([1]). Многочисленные положительные результаты ([2]) применения принципа максимума в технических областях дают основания надеяться на успешное применение этой методики и в данном случае.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ НАКОПЛЕНИЯ

Сформулируем и уточним постановку задачи формирования накопительных фондов и критерии оптимальности процесса накопления с минимумом вложения средств. Предположим, что накопительные фонды создаются на счетах в коммерческих банках и, следовательно, процентные ставки не обязательно одинаковые. В дальнейшем предполагается, что они разные, т.к. в случае равенства процентных ставок все допустимые управления являются оптимальными. Пусть финансирование осуществляется из одного постоянного источника (это не ограничивает общность рассмотрения, поскольку на практике средства выделяются из текущего бюджета). Формирование фондов осуществляется на одном периоде. Функция времени $x_i(t)$, $i=1,2,\ldots n$, представляет собой размер фонда с номером i в момент времени t, а общее число фондов n. В начальный момент времени $t_н$ размеры фондов равны 0; а в некоторый определенный момент времени $t_к$ все фонды должны иметь фиксированные размеры $S_i>0$. Предположим также, что в течение всего периода формирования накопительных фондов сохраняется относительная макро и микроэкономическая стабильность, позволяющая считать источник финансирования и процентные ставки r_i постоянными. Предположение о постоянстве источника финансирования вначале представляется слишком жестким ограничением, но на практике они всегда являются кусочно-постоянными функциями времени.

Если обозначить интенсивность финансовых вложений в фонд с номером i в момент времени t как $u_i(t)$, а интенсивность источника финансирования через U, то математическая модель создания накопительных фондов задается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = p_i x_i(t) + u_i(t), \tag{1}$$

где точкой обозначен оператор дифференцирования по времени, а $p_i=\ln(1+r_i)$. Должны выполняться также следующие ограничения $u_i(t) \geq 0$, $\sum u_i(t) \leq U$ и начальные условия: $x_i(t_н)=0$, $x_i(t_к)= S_i$. В общем случае выбор целевой функции далеко не однозначен и может отражать различные аспекты формирования накопительных фондов. В контексте рассматриваемой проблемы создания накопительных фондов для инвестирования в социальные программы естественно, прежде всего, рассмотреть задачу быстродействия (т.е. задачу скорейшего накопления) и задачу минимального вложения средств. Для задачи быстродействия, являющейся линейной задачей, решение существует единственно ([3]) и допускает эффективный алгоритм решения ([4]). Поэтому далее рассматривается только задача минимального вложения средств.

В случае задачи минимизации вложенных средств целевая функция определяется следующим образом:

$$Z = \int_{t_н}^{t_к} \sum_{i=1}^{n} u_i(t)dt, \tag{2}$$

и должно выполняться условие: Z→min.

Применение принципа максимума дает эффективное решение рассматриваемой оптимизационной задачи. В решаемой задаче гамильтониан будет иметь следующий вид:

$$H(x,y,u) = \sum_{i=1}^{n} y_i(p_i x_i + u_i) - \sum_{i=1}^{n} u_i\,, \tag{3}$$

где $y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$ – вектор решений сопряженной системы уравнений:

$$\dot{y}_i(t) = -p_i y_i(t). \tag{4}$$

Система (4) имеет очевидные решения

$$y_i(t) = C_i e^{-p_i(t-t_н)}. \tag{5}$$

Пусть x* и u* решения оптимальной задачи, тогда согласно принципу максимума:

$$H(x^*,y,u^*) = \max H(x^*,y,u), 0 \le u \le U \tag{6}$$

и после несложных преобразований получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i(t)-1)u_i^*(t) = U \max\{(y_i(t)-1),0\}, \tag{7}$$

где $t_н \le t \le t_к$. Уравнение (7) позволяет однозначно определить оптимальное управление $u_i(t)$, которое является кусочно-постоянной функцией времени, равной U на некотором интервале, принадлежащем $(t_н,t_к)$ и 0 в остальных точках. Причем, в отличие от задачи быстродействия, все управления $u_i(t)$ на последнем временном интервале равны 0.

Функции вида (5) на интервале $(t_н,t_к)$ монотонно убывают и либо мажорируют одна другую, либо их графики пересекаются в единственной точке. В случае мажорирования функция управления $u_i(t)$ тождественно равна 0, что согласно формуле для решения уравнения (1):

$$x_i(t) = \int_{t_н}^{t} \exp(p_i(t-\tau))u_i(\tau)d\tau\,, \tag{8}$$

дает $x_i(t) \equiv 0$. Но этого не может быть, поскольку противоречит условиям задачи $x_i(t_к)=S_i>0$. Если определить функции $y_i(t)$ так, чтобы ни одна не мажорировала другую на интервале $(t_н,t_к)$, то условие пересечения графиков двух функций $y_i(t)$ и $y_j(t)$ вида (5) при $t>t_н$ эквивалентно следующему условию: если $p_i>p_j$, то $C_i>C_j$.

Произведя (если это необходимо) переиндексирование так, чтобы выполнялись неравенства: $p_1>p_2>\ldots>p_n$, обозначим через t_i момент окончания активного (с вложением средств из источника финансирования) режима накопления для фонда с номером i. Тогда выполняются неравенства $t_н=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n\le t_к$. Пусть $R_i=t_i-t_н$, $T_i=t_i-t_{i-1}$. Если положить $C_1=1$, а для остальных $i>1$

$$C_i = \exp\Big(\sum_{k=2}^{i}(p_k - p_{k-1})R_{k-1}\Big), \tag{9}$$

то графики функций $y_i(t)$ и $y_{i+1}(t)$ последовательно пересекаются в моменты времени t_1,t_2,t_{n-1}. Тем самым, полностью определены как оптимальное управление $u_i(t)$:

$$u_i(t) = \begin{cases} U, t \in (t_{i-1}, t_i) \\ 0, t \notin (t_{i-1}, t_i) \end{cases}, \tag{10}$$

так и оптимальное решение:

$$x_i(t) = \begin{cases} 0, t < t_{i-1} \\ \dfrac{U}{p_i}[e^{p_i(t-t_{i-1})} - 1], t_{i-1} \le t < t_i \\ \dfrac{U}{p_i} e^{p_i(t-t_i)}[e^{p_i T_i} - 1], t_i \le t \end{cases}. \tag{11}$$

Здесь t_i – момент окончания активного режима накопления для фонда с номером i, а T_i – длительность активного режима накопления для фонда с номером i.

Замечание. Формула (11) решает задачу оптимального планирования накопительных фондов при условии несовпадения процентных ставок. Если процентные ставки равны, то $x(t)=x_1(t)+x_2(t)+\ldots+x_n(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{x}(t) = px(t) + U, \tag{12}$$

поэтому любое управление является допустимым и оптимальным. А само x(t) находится по формуле:

$$x(t) = \frac{U}{p}[e^{p(t-t_н)} - 1]. \tag{13}$$

Если совпадают значения части процентных ставок, то для соответствующих переменных необходимо провести замену, указанную в замечании. Тогда размерность задачи уменьшится, а решения могут быть найдены по формуле (11).

2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Целевая функция в задаче минимального вложения средств достигает своего минимума тогда, когда процесс накопления организован следующим образом:

1) в каждый момент времени в активном режиме накопления находится только один фонд и источник финансирования используется максимально, т.е. $u_i(t) = U$ только для одного i, а для остальных $u_i(t)=0$;
2) порядок активного формирования фондов определяется порядком убывания процентных ставок r_i, т.е. первым формируется фонд с наибольшей процентной

ставкой r_i и т.д., в последнюю очередь формируется фонд с наименьшей процентной ставкой r_i;

3) начальный этап сменяет период пассивного накопления, когда рост происходит только вследствие капитализации процентов;
4) период активного накопления для последнего фонда сменяет период (иногда его длительность может быть равной нулю), когда для всех фондов реализуется режим пассивного накопления.

Приведенные условия однозначно определяют оптимальную стратегию формирования накопительных фондов. Они являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности ([5], с.115). Существенным с практической точки зрения является тот факт, что для расчета параметров оптимального процесса (прежде всего моментов переключения режимов) не требуется использование каких-либо сложных приближенных методов, поскольку решение уравнений (1) может быть найдено в явном виде и выражено через элементарные функции по формуле (11).

Используя граничное условие при $t=t_k$, получаем соотношение для последовательного определения моментов переключения режимов накопления t_i:

$$S_i = \frac{U}{p_i}\left(e^{p_i(t_k - t_{i-1})} - e^{p_i(t_k - t_i)}\right), \tag{14}$$

где $t_0=t_н$. При $t=t_n$ наступает последний интервал – пассивного накопления фондов. Если из расчетов будет получено, что $t_n>t_к$, то решения задачи не существует, поскольку «мощности» источника финансирования недостаточно, чтобы произвести накопление фондов. В этом случае либо увеличивается период накопления, либо – «мощность» источника финансирования. Сам алгоритм расчетов состоит в последовательном выполнении следующих агов:

1) накопительные фонды располагаются в порядке убывания процентных ставок r_i и, если надо, нумеруются заново, т.е. $r_1 > r_2 >\ldots>r_n$;
2) выбирается первый накопительный фонд, и для него производится расчет момента окончания периода активного накопления t_1;
3) последовательно рассчитываются $t_2,\ldots t_n$;
4) рассчитывается общая длительность активного накопительного периода T по формуле $T=T_1+T_2+\ldots+T_n$;
5) рассчитывается необходимый объем вложений в накопительные фонды (=U*T).

3. ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА

Проиллюстрируем сказанное примером вычислений на основе данного алгоритма. Пусть требуется создать два фонда размером 10 млн.р и 15 млн.р. соответственно. На финансирование процесса формирования фондов можно выделить ежедневно максимум 100 тыс.р. из собственных источников финансирования. На средства фондов начисляются проценты из расчета 10% (коммерческий банк) и 2% годовых (Сбербанк). Тогда при оптимальном планировании по быстродействию создание фондов завершится через 244 дня. Если же планировать по минимуму вложенных средств накопление фондов за год, то активный период накопления фондов завершится через 240 дней. Затраты бюджета при этом составят 24 млн.р. Можно выбрать иную стратегию, например, вкладывать средства бюджета финансирования пропорционально размерам фондов, т.е. по 60 тыс.р. и 40 тыс.р. соответственно. Тогда первый фонд будет сформирован к концу года за 235 дней активного накопления, а для создания второго потребуется 246 дней активного накопления. Общие затраты бюджета составят немного более 24170 тыс.р. Сравнительно небольшая разница в затратах (несколько более 170 тыс.р.) может показаться несущественной, но только не в условиях острого дефицита средств у небольшого муниципального образования. К тому же, в условиях длительного накопления в течение нескольких лет разница в затратах бюджета на создание фондов существенно возрастает.

Сравним теперь в контексте приведенных примеров оба оптимальных (относительно разных критериев оптимальности) плана: план скорейшего накопления и план минимума вложений. Первый план реализуется за 244 дня активных накоплений и требует бюджетных затрат в размере 24400 тыс.р. Второй план выполняется за 240 дней активного режима накоплений и 125 дней пассивного режима (всего за год). Затраты бюджета 24000 тыс.р. на 400 тыс.р. меньше, но фонды будут накоплены на 121 день позже, чем в первом случае.

В общем случае ситуация такова, что при прочих равных условиях выбор одного из рассмотренных оптимальных вариантов зависит от относительной ценности базовых ресурсов (время, деньги). В большинстве случаев именно время является более «ценным» ресурсом, что наглядно демонстрируют рассмотренные примеры: дополнительные затраты 400 тыс.р. составляют всего 1,6% от размера фондов (25 млн.р.), а позволяют сократить сроки накопления фондов почти на треть.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные критерии оптимальности не исчерпывают всех возможностей. В частности, вместо минимума вложений можно рассматривать критерий с минимумом дисконтированной суммы вложений и т.д. Однако оптимальные по быстродействию и минимуму вложений планы можно считать базовыми, отправной точкой планирования накопительных фондов.

Библиографический список

1. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – 4-е изд. – М. . Наука,1983. – 392 с.

2. Болтянский, В. Г. К теории оптимальных процессов [Текст] / В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 110, № 1. – С. 7-10.

3. Гамкрелидзе, Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах [Текст] / Р. В. Гамкрелидзе // Известия АН СССР. – 1958. – Т. 22, № 4. – С. 449-474. – (Серия «Математика»).

4. Тубольцев, М. Ф. Оптимальные по быстродействию стратегии создания накопительных фондов [Текст] / М. Ф. Тубольцев // Научные ведомости БелГУ – 2004. – Т. 1, вып. 1 (19). – С. 65-70. – (Серия «Информатика, Прикладная математика, Управление»).

5. Лагоша, Б. А. Оптимальное управление в экономике [Текст] : учеб пособие для вузов / Б. А. Лагоша. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 192 с.