УДК 53.01; 534.24; 534.211; 534.16; 539.1.043

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ В ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЕ ИМПУЛЬСНЫМ ПОТОКОМ УСКОРЕННЫХ ЧАСТИЦ

Блажевич С.В. [1], ***Бекназаров М.Н.*** [1], ***Немцев С.Н.*** [1]

1 - Белгородский государственный университет Российская Федерация, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Разработан метод моделирования акустического отклика на импульсное воздействие широким пучком ускоренных заряженных частиц на пластину

ВВЕДЕНИЕ

Исследование высокочастотных акустических волн в твердых телах - один из наиболее эффективных способов изучения внутренней структуры этих сред, их физических свойств.

Механизмы возбуждения акустических колебаний и волн в твердых телах весьма разнообразны и их исследование представляет особую задачу акустики. Одним из основных механизмов акустического эффекта взаимодействия быстрых заряженных частиц или излучения с веществом является термоупругий механизм [1,2]. Он обусловлен образованием в зоне взаимодействия области нестационарного нагрева вещества, в которой возникают термоупругие напряжения, релаксирующие затем посредством деформации вещества, распространяющейся в нем в виде упругих волн.

Образующееся в области взаимодействия излучения с веществом нестационарное тепловое поле и порождаемое им поле упругих напряжений, несут информацию, с одной стороны, о свойствах потока падающего излучения, а с другой – о тепловых и упругих свойствах вещества мишени. В этой связи акустические волны и колебания, возникающие в мишени, могут быть использованы для исследования этих физических характеристик.

Исследования импульсного радиационного воздействия на твердое тело актуальны и весьма перспективны, поэтому адекватное математическое описание возникающего при этом акустического эффекта, соответствующего различным конкретным физическим условиям и геометрии опыта, также представляет важную задачу.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В данной работе решается задача моделирования акустического отклика на импульсное воздействие широким пучком ускоренных заряженных частиц на пластину, толщина которой l превышает характерную длину, на которой падающие частицы теряют свою кинетическую энергию.

Будем полагать, что тепловая и динамическая задачи являются несвязанными, т.е. температурное поле в пластине в результате деформаций, возникающих в ней, изменяется незначительно.

Пусть нестационарное температурное поле $T(x,t)$, образующееся в зоне взаимодействия, определено из решения соответствующей тепловой задачи. Определим распределение возникающих при этом в пластинке механических напряжений $\sigma(x,t)$. Поскольку облучение происходит широким пучком, то возникающие термоупругие напряжения будут зависеть лишь от одной координаты, направленной вдоль нормали к поверхности пластины.

Данная задача сводится к решению уравнения [3,4]

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}$$

с начальными условиями $\sigma(x,0)=\sigma_t(x,0)=0$

и граничными $\sigma(0,t)=\sigma(l,t)=0,$ отражающими тот факт, что внешние границы пластинки являются свободными; ν - коэффициент Пуассона для вещества мишени, c – скорость распространения продольных упругих волн в веществе пластинки.

Переписав уравнение в виде

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}=c^2\cdot\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}-c^2\cdot\frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}$$

и введя обозначение

$$F(x,t)=-c^2\rho\frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2},$$

приведем задачу к стандартному виду:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+F(x,t),\\ \\ \sigma(0,t)=\sigma(l,t)=0,\\ \sigma(x,0)=\sigma_t(x,0)=0.\end{cases} \qquad (1)$$

Таким образом, мы имеем задачу с нулевыми начальными и граничными условиями, решение которой будем искать в виде ряда Фурье:

$$\sigma(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\psi_n(t), \qquad (2)$$

где $u_n(x)$ - собственные функции оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, а

$$\psi_n(t)=\frac{(\sigma,u_n)}{\|u_n\|^2} \text{ - коэффициент Фурье.} \qquad (3)$$

Скалярное произведение $(\sigma,u_n)=\int\limits_0^l\sigma(x,t)u_n(x)dx$,

а норма собственной функции $\|u_n\|^2=\int\limits_0^l u_n^2(x)dx$.

В математической физике методы, при которых решение задачи получается в виде ряда или интеграла, то есть в виде разложения по некоторой системе функций, хорошо изучены для случая, когда каждая из функций, по которым осуществляется разложение, зависит только от одной из переменных. Именно к такому случаю сведем нашу задачу.

Для нахождения системы функций, по которой можно осуществить разложение, необходимо найти решение граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, получившей название задачи Штурма-Лиувилля.

Указанная выше величина $u_n(x)$, также является решением задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \lambda_n u_n \\ u_n(0) = u_n(l) = 0 \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$u_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x; \ \ \|u_n\|^2 = \frac{l}{2}; \ \ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ \ n = 1,2,\ldots .$$

Преобразуем коэффициент Фурье (3) с учетом решения задачи Штурма-Лиувилля:

$$\psi_n(t) = \frac{(\sigma, u_n)}{\|u_n\|^2} = -\frac{1}{\lambda_n\|u_n\|^2}\left(\sigma, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right).$$

Так как оператор $\dfrac{\partial}{\partial x^2}$ эрмитов, то можно выполнить следующее преобразование:

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{\lambda_n\|u_n\|^2}\left(\sigma, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{\lambda_n\|u_n\|^2}\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, u_n\right) \quad (4)$$

Из (1) имеем:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{F(x,t)}{c^2}.$$

Подставив полученное выражение в (4), получим:

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{\lambda_n\|u_n\|^2}\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{F}{c^2}, u_n\right) \Rightarrow$$

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{\lambda_n c^2\|u_n\|^2}\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, u_n\right) + \frac{1}{\lambda_n c^2\|u_n\|^2}(F, u_n).$$

Обозначим $w_n^2 = \lambda_n c^2$, тогда:

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{w_n^2\|u_n\|^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\sigma, u_n) + \frac{1}{w_n^2}\cdot\frac{(F, u_n)}{\|u_n\|^2} \Rightarrow$$

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{w_n^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_n(t) + \frac{1}{w_n^2}F_n(t),$$

где

$$F_n(t) = \frac{\left(F(x,t), u_n(x)\right)}{\left\|u_n\right\|^2}.$$

Запишем последнее выражение в следующем виде:

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{w_n^2}\psi_n''(t) + \frac{1}{w_n^2}F_n(t) \Rightarrow$$

$$\psi_n''(t) + w_n^2\psi(t) = F_n(t).$$

К этому уравнению добавим начальные условия, которые получим из начальных условий задачи (1), скалярно умножив их на собственную функцию $u_n(x)$:

$$(\sigma(0,t),u_n) = 0;\ \ (\sigma_t(x,0),u_n) = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma(x,0),u_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_n(0) = 0;\ \ \psi_n''(0) = 0.$$

Таким образом, мы получили задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \psi_n''(t) + w_n^2\psi_n(t) = F_n(t) \\ \psi_n(0) = \psi_n'(0) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Решение такой неоднородной задачи найдем методом Коши (методом импульсной функции) по формуле

$$\psi_n(t) = \int_0^t F_n(\tau)K(t,\tau)d\tau,$$

где $K(t,\tau)$ - импульсная функция, являющаяся решением однородной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial t^2} + w_n^2 K(t,\tau) = 0 \\ K(\tau,\tau) = 0 \\ K_t'(\tau,\tau) = 1 \end{cases}$$

Представляя общее решение однородного уравнения в виде:

$$K(t,\tau) = A(\tau)\cos w_n t + B(\tau)\sin w_n t$$

подставим его в начальные условия:

$$\begin{cases} A(\tau)\cos w_n\tau + B(\tau)\sin w_n\tau = 0 \\ -w_n A(\tau)\sin w_n\tau + w_n B(\tau)\cos w_n\tau = 1 \end{cases}$$

Для задачи Коши известно, что

$$A(\tau) = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad B(\tau) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos w_n\tau & \sin w_n\tau \\ -w_n \sin w_n\tau & w_n \cos w_n\tau \end{vmatrix} = w_n,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin w_n\tau \\ 1 & w_n \cos w_n\tau \end{vmatrix} = -\sin w_n\tau,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos w_n\tau & 0 \\ -w_n \sin w_n\tau & 1 \end{vmatrix} = \cos w_n\tau.$$

Следовательно,

$$A(\tau) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin w_n\tau}{w_n}; \quad B(\tau) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos w_n\tau}{w_n}.$$

Отсюда для импульсной функции задачи:

$$K(t,\tau) = -\frac{\sin w_n\tau}{w_n}\cos w_n t + \frac{\cos w_n\tau}{w_n}\sin w_n t = \frac{\sin w_n(t-\tau)}{w_n}.$$

Из последнего выражения очевидно, что

$$\psi_n(t) = \frac{1}{w_n}\int_0^t F_n(\tau)\sin w_n(t-\tau)d\tau.$$

Таким образом, решение задачи (1) выражается в виде ряда Фурье:

$$
\begin{cases}
\sigma(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_n} \int\limits_0^t F_n(\tau) \sin w_n (t-\tau) d\tau \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \\
F_n(\tau) = \frac{1}{\|u_n\|} (F(x,\tau), u_n) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l F(x,\tau) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \\
F(x,t) = -c^2 \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} \\
w_n = \left(\frac{\pi n c}{l} \right)^2
\end{cases}
$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Средствами математического пакета MathCAD в работе была проведена визуализация полученного результата.

В качестве примера рассмотрен случай, когда на пластину толщиной l в течение заданного отрезка времени t0 падает поток частиц постоянной плотности. Частицы теряют свою энергию в веществе пластины равномерно по глубине и останавливаются на определенной глубине x0. В этом случае функция теплового источника $F(x,t)$ описывается произведением двух прямоугольных импульсных функций (от времени и от координаты):

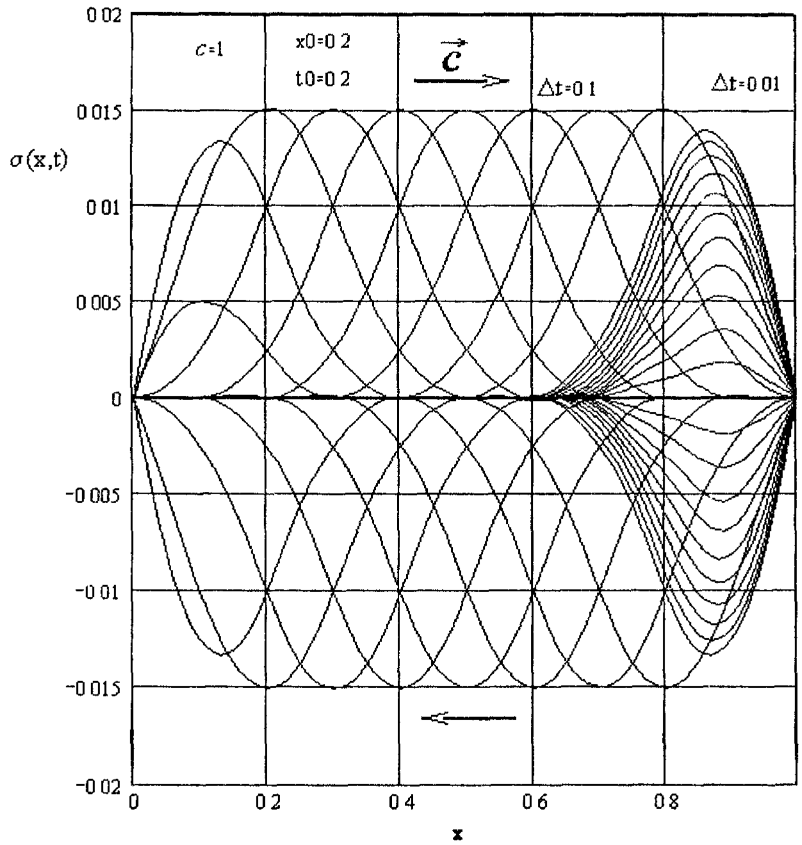
$$
F(x,t) \sim [\Phi(x) - \Phi(x - x0)] \cdot [\Phi(t) - \Phi(t - t0)],
$$

где $\Phi(x)$ –единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда).

Средствами пакета MathCAD для различных моментов времени было построено пространственное распределение упругих напряжений, возникающих в пластине (см. рисунок). Полученное семейство кривых позволяет проследить процессы формирования и распространения упругой волны в пластине, а также ее отражения от границ пластины.

В частности из рисунка видно, что при отражении от свободной поверхности пластины изменяется знак напряжения: волна сжатия превращается в волну растяжения. Отраженная и падающая волна компенсируют друг друга на отражающей границе, и напряжение там оказывается все время равным нулю. Поскольку затухание акустической волны в задаче не учитывалось, то амплитуда падающей и отраженной волн оказываются равными по абсолютной величине и волновой процесс не ограничен во времени.

Построенная математическая модель позволяет детально исследовать процесс возбуждение акустической волны в пластине импульсным радиационным воздействием на нее в зависимости от характеристик падающего излучения и термодинамических свойств вещества пластины.



Библиографический список

1. Воловик В.Д., Лазурик-Эльцуфин В.Т. // ФТТ 1973, Т.15. Вып. 8. С.2305
2. Блажевич С.В., Гришаев И.А.. Петренко В.В.. Фурсов Г.Л. //ФТТ. 1975. Т.17. Вып. 12. С.3636.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Издательское объединение "Вища школа", 1975, 216 с.
4. D. I. Proskurovsky, V. Rotshtein, G. E. Ozur, A. B. Markov, and D. S. Nazarov, J. Vac. Sci. Technol. A 1694, 2480 (1998).

MATHEMATICAL MODELING OF THERMOELASTIC WAVE EXCITED IN A THICK PLATE WITH PULSE ACCELERATED PARTICLE STREAM

S.V.Bladzevich, M.N.Beknazarov, S.N.Nemtsev

The authors have worked out a method of modeling an acoustic response to the pulse effect of wide accelerated charged particle beam on a plate.

УДК 621.396.01

ДВУНАПРАВЛЕННАЯ АССОЦИАТИВНАЯ ПАМЯТЬ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ АДАПТИВНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ ТЕОРИИ

В.Д. Дмитриенко[1], А.Ю. Заковоротный[1]

1 - Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", 61002, г. Харьков, ул. Фрунзе, 21, e-mail: arcade@datasvit.net

В статье, рассмотрена актуальная на сегодняшний день проблема создания ассоциативной памяти, способной запоминать новые ассоциации без полного переобучения нейронной сети. Разработка новой сети