УДК 533.72

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ НАГРЕТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ ТЕМПЕРАТУРЫ

М.А. Аматов*, Н.В. Малай, Н.Н. Миронова**

Белгородский государственный университет
308015, Белгород, ул. Победы, 85

Исследуются уравнения Навье-Стокса в приближении Осеена, описывающие обтекание нагретой цилиндрической частицы вязкой жидкостью при произвольных перепадах температуры между частицей и жидкостью. По методу Стокса решение ищется в том виде, который имеет течение жидкости на бесконечности. Решение поставленной задачи сведено к интегрированию некоторого обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, решение которого находится в виде степенного ряда.

Введение

С каждым годом увеличивается использование гидрозолей в практических целях – промышленности, технике, сельском хозяйстве, медицине и т.п. В связи с обострением экологической ситуации необходимо решать различные вопросы очистки промышленных отходов от гидрозольных частиц, природа образования которых может быть произвольной. Кроме того, такие прикладные задачи, как разработка методов тонкой очистки жидкостей от гидрозольных частиц; анализ процессов переноса гидрозольных частиц в зоне протекания химических реакций и т.д. требуют знания поведения гидрозольной частицы в термодинамически неравновесной вязкой среде. Поэтому одной из основных проблем механики дисперсных систем, активно разрабатываемой как в нашей стране, так и за рубежом, является проблема теоретического описания поведения взвешенных частиц в жидких неоднородных средах. Частицы, входящие в состав реальных дисперсных систем, могут иметь произвольную форму, быть твердыми и жидкими, неоднородными по составу и обладать анизотропией теплофизических свойств, на их поверхности может протекать химическая реакция и т.д.

Под нагретой понимают частицу, средняя температура поверхности которой по величине значительно отличается от температуры окружающей среды вдали от частицы. Нагрев поверхности частицы происходит за счет наличия внутренних источников тепла, появление которых может быть обусловлено, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы и т.п. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы может оказать значительное влияние на теплофизические характеристики окружающей среды и тем самым существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в окрестности частицы. Движение нагретых частиц в вязких жидких средах рассматривалось в ряде работ [1-3].

Многие частицы, встречающиеся в промышленных установках и в природе, имеют форму поверхности, отличную от сферической, например, цилиндрическую. Проблема описания движения цилиндрической частицы в приближении Стокса хорошо известна в научной литературе [4-5]. В данной работе в приближении Осеена впервые

* amatov@bsu.edu.ru
** malaj@ bsu.edu.ru

рассматривается задача об обтекании цилиндрической частицы, нагреваемой внутренними источниками тепла плотностью q_i.

1. Постановка задачи

Рассмотрим круговой цилиндр радиуса a, ось которого совпадает с осью OZ. Этот цилиндр считаем неравномерно нагретой гидрозольной частицей, движущейся в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса и Пекле под действием некоторой силы (гравитационной, магнитной, электрофоретической и т.д.) в направлении оси OX. Если перейти к системе координат, связанной с частицей, то вопрос по существу сводится к проблеме обтекания неравномерно нагретой неподвижной гидрозольной частицы, имеющей форму цилиндра, плоскопараллельным потоком жидкости, имеющим на бесконечности скорость U_∞, ($U_\infty \| OX$).

Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент динамической вязкости сильно зависит от температуры [6]. В связи со слабой зависимостью плотности и теплопроводности вещества частицы и несущей среды от температуры будем считать их постоянными величинами. Для учета зависимости вязкости от температуры воспользуемся следующим выражением:

$$\mu_e = \mu_\infty \left(1 + \sum_{n=1}^{2} F_n \left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1\right)^n\right) \exp\left\{-A\left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1\right)\right\}. \tag{1.1}$$

Здесь $A - const$, $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, T_∞ – температура жидкости вдали от частицы; индексы «e» и «i» здесь и в дальнейшем относятся к внешней жидкости и частице соответственно. Индексом «∞» обозначены параметры жидкости на бесконечности, т.е. вдали от частицы, а индексом «S» – значения физических величин на поверхности частицы.

Известно, что вязкость жидкости уменьшается с температурой по экспоненциальному закону [6]. Анализ имеющихся полуэмпирических формул показал, что выражение (1.1) позволяет наилучшим образом описать изменение вязкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью.

Движение жидкости, обтекающей цилиндрическую частицу, считаем стационарным. Уравнения движения её берём в приближении Осеена:

$$\rho_e U_\infty \frac{\partial \vec{V}_e}{\partial x} = -\nabla P_e + \mu_e \Delta \vec{V}_e + 2(\nabla \mu_e \cdot \nabla)\vec{V}_e + [\nabla \mu_e \times rot\ \vec{V}_e]. \tag{1.2}$$

Поскольку жидкость предполагается несжимаемой, должно выполняться уравнение неразрывности:

$$div\ \vec{V}_e = 0. \tag{1.3}$$

На бесконечности вектор скорости должен удовлетворять условию:

$$\vec{V}_\infty = \lim_{r \to \infty} \vec{V}_e = U_\infty \cos\theta \vec{e}_r - U_\infty \sin\theta \vec{e}_\theta, \quad U_\infty = const, \tag{1.4}$$

а на поверхности цилиндра условию прилипания:

$$\vec{V}_e\big|_S = 0. \tag{1.5}$$

Здесь r, θ – полярные координаты.

Для вычисления температуры жидкости T_e воспользуемся уравнением переноса тепла ([5], стр. 277), которое, учитывая стационарность процесса и то, что число Рейнольдса мало, можно записать в виде:

$$\rho c_p (\vec{V} \cdot grad\ \ T_e) = \lambda \Delta T_e. \tag{1.6}$$

Здесь ρ_e – плотность, c_p – теплоёмкость при постоянном давлении, λ_e – коэффициент теплопроводности, $\lambda_e/\rho_e c_p$ – температуропроводность.

Кроме того, температура T_e жидкости, окружающей частицу, должна удовлетворять условию на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} T_e = T_\infty, \quad (T_\infty = const). \tag{1.7}$$

Распределение температуры T_i внутри цилиндра задаётся уравнением:

$$\Delta T_i = \frac{q_i}{\lambda_i} \tag{1.8}$$

или в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_i}{\partial \theta^2} = \frac{q_i}{\lambda_i}. \tag{1.9}$$

Здесь q_i – плотность тепловых источников внутри частицы; λ_i – теплопроводность вещества частицы.

Для температуры T_i внутри частицы и T_e окружающей её жидкости на поверхности частицы должны выполняться краевые условия:

$$\lambda_e \left.\frac{\partial T_e}{\partial r}\right|_{r=a} = \lambda_i \left.\frac{\partial T_i}{\partial r}\right|_{r=a} \; (a), \quad T_e\big|_{r=a} = T_i\big|_{r=a} \; (b) \tag{1.10}$$

В граничных условиях (1.10) на поверхности частицы учтено равенство температур и непрерывность потока тепла.

Конечность температуры внутри частицы выражается условием:

$$|T_i| < \infty \tag{1.11}$$

при $r \le a$.

2. Преобразование уравнения движения жидкости

Используя известные формулы векторного анализа [7], запишем уравнение (1.2) в векторной форме:

$$\rho U_\infty \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = -grad\, P - \mu \cdot rot\, rot \vec{V} + grad(\vec{V}\cdot grad\, \mu) + rot[\vec{V} \times grad\, \mu] - \vec{V}\cdot\Delta\mu \tag{2.1}$$

Здесь мы опустили индекс e у вектора скорости и других величин, характеризующих жидкость. В дальнейшем этот индекс мы всегда будем опускать, когда из контекста ясно, что речь идёт о жидкости, окружающей частицу.

Поскольку движение жидкости плоскопараллельное, то выполняются равенства:

$$\vec{V} = V_x(x,y)\vec{i} + V_y(x,y)\vec{j}, \; V_z \equiv 0, \; \frac{\partial V_x}{\partial z} \equiv 0, \; \frac{\partial V_y}{\partial z} \equiv 0.$$

Но в таком случае имеем:

$$\vec{\Omega} = rot\,\vec{V} = \underbrace{\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)}_{\equiv 0}\vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)}_{\equiv 0}\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Положим $\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \equiv \chi'_y(x,y)$, где $\chi(x,y)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Получающаяся отсюда система уравнений

$$\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}=0,\ \frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\equiv \chi'_y(x,y) \qquad (2.2)$$

имеет следующее общее решение ([4], стр. 518)

$$V_x=\frac{\partial \eta}{\partial x}-\chi(x,y),\quad V_y=\frac{\partial \eta}{\partial y},\quad V_z=\frac{\partial \eta}{\partial z}, \qquad (2.3)$$

где $\chi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Решение (2.3) запишем в векторной форме $\vec{V}=grad\,\eta-\vec{\chi}$, где $\vec{\chi}=\chi(x,y)\vec{i}$. Подставляя выражения (2.3) компонент вектора $\vec{V}$ в уравнение неразрывности, приходим к уравнению

$$\Delta\eta=\frac{\partial\chi}{\partial x}. \qquad (2.4)$$

Подставляя вектор $\vec{V}$ в уравнение движения жидкости (2.1) получаем следующее уравнение

$$\rho U_\infty\frac{\partial}{\partial x}(grad\eta-\vec{\chi})=-grad\,P+\mu\cdot rot\ \ rot\,\vec{\chi}+grad(grad\eta,grad\,\mu)- \qquad (2.5)$$
$$-grad(\vec{\chi},grad\,\mu)+rot[grad\,\eta\times grad\,\mu]-rot[\vec{\chi}\times grad\,\mu]-grad\,\eta\cdot\Delta\mu+\vec{\chi}\cdot\Delta\mu$$

Анализируя поведение жидкости на бесконечности, приходим к выводу, что вектор скорости течения жидкости следует искать в виде:

$$V=-(G(r)-G(a))\cos\theta\cdot\vec{e}_r+[G'(r)r+G(r)-G(a)]\sin\theta\cdot\vec{e}_\theta. \qquad (2.6)$$

При этом, для того чтобы выполнялись условия (1.4)-(1.5), функция $G(r)$ должна удовлетворять следующим равенствам:

$$G(\infty)-G(a)=-U_\infty,\quad G'(a)=0,\quad \lim_{r\to\infty}G'(r)r=0. \qquad (2.7)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению функции $G(r)$, удовлетворяющей условиям (2.7).

Переходя в уравнении движения жидкости (2.1) к цилиндрическим координатам, исключая из них давление P_e и подставляя в полученное уравнение выражение (2.6) вектора скорости, приходим к уравнению:

$$-\frac{1}{2}\rho U_\infty\sin 2\theta\cdot[G'''(r)r^2+3G''(r)r-3G'(r)]=-\mu\cdot\sin\theta[G^{IV}(r)r^2+6G'''(r)r+3G''(r)-\frac{3}{r}G'(r)]-$$
$$-\frac{\partial\mu}{\partial r}\sin\theta\cdot[2G'''(r)r^2+7G''(r)r-G'(r)]-\frac{\partial\mu}{\partial\theta}\cos\theta\cdot\left[2G''(r)+\frac{1}{r}G'(r)\right]- \qquad (2.8)$$
$$-\frac{\partial^2\mu}{\partial r^2}\sin\theta\cdot[G''(r)r^2+G'(r)r]-4\frac{\partial^2\mu}{\partial r\,\partial\theta}\cos\theta\cdot G'(r)+\frac{\partial^2\mu}{\partial\theta^2}\sin\theta\cdot\left[G''(r)+\frac{2}{r}G'(r)\right].$$

Таким образом, требуется найти решение уравнения (2.8), удовлетворяющее условиям (2.7).

3. Интегрирование уравнений теплопроводности и теплопереноса

Преобразуем уравнение теплопереноса (1.6), учитывая, что процесс обтекания частицы жидкостью мы рассматриваем в приближении Осеена.

Поскольку в приближении Осеена $\vec{V}=(U_\infty+\overline{u}_x)\vec{i}+\overline{u}_y\vec{j}+\overline{u}_z\vec{k}$, где $\overline{u}_x,\overline{u}_y,\overline{u}_z$ – бесконечно малые величины при $r\to\infty$, то

$$(\vec{V}\cdot grad\,T_e)=U_\infty\frac{\partial T_e}{\partial x}+\bar{u}_x\frac{\partial T_e}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial T_e}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial T_e}{\partial z}\approx U_\infty\frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

Подставляя в уравнение (1.6) полученное выражение $(\vec{V}\cdot grad\,T_e)$, отбрасывая бесконечно малые величины и вводя в рассмотрение число Пекле, $Pe=\frac{\rho c_p U_\infty}{\lambda}$, перепишем (1.6) в виде:

$$Pe\frac{\partial T_e}{\partial x}=\Delta T_e. \qquad (3.1)$$

Уравнение (3.1) имеет решение $T_e=C_0+C_1y+C_2\cdot exp(Pe\cdot x)$. Учитывая краевое условие (1.7), в этом решении следует положить $C_1=C_2=0$ и $C_0=T_\infty$. Таким образом для уравнения (3.1) имеем тривиальное решение $T_e=T_\infty$.

Представим искомую функцию T_e в виде

$$T_e=f(x,y,z)\cdot\exp(Pe\cdot x/2). \qquad (3.2)$$

Подставляем функцию (3.2) и её производные в уравнение (3.1). В результате, после сокращения на $\exp(Pe\cdot x/2)$, получаем уравнение для определения функции f:

$$\Delta f=\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 f \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.3) есть уравнение Гельмгольца. Переходя в нём к цилиндрическим координатам и интегрируя путём разделения переменных, находим следующее выражение для общего решения уравнения (3.1):

$$T_e=T_\infty+\exp(pr\cos\theta)\left[C_0K_0(pr)+\bar{C}_0I_0(pr)+\sum_{n-1}^{\infty}C_nK_n(pr)\cdot\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{C}_nI_n(pr)\cdot\cos n\theta\right].$$

Поскольку $\lim\limits_{r\to\infty}\exp(pr\cos\theta)\cdot I_n(pr)=\infty$ (n=0, 1,2,…), то, для того чтобы выполнялось краевое условие (1.7), в последней формуле следует положить $\bar{C}_n=0$ (n=0, 1,2,…). В результате выражение для T_e принимает вид:

$$T_e=T_\infty+\exp(pr\cos\theta)\sum_{n=0}^{\infty}C_nK_n(pr)\cdot\cos n\theta. \qquad (3.4)$$

Здесь и далее $I_0(kpr), I_1(kpr), K_0(pr), K_1(pr)$ – модифицированные функции Бесселя [8,9], $p=\frac{Pe}{2}$.

Условие (1.7) на бесконечности для температуры жидкости, выраженной формулой (3.4), выполняется при любых значениях произвольных постоянных C_n. Подберем коэффициенты C_n так, чтобы и условия (1.10) также выполнялись. Для этого найдём распределение температур внутри частицы.

Интегрируя уравнение (1.9) методом разделения переменных, находим распределение температуры внутри частицы:

$$T_i=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{C_n^*}{r^n}+\frac{r^n}{2n}\int_a^r\frac{\tilde{a}_n(\xi)}{\xi^{n-1}}d\xi-\frac{1}{2nr^n}\int_a^r\xi^{n+1}\cdot\tilde{a}_n(\xi)\,d\xi\right)\cos n\theta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\tilde{C}_n}{r^n}+\frac{r^n}{2n}\int_a^r\frac{\tilde{b}_n(\xi)}{\xi^{n-1}}d\xi-\frac{1}{2nr^n}\int_a^r\xi^{n+1}\cdot\tilde{b}_n(\xi)\,d\xi\right)\sin n\theta\right]+C_0^*\cdot\ln r+\int_a^r\frac{1}{\xi}\int_a^\xi tq_{i0}(t)dt \qquad (3.5)$$

Коэффициенты C_n^* и $\tilde{C}_n$ выбраны так, что температура T_i при $0 \le r \le a$ (т.е. внутри и на границе цилиндра) принимает конечные значения, так что условие (1.11) выполнено. Подберём постоянные C_n, a_n, b_n так, чтобы выполнялись условия (1.10) на поверхности частицы. Для этого в формулы (3.4) и (3.5) подставляем значение $r = a$. Затем дифференцируем (3.4) и (3.5) по r и в полученные выражения производных также подставляем $r = a$:

$$\frac{a_0}{2} + C_0^* \cdot \ln a - T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a^n a_n + \frac{C_n^*}{a^n}\right)\cos n\theta + \left(a^n b_n + \frac{\tilde{C}_n}{a^n}\right)\sin n\theta\right] = \tag{3.6}$$

$$= \exp(pa\cos\theta)\sum_{n=0}^{\infty} C_n K_n(pa)\cdot\cos n\theta,$$

$$\frac{\lambda_i C_0^*}{\lambda_e pa} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda_i}{p\lambda_e}\left[\left(a_n a^{n-1} - \frac{C_n^*}{a^{n-1}}\right)\cos n\theta + \left(b_n a^{n-1} - \frac{\tilde{C}_n}{a^{n-1}}\right)\sin n\theta)\right] = \tag{3.7}$$

$$= \exp(pa\cos\theta)\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left[K_n(pa)\left(\cos\theta + \frac{n}{a}\right) - pK_{n+1}(pa)\right]\cdot\cos n\theta .$$

Левые части уравнений (3.6) и (3.7) представляют собой разложения в ряды Фурье функций, стоящих в правых частях этих равенств. Но правые части этих уравнений – чётные функции. Следовательно, левые части не должны содержать синусов, то есть:

$$a^n b_n + \frac{\tilde{C}_n}{a^n} = 0, \quad b_n a^{n-1} - \frac{\tilde{C}_n}{a^{n-1}} = 0,$$

откуда находим, что $b_n = 0$, $\tilde{C}_n = 0$. Тогда уравнения (3.6), (3.7) принимают вид:

$$\frac{a_0}{2} + C_0^* \cdot \ln a - T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a^n a_n + \frac{C_n^*}{a^n}\right)\cos n\theta = \exp(pa\cos\theta)\sum_{n=0}^{\infty} C_n K_n(pa)\cdot\cos n\theta \tag{3.8}$$

$$\frac{\lambda_i C_0^*}{\lambda_e pa} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda_i}{p\lambda_e}\left(a_n a^{n-1} - \frac{C_n^*}{a^{n-1}}\right)\cos n\theta = \tag{3.9}$$

$$= \exp(pa\cos\theta)\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left[K_n(pa)\left(\cos\theta + \frac{n}{a}\right) - pK_{n+1}(pa)\right]\cdot\cos n\theta .$$

Из равенств (3.8), (3.9) получаем формулы, выражающие коэффициенты a_n через C_n:

$$\begin{cases} a_0 = 2\left(T_\infty - C_0^* \ln a + \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n K_n(pa)\cdot I_n(pa)\right), \\ a_m = \dfrac{1}{a^m}\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n K_n(pa)\cdot\left[I_{n-m}(pa) + I_{n+m}(pa)\right] - \dfrac{C_m^*}{a^{2m}}, \quad (m = 1, 2, 3\ldots) \end{cases} \tag{3.10}$$

а также бесконечную систему уравнений для нахождения коэффициентов C_n:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n\left\{\dfrac{K_n(pa)}{2}\cdot\left[I_{n-1}(pa) + I_{n+1}(pa)\right] + \left[\dfrac{n}{a}K_n(pa) - pK_{n+1}(pa)\right]\cdot I_n(pa)\right\} = \dfrac{\lambda_i C_0^*}{\lambda_e pa}, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n\left\{\left[K_n(pa) - \dfrac{ap\lambda_e}{m\lambda_i}\left(\dfrac{n}{a}K_n(pa) - pK_{n+1}(pa)\right)\right]\cdot\left(I_{n-m}(pa) + I_{n+m}(pa)\right) - \right. \\ \left. - \dfrac{ap\lambda_e K_n(pa)}{m\lambda_i}\cdot\left[I_{n-m-1}(pa) + I_{n-m+1}(pa) + I_{n+m-1}(pa) + I_{n+m+1}(pa)\right]\right\} = \dfrac{2C_m^*(1+a^m)}{a^m}, \\ (m = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases} \tag{3.11}$$

Из системы уравнений (3.11) находим коэффициенты C_n и подставляем их в равенства (3.10), в результате чего и коэффициенты a_n будут вычислены. Тем самым распределение температур внутри частицы и в окружающей её жидкости полностью определено, и краевые условия (1.10) выполнены.

Решение системы (3.11) в общем виде представляет значительные трудности. Однако, учитывая, что при нахождении общей силы, действующей на цилиндрическую частицу, мы ограничиваемся, как правило, поправками до первого порядка малости по числу Пекле, то оставляем первые N уравнений, отбрасывая остальные. Неизвестными считаем $C_1, C_2, \dots C_N$, полагая остальные коэффициенты C_n нулями $(C_{N+1} = C_{N+2} = \dots = C_{N+k} = 0)$.

4. Интегрирование уравнения движения жидкости

В настоящей работе мы ограничиваемся случаем $N = 1$, то есть оставляем одно первое уравнение системы (3.11), отбрасывая все остальные и полагая $C_2 = C_3 = \dots = C_k = 0$. В таком случае имеем:

$$C_0 = \frac{\lambda_i C_0^*}{\lambda_e pa\left[K_0(pa)I_1(pa) - pK_1(pa)I_0(pa)\right]}, \tag{4.1}$$

$$a_0 = 2T_\infty - 2C_0^* \ln a + \frac{2\lambda_i C_0^* K_0(pa)I_0(pa)}{\lambda_e pa\left[K_0(pa)I_1(pa) - pK_1(pa)I_0(pa)\right]} \tag{4.2}$$

$$a_m = \frac{2\lambda_i C_0^* K_0(pa)I_m(pa)}{\lambda_e pa^{m+1}\left[K_0(pa)I_1(pa) - pK_1(pa)I_0(pa)\right]} - \frac{C_m^*}{a^{2m}} \tag{4.3}$$

Если в формуле (3.4) положить $C_n = 0$, (n=1,2, …), то она принимает вид:

$$T_e = T_\infty + \exp(pr\cos\theta)C_0 K_0(pr). \tag{4.4}$$

Здесь C_0 вычисляется по формуле (4.1).

Подставляем (4.4) в формулу вязкости (1.1), разлагаем полученное выражение в ряд по степеням $pr\cos\theta$ и после этого вносим полученное разложение в уравнение движения (2.8). Проведя несложные, но громоздкие элементарные преобразования, интегрируем полученное уравнение по переменной θ в пределах от 0 до 2π. Получаем уравнение для функции $G(r)$:

$$r^2 a(r)\cdot G^{IV}(r) + 2r\left[rb(r) + 3a(r)\right]\cdot G'''(r) + \left[r^2 d(r) + 7rb(r) + 3a(r) + 2c(r)\right]\cdot G''(r) +$$
$$+\left[rd(r) + 4e(r) - b(r) + \frac{1}{r}(c(r) - 3a(r))\right]\cdot G'(r) = 0, \tag{4.5}$$

где коэффициенты уравнения (4.5) равны:

$$a(r) = \frac{2\pi\mu_\infty}{A^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left[A(A - kF_1) + (k^2 - k)F_2\right]\left(-\frac{AC_0}{T_\infty}\right)^k \frac{K_0^k(pr)}{k!} I_0(kpr), \tag{4.6}$$

$$b(r) = \frac{2\pi\mu_\infty p}{A^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A(A - kF_1) + (k^2 - k)F_2\right]\left(-\frac{AC_0}{T_\infty}\right)^k \frac{K_0^{k-1}(pr)}{(k-1)!}\left[K_0(pr)I_1(kpr) - K_1(pr)I_0(kpr)\right]$$

$$c(r)=-\frac{2\pi\mu_\infty pr}{A^2}\cdot\sum_{k=3}^{\infty}\left[A(A-kF_1)+(k^2-k)F_2\right]\left(-\frac{AC_0}{T_\infty}\right)^k\frac{K_0^k(pr)}{(k-1)!}I_1(kpr),$$

$$d(r)=\frac{2\pi\mu_\infty p^2}{A^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A(A-kF_1)+(k^2-k)F_2\right]\left(-\frac{AC_0}{T_\infty}\right)^k\frac{K_0^{k-2}(pr)}{(k-1)!}\times$$

$$\times\left\{\left[(k+1)K_0^2(pr)+\frac{K_0(pr)K_1(pr)}{pr}+(k-1)K_1^2(pr)\right]I_0(kpr)-\right.$$

$$\left.-\left[2kK_1(pr)+\frac{K_0(pr)}{pr}\right]K_0(pr)\cdot I_1(kpr)\right\},$$

$$e(r)=$$

$$=-\frac{2\pi\mu_\infty p^2 r}{A^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\left[A(A-kF_1)+(k^2-k)F_2\right]\left(-\frac{AC_0}{T_\infty}\right)^k\frac{K_0^{k-1}(pr)}{(k-1)!}\times\left[K_0(pr)I_0(kpr)-K_1(pr)I_1(kpr)\right]$$

Как отмечалось ранее, искомое решение уравнения (4.5) должно удовлетворять условиям (2.7).

Решение уравнения (4.5) ищем в виде обобщённых степенных рядов, предварительно разложив коэффициенты (4.6) в ряды по степеням $\frac{pr-2}{2}$. Приведём только разложение в степенной ряд коэффициента $r^2a(r)$ при производной $G^{IV}(r)$ в уравнении (4.5), так как поместить все полученные разложения в одной статье не представляется возможным.

$$r^2a(r)=\frac{8\pi\mu_\infty}{A^2p^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A(A-kF_1)+(k^2-k)F_2}{k!}\cdot\left(-\frac{AC_0}{T_\infty}\right)^k K_0^k(2)\cdot I_0(2k)+$$

$$+\frac{16\pi\mu_\infty}{A^2p^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A(A-kF_1)+(k^2-k)F_2}{k!}\cdot\left(-\frac{AC_0}{T_\infty}\right)^k K_0^{k-1}(2)\left[K_0(2)I_0(2k)+k\left(K_0(2)I_1(2k)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-K_1(2)I_0(2k)\right)\right]\cdot\frac{pr-2}{2}+\frac{8\pi\mu_\infty}{A^2p^2}\cdot\sum_{m=2}^{\infty}\left[\sum_{k}\frac{A(A-kF_1)+(k^2-k)F_2}{k!}\cdot\left(-\frac{AC_0}{T_\infty}\right)^k\left[\sum_{j=0}^{m}d_{m-j,k}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{\infty}C_{2i}^{j}\left(\frac{k^i}{i!}\right)^2+2\sum_{j=0}^{m-1}d_{m-j-1,k}\cdot\sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{\infty}C_{2i}^{j}\left(\frac{k^i}{i!}\right)^2+\sum_{j=0}^{m-2}d_{m-j-1,k}\cdot\sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{\infty}C_{2i}^{j}\left(\frac{k^i}{i!}\right)^2\right]\right]\cdot\left(\frac{pr-2}{2}\right)^m$$

Полученное в конечном итоге решение позволяет найти поле скорости и давление в окрестности цилиндрической частицы в приближении Осеена. Зная распределение скорости и давления, интегрируя тензор напряжения по поверхности частицы, можно найти выражение для общей силы, действующей на частицу. Вид решения и выражения для компонент скорости, давления и общей силы будут приведены в следующей статье.

Литература

1. Городцов, В.А. Медленные движения жидкой капли в вязкой жидкости / В.А. Городцов // ПМТФ. – 1975. – № 6. – С. 32-37

2. Найденов, В.И. Установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры / В.И. Найденов // ПММ. – 1971. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 162-166.

3. Малай, Н.В. Об обтекании вязкой жидкостью нагретой частицы сфероидальной формы / Н.В. Малай, М.А. Аматов //Коллоидный журнал. – 2002. – Т. 64, № 1. – С. 97-101.

4. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика: в 2 т. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М. : «ГИФМЛ», 1963, Т. 2. – 727 с.

5. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: «Наука», 1986. – 736 с.

6. Бретшнайдер, Ст. Свойства газов и жидкости. Инженерные методы расчета / Ст. Бретшнейдер. – М.: Химия, 1966. – 535 с.

7. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: «Наука», 1965. – 426 с.

8. Никифоров, А.Ф. Специальные функции математической физики / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. – М.: «Наука», 1984. – 344 с.

9. Кузнецов, Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – М.: «Высшая школа», 1965. – 272 с.

10. Аматов, М.А. Влияние внутреннего тепловыделения на осаждение частиц несферической формы / М.А. Аматов, Н. В. Малай // Математические модели в образовании, науке и промышленности. – С.-Петербург, 2003. — С. 11-14.

11. Малай Н.В. К вопросу о термофорезе твердой сферической частицы в жидкости // Изв. Российской АН. Механика жидкости и газа. – 2003. – №6. – С. 145-154.

12. Малай, Н.В. Обтекание нагретого сфероида вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса / Н.В. Малай, М.А. Аматов // Дифференциальные уравнения : межвуз.сб. науч. тр. – Рязань, 1996. – С. 90-99.

Properties of heated cylindrical particle motion in viscous fluid at arbitrary temperature gradients

M.A. Amatov, N.V. Malay, N.N. Mironova

Belgorod State University, 308015, Belgorod, Pobedy St., 85.

The paper deals with Navier-Stokes equations in Oseen approximation that describe a heated cylindrical particle flowed around by viscous fluid at arbitrary temperature gradients between the particle and the fluid. By Stokes technique, a solution is found in the form that the fluid flow has in the infinity. The solution of the problem is reduced to integration of a certain ordinary third-order differential equation whose solution is found as a power progression.