УДК 517.9

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Е.А. Абаполова[1], М.И. Курганская[2*]

[1] Белгородский государственный университет, Старооскольский филиал,
309530, г. Старый Оскол, м-н Солнечный,19
[2] Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая,14

Приводится вывод общего решения неоднородных эллиптических систем второго порядка. Изложены приложения к неоднородной системе Ламе анизотропной теории упругости.

Неоднородная эллиптическая система второго порядка

Рассмотрим в односвязной области D на плоскости систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \tag{1}$$

где $A \in R^{l \times l}$ – постоянные матричные коэффициенты, f – заданная непрерывная l-вектор функция. Данная система предполагается эллиптической, т. е. $\det(\lambda^2 - A_1\lambda - A_0) \neq 0,\ \lambda \in R$.

Регулярное решение $u \in C^2(D)$ этой системы подчинено некоторым дополнительным требованиям гладкости вплоть до границы ∂D. Пусть $C^{\mu}(\overline{D})$ означает обычный класс Гельдера с показателем μ. Аналогичный смысл имеет класс $C^{1,\mu}(\overline{D})$ по отношению к непрерывно-дифференцируемой функции. Ниже решение системы (1) рассматривается в классе функций $u \in C^{1,\mu}(\overline{D}) \cap C^2(D)$, для которых $Lu \in C^{\mu}(\overline{D})$. Примем, что $f = Lu$ имеет компактный носитель в D.

С функцией u свяжем $2l$-компонентный вектор-градиент $U=(u_x,\ u_y)$, где для краткости $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. По отношению к этому вектору систему (1) можно переписать в форме

$$(u_x)_y = (u_y)_x, (u_y)_y = A_0(u_x)_x + A_1(u_y)_x + f$$

или, полагая $u_x=U_1$, $u_y=U_2$, получим

$$(U_1)_y = (U_2)_x, (U_2)_y = A_0(U_1)_x + A_1(U_2)_x + f \tag{2}$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений второго порядка свелась к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Перепишем систему (2) в виде

$$U_y = A_* U_x + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, A_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Из курса математического анализа известен следующий факт [1]. Пусть функции $U_1(x,y)$ и $U_2(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой односвязной области D.

* kurganskaya@bsu.edu.ru

Тогда вектор-функция $U=(U_1,U_2)$ является градиентом для функции $u=(u_x,u_y)$, т. е. $u_x=U_1$, $u_y=U_2$ в области D тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial U_1}{\partial y}=\frac{\partial U_2}{\partial x}.$$

При этом u(x,y) восстанавливается по U криволинейным интегралом

$$u(z)=\int_{z_0}^{z}U_1dx+U_2dy+\xi,\xi=u(z_0)\in R^l \quad \textbf{(3)}$$

Из этой теоремы непосредственно следует, что если U есть решение системы (2) в односвязной области D, то функция u, определенная интегралом (3), является решением системы (1).

Теперь попытаемся систему (2) свести к более простой эллиптической системе. Для этого подвергнем ее преобразованию при помощи обратимой матрицы

$$B_*=\begin{pmatrix}B_{11} & \overline{B}_{11}\\ B_{21} & \overline{B}_{21}\end{pmatrix}$$

таким образом, чтобы

$$B_*^{-1}A_*B_*=J_*,\ J_*=\begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & \overline{J}\end{pmatrix}, \quad \textbf{(4)}$$

где спектр $\sigma(J)$ матрицы J лежит в верхней полуплоскости.

Выясним, какой вид имеет матрица B_*. По условию $\det B_*\neq 0$. Из (4) следует, что $A_*B_*=B_*J_*$. По правилу блочного перемножения матриц

$$A_*B_*=\begin{pmatrix}B_{21} & \overline{B}_{21}\\ A_0B_{11}+A_1B_{21} & A_0\overline{B}_{11}+A_1\overline{B}_{21}\end{pmatrix}. \quad \textbf{(5)}$$

Так как A_0,A_1 – вещественные матрицы, то

$$\overline{A_0B_{11}+A_1B_{21}}=A_0\overline{B}_{11}+A_1\overline{B}_{21}.$$

Также из (4) следует, что

$$B_*J_*=\begin{pmatrix}B_{11}J & \overline{B}_{11}\overline{J}\\ B_{21}J & \overline{B}_{21}\overline{J}\end{pmatrix}. \quad \textbf{(6)}$$

Приравнивая (5) и (6) получаем, что $B_{21}=B_{11}J$. Обозначим $B_{11}=B$, тогда $B_{21}=BJ$. Таким образом, матрица B_* должна иметь следующий вид:

$$B_*=\begin{pmatrix}B & \overline{B}\\ BJ & \overline{BJ}\end{pmatrix}$$

с определителем, не равным нулю.

Всякий вектор $(\eta,\overline{\eta})$, где $\eta\in C^l$ матрица B_* переводит в $2l$-компонентный вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in R^{2l}$, а B_*^{-1} каждый $2l$-компонентный вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in R^{2l}$ переводит в $(\eta,\overline{\eta})$. Подействуем на вектор-функцию U матрицей B_*^{-1} и положим $\widetilde{\phi}=B_*^{-1}U$. В результате получим вектор-функцию $\widetilde{\phi}=(\phi,\overline{\phi})\in C^\mu(\overline{D})$. Заменив в системе (3) вектор-функцию U на $B_*\widetilde{\phi}$, получим

$$B_*\widetilde{\phi}_y=AB_*\widetilde{\phi}_x+\widetilde{f},\ \widetilde{f}=(0,f). \quad \textbf{(7)}$$

Теперь на систему (7) подействуем матрицей B_*^{-1}. Исходная система приобретет вид

$$\widetilde{\phi}_y=J_*\widetilde{\phi}_x+B_*^{-1}\widetilde{f}. \quad \textbf{(8)}$$

Ясно, что матрица B_*^{-1} должна иметь следующий вид:

$$B_*^{-1}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $B_*^{-1}\widetilde{f}=\widetilde{F},\ \widetilde{F}=\left(F,\overline{F}\right)$, тогда $F=C_2f$. Перепишем систему (8) в виде

$$\begin{pmatrix} \phi_y \\ \overline{\phi}_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \overline{J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_x \\ \overline{\phi}_x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} F \\ \overline{F} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение системы (1) свелось к решению следующей системы:

$$\phi_y-J\phi_x=F,\ F=C_2f, \tag{9}$$

которая называется обобщенной системой Бельтрами.

Согласно [3], матрица-функция

$$E(z)=\frac{1}{2\pi i}z_J^{-1}$$

(здесь и ниже принято матричное обозначение $z_J=x\cdot 1+y\cdot J$ для $z=x+yi\in C$) является фундаментальным решением обобщенной системы Бельтрами (9) в следующем смысле: Для любой вектор-функции $F\in C^{\mu}(D)$ с компактным носителем в D вектор - функция

$$(TF)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C (t-z)_J^{-1}F(t)dt_1dt_2 \tag{10}$$

принадлежит классу $C^{1,\mu}(C)$ и удовлетворяет системе (1). Следовательно, любое решение из класса

$$\phi,\frac{\partial\phi}{\partial y}-J\frac{\partial\phi}{\partial x}\in C^{\mu}(\overline{D}),$$

единственным образом представимо в виде $\phi=TF+\phi_0$, где $\phi_0\in C^{\mu}(\overline{D})$ служит решением однородной системы (9), то есть является гипераналитической функцией.

Таким образом, установлен следующий результат.

Теорема 1. *Общее решение системы* (1) *в классе* $u\in C^{1,\mu}(\overline{D})\cap C^2(D)$ *единственным образом представимо в виде*

$$u=\int_{z_0}^{z}\mathrm{Re}(B\phi)dx+\mathrm{Re}(BJ\phi)dy+\xi\ ,\ \xi=u(z_0)\in R^l, \tag{11}$$

где $\phi=TC_2f+\phi_0$ и $\phi_0\in C^{\mu}(\overline{D})$ *– решение однородной системы* (9).

Для того, чтобы убедится в корректности представления (11), нужно показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, то есть должно выполнятся соотношение

$$\mathrm{Re}\frac{\partial B\phi}{\partial y}=\mathrm{Re}\frac{\partial BJ\phi}{\partial x}. \tag{12}$$

Так как ϕ_0 является решением однородной системы (9), то нам остается убедиться лишь в том, что

$$\frac{\partial TC_2f}{\partial y}=\frac{J\partial TC_2f}{\partial x}.$$

TF(z) является решением (9), следовательно,

$$\frac{\partial TF}{\partial y}=F-\frac{J\partial TF}{\partial x}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем, $ReBF=0$ или, что равносильно, $ReBC_2f=0$.

Теперь воспользуемся тем, что $B_*^{-1}B_* = 1$. После перемножения матриц получаем, что $BC_2 + \overline{BC}_2 = 0$. Значит, $\operatorname{Re} BC_2 f = 0$ и представление (11) корректно.

2. Приложение к системе Ламе анизотропной теории упругости.

Теорему 1 применим к представлению решений системы Ламе плоской теории упругости. Состояние среды в плоской анизотропной теории упругости характеризуются тензорами напряжения σ и деформации ε – симметричными 2×2 – матрицами-функциями

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы ε_j тензора деформации выражаются через вектор смещения $u = (u_1, u_2)$ по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad 2\varepsilon_3 = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}, \tag{14}$$

При наличии массовых сил тензор напряжения удовлетворяет неоднородным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = F, \tag{15}$$

где $\sigma_{(i)}$ означают столбцы матрицы σ. В линейной теории упругости [10] связь между σ и ε выражается соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_4\varepsilon_2 + 2\alpha_6\varepsilon_3, \\ \sigma_2 &= \alpha_4\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + 2\alpha_5\varepsilon_3, \\ \sigma_3 &= \alpha_6\varepsilon_1 + \alpha_5\varepsilon_2 + 2\alpha_3\varepsilon_3, \end{aligned} \tag{16}$$

где коэффициенты α_j, называемые модулями упругости, являются элементами положительно определенной матрицы α, т.е.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix} > 0.$$

С учетом (14) соотношения (16) можем переписать в форме

$$\sigma_{(i)} = A_{i1}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{i2}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad i = 1, 2; \tag{17}$$

с матричными коэффициентами

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражения (17) в (15), для вектора смещений $u = (u_1, u_2)$ получим систему уравнений

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \tag{19}$$

с матричными коэффициентами (18), которая носит название системы Ламе.

Известно, что эта система эллиптична. Представим ее в виде (1), полагая

$$A_1 = -A_{22}^{-1}(A_{12}+A_{21}),\quad A_0 = -A_{22}^{-1}A_{11}$$

Теперь применим к полученной системе схему, описанную в разделе 1.

В рассматриваемом случае блочные матрицы A_*, B_* и J_*, фигурирующие в (4), принадлежат R^{4x4}. Выберем матрицу B_* так, чтобы J имела жорданову форму. Тогда для J имеется только две возможности:

$$1)\ J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix},\quad 2)\ J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Можно показать, что в первом случае $\nu_1 \neq \nu_2$. Как было отмечено в пункте 1, матрица

$$B_* = \begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BJ & \overline{BJ} \end{pmatrix}.$$

Вопрос об описании матрицы B в явном виде решен в работе [9]. Согласно (18) матричный многочлен $P(z) = A_{11} + (A_{12} + A_{21})z + A_{22}z^2$ можно записать в виде

$$P = \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix},\qquad \begin{aligned} g_1(z) &= \alpha_1 + 2\alpha_6 z + \alpha_3 z^2, \\ g_2(z) &= \alpha_3 + 2\alpha_5 z + \alpha_2 z^2, \\ g_3(z) &= \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5 z^2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение положительно определенную матрицу

$$\beta = (\det\alpha)\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_6 \\ \beta_4 & \beta_2 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

с элементами

$$\beta_1 = \alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2,\qquad \beta_2 = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2,\qquad \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2,$$
$$\beta_4 = \alpha_5\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4,\qquad \beta_5 = \alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5\qquad \beta_6 = \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6$$

С помощью этих обозначений характеристический многочлен $\chi(z) = \det P(z) = g_1g_2 - g_3^2$ четвертой степени можем представить в форме

$$\chi(z) = h_1(z) + z^2h_3(z),\qquad \begin{aligned} h_1(z) &= \beta_2 - \beta_5 z + \beta_4 z^2, \\ h_2(z) &= \beta_5 - \beta_3 z + \beta_6 z^2, \\ h_3(z) &= \beta_4 - \beta_6 z + \beta_1 z^2. \end{aligned}$$

Отметим, что в первом случае одно из чисел $h_3(\nu_1)$, $h_3(\nu_2)$ обязательно отлично от нуля, так как только один из корней квадратного трехчлена h_3 может лежать в верхней полуплоскости. В каждом из этих двух случаев матрица B может быть описана следующим образом [9].

Теорема 2. *Пусть для определенности $h_3(\nu_2) \neq 0$. Тогда, соответственно, двум случаям 1) и 2) для матрицы J матрица B определяется следующим образом:*

1)

i)

$$B = \begin{pmatrix} g_2(\nu_1) & g_2(\nu_2) \\ -g_3(\nu_1) & -g_3(\nu_2) \end{pmatrix},\qquad h_3(\nu_1) \neq 0, \tag{20 i}$$

i i)

$$B=\begin{pmatrix} -g_3(v_1) & g_2(v_2) \\ g_1(v_1) & -g_3(v_2) \end{pmatrix}, \qquad h_3(v_1)=0. \qquad (20\text{i i})$$

2)

$$B=\begin{pmatrix} g_2(v) & g_2'(v) \\ -g_3(v) & -g_3'(v) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что во всех случаях определитель матрицы B отличен от нуля. Покажем, что в этом случае матрицу C_2 можно выписать в явном виде. Как указано выше,

$$B_*=\begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BJ & \overline{BJ} \end{pmatrix}, \quad B_*^{-1}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \end{pmatrix}.$$

Равенства $B_*\xi=\eta$ и $\xi=B_*^{-1}\eta$, где $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in R^{2l}$, запишем поблочно:

$$\begin{cases} B\xi_1+\overline{B}\xi_2=\eta_1, \\ BJ\xi_1+\overline{BJ}\xi_2=\eta_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \xi_1=C_1\eta_1+C_2\eta_2, \\ \xi_2=\overline{C}_1\overline{\eta}_1+\overline{C}_2\overline{\eta}_2 \end{cases}.$$

Выразив ξ_2 из первой системы уравнений, получим

$$\left[\overline{B}^{-1}B-\left(\overline{BJ}\right)^{-1}BJ\right]\xi_1=\overline{B}^{-1}\eta_1-\left(\overline{BJ}\right)^{-1}\eta_2,$$

откуда $\xi_1=\left[\overline{B}^{-1}B-\left(\overline{BJ}\right)^{-1}BJ\right]^{-1}\left[\overline{B}^{-1}\eta_1-\left(\overline{BJ}\right)^{-1}\eta_2\right]$, и, значит,

$$C_2=-\left[\overline{B}^{-1}B-\left(\overline{BJ}\right)^{-1}BJ\right]^{-1}\left(\overline{BJ}\right)^{-1}.$$

С помощью теорем 1 и 2 найдем общее решение системы Ламе (19).Рассмотрим сначала первый случай матрицы J в (20). В этом случае

$$z_J=x1+yJ=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} yv_1 & 0 \\ 0 & yv_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+yv_1 & 0 \\ 0 & x+yv_2 \end{pmatrix},$$

$TF=(T_1F_1,T_2F_2)$, тогда согласно (10) получаем

$$(T_jF_j)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D [t_1-x+v_j(t_2-y)]^{-1}F_j(t_1,t_2)dt_1dt_2\,, \qquad i=1,2.$$

Теперь воспользуемся выражением (11), обозначив $C_2f=\tilde{f}$. Подставив в (11) значения B из теоремы 2, получим решение $u=(u_1,u_2)$ системы (19) в явном виде для случая 1) матрицы J.

В результате, в координатной записи для случая i) теоремы 2 формула (11) примет вид:

$$u_1(x,y)=\int_{z_0}^{z}\mathrm{Re}\left(g_2(v_1)(T_1\tilde{f}_1)(z)+g_2(v_2)(T_2\tilde{f}_2)(z)\right)dx\;+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\mathrm{Re}\left(v_1g_2(v_1)(T_1\tilde{f}_1)(z)+v_2g_2(v_2)(T_2\tilde{f}_2)(z)\right)dy\;+$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(g_2(\nu_1)\phi_1 + g_2(\nu_2)\phi_2\big)dx + \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(\nu_1 g_2(\nu_1)\phi_1 + \nu_2 g_2(\nu_2)\phi_2\big)dy + \xi_1,$$

$$u_2(x,y) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(-g_3(\nu_1)(T_1\widetilde{f}_1)(z) - g_3(\nu_2)(T_2\widetilde{f}_2)(z)\big)dx +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(-\nu_1 g_3(\nu_1)(T_1\widetilde{f}_1)(z) - \nu_2 g_3(\nu_2)(T_2\widetilde{f}_2)(z)\big)dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(-g_3(\nu_1)\phi_1 - g_3(\nu_2)\phi_2\big)dx + \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(-\nu_1 g_3(\nu_1)\phi_1 - \nu_2 g_3(\nu_2)\phi_2\big)dy + \xi_2,$$

где $\xi_j \in R$ и ϕ_j удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial y} - \nu_j \frac{\partial\phi_j}{\partial x} = 0.$$

Аналогичным образом, для (20ii) имеем:

$$u_1(x,y) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(-g_3(\nu_1)(T_1\widetilde{f}_1)(z) + g_2(\nu_2)(T_2\widetilde{f}_2)(z)\big)dx +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(-\nu_1 g_3(\nu_1)(T_1\widetilde{f}_1)(z) + \nu_2 g_2(\nu_2)(T_2\widetilde{f}_2)(z)\big)dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(-g_3(\nu_1)\phi_1 + g_2(\nu_2)\phi_2\big)dx + \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(-\nu_1 g_3(\nu_1)\phi_1 + \nu_2 g_2(\nu_2)\phi_2\big)dy + \xi_1,$$

$$u_2(x,y) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(g_1(\nu_1)(T_1\widetilde{f}_1)(z) - g_3(\nu_2)(T_2\widetilde{f}_2)(z)\big)dx +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(\nu_1 g_1(\nu_1)(T_1\widetilde{f}_1)(z) - \nu_2 g_3(\nu_2)(T_2\widetilde{f}_2)(z)\big)dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(g_1(\nu_1)\phi_1 - g_3(\nu_2)\phi_2\big)dx + \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\big(\nu_1 g_1(\nu_1)\phi_1 - \nu_2 g_3(\nu_2)\phi_2\big)dy + \xi_2,$$

где $\xi_j \in R$ и ϕ_j удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial y} - \nu_j \frac{\partial\phi_j}{\partial x} = 0.$$

Обратимся к случаю 2) теоремы 2 . В этом случае

$$z_J = xI + yJ = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y\nu & 1 \\ 0 & y\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\nu & 1 \\ 0 & x + y\nu \end{pmatrix}.$$

Следовательно, обратная матрица будет иметь вид:

$$z_J^{-1} = \begin{pmatrix} (x + y\nu)^{-1} & -y(x + y\nu)^{-2} \\ 0 & (x + y\nu)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Соответственно (10) можно записать следующим образом:

$$(\mathrm{TF})(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \begin{pmatrix} [t_1 - x + \nu(t_2 - y)]^{-1} & -(t_2 - y)[t_1 - x + \nu(t_2 - y)]^{-2} \\ 0 & [t_1 - x + \nu(t_2 - y)]^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 . \qquad (21)$$

Применяя (11) и (21), получим решение $u=(u_1,u_2)$ системы (19) в явном виде для случая 2) теоремы 2 :

$$u_1(x,y) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(g_2(\nu)(T_{11}\tilde{f}_1 + T_{12}\tilde{f}_2)(z) + g_2'(\nu)(T_{21}\tilde{f}_1 + T_{22}\tilde{f}_2)(z)\right)dx +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(\nu g_2(\nu)(T_{11}\tilde{f}_1 + T_{12}\tilde{f}_2)(z) + (g_2(\nu) + \nu g_2'(\nu))(T_{21}\tilde{f}_1 + T_{22}\tilde{f}_2)(z)\right)dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(g_2(\nu)\phi_1 + g_2'(\nu)\phi_2\right)dx + \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(\nu g_2(\nu)\phi_1 + (g_2(\nu) + \nu g_2'(\nu))\phi_2\right)dy + \xi_1,$$

$$u_2(x,y) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(-g_3(\nu)(T_{11}\tilde{f}_1 + T_{12}\tilde{f}_2)(z) - g_3'(\nu)(T_{21}\tilde{f}_1 + T_{22}\tilde{f}_2)(z)\right)dx +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(-\nu g_3(\nu)(T_{11}\tilde{f}_1 + T_{12}\tilde{f}_2)(z) - (g_3(\nu) + \nu g_3'(\nu))(T_{21}\tilde{f}_1 + T_{22}\tilde{f}_2)(z)\right)dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(-g_3(\nu)\phi_1 - g_3'(\nu)\phi_2\right)dx + \int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(-\nu g_3(\nu)\phi_1 - (g_3(\nu) + \nu g_3'(\nu))\phi_2\right)dy + \xi_2 .$$

Здесь T_{ij} – операторы, отвечающие матричному выражению в (21), т.е.

$$(TF)_i(z) = \sum_{j=1,2} T_{ij} F_j(z),$$

$\xi_j \in R$ и ϕ_1, ϕ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial y} - \nu\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} - \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial y} - \nu\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

Литература

1. Ильин, В. А. Математический анализ / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Л. Сендов. – 2-ое изд. – М. : Изд-во "Проспект", 2004.

2. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. – 2-ое изд. – М. : Наука, 1988.

3. Ващенко, О.В Пространство Харди решений обобщенной системы Бельтрами / О.В. Ващенко, А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения, 2005.

4. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М. : Наука, 1969.

5. Солдатов, А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай / А.П. Солдатов // Изв. АН СССР". Сер.матем. – 1991. – Т.55. – №.5. – С.1070-1100.

6. Солдатов, А.П. Метод теории функций в эллипт. краевых задачах на плоскости. II. Кусочно- гладкий случай / А.П. Солдатов // Изв. АН СССР. – 1992. – Т.56, № 3. – С.566-604.

7. Солдатов, А.П. Граничные свойства интегралов типа Коши. Lp- случай / А.П. Солдатов, А.В. Александров // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, №.1. – С. 3-8.

8. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М. : Мир, 1972.

9. Солдатов, А.П. О первой и второй краевых задачах эллиптических систем на плоскости / А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. 2003. - Т. 39, №5. – С. 674-686.

10. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.; Л., 1950.

REPRESENTATION OF THE COMMON DECISION OF NON-HOMOGENEOUS ELLIPTIC SYSTEM OF THE SECOND ORDER ON THE PLANE

E.A.Abapolova[1], M.I.Kurganskaja[2*]

[1]The Belgorod State University, Branch of Stary Oskol ,
309530, Stary Oskol, Solnechny St., 19
[2]The Belgorod State University,
308007, Belgorod, Studentcheskaja St., 14

The reduction of a general solution of non-homogeneous elliptic systems of the second order is given. Applications to non-homogeneous Lame system of the anisotropic elasticity theory are stated.