УДК 517.956.4

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Л.А. Самойлова*
Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая,14

В работе рассматривается задача с нелокальными краевыми условиями. Классическую разрешимость задачи удается доказать с помощью метода Пуанкаре-Перрона, после предварительного сведения ее к эллиптической задаче на стратифицированном множестве.

Введение

Краевым задачам с нелокальными краевыми условиями посвящено значительное число работ; первой в этом ряду стоит работа Бицадзе и Самарского. Между тем некоторые из этих нелокальных краевых задач (в том числе и задача Бицадзе-Самарского) специальными приемами сводятся к локальным задачам. В данной работе мы приводим пример такой нелокальной задачи, (являющейся аналогом задачи Бицадзе-Самарского). Эту задачу удается свести к локальной краевой задаче, точнее к задаче Дирихле для уравнения аналогичного уравнению Лапласа на стратифицированном множестве. Для доказательства ее разрешимости удается воспользоваться методом Пуанкаре-Перрона, т.е. решение оказывается верхней огибающей класса субгармонических функций естественным образом определяемого краевой задачей.

Постановка задачи.

Начнем с постановки задачи. На плоскости R^2 рассматривается прямоугольник П (см. рис.1),

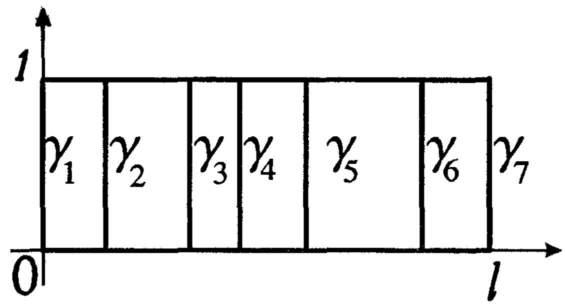

Рис 1. Исходное множество

в котором выделено n вертикальных интервалов $\gamma_i = \{(\xi_i, y), y \in (0,1)\}$, $(i = 1,..N)$, причем $\xi_1 = 0$, $\xi_n = l$. Эти интервалы разбиваются на группы $\Gamma_1,...,\Gamma_m$, в каждую из которых входит некоторое число интервалов γ_i (не обязательно идущих подряд). Задача состоит в нахождении непрерывной в замыкании П функции, которая гармонична в каждой полосе прямоугольника П, заключенного между γ_i и γ_{i+1}, т.е.

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

и которая удовлетворяет следующим условиям:

* Samoilova@bsu.edu.ru

$$u(\xi_i, y) = u(\xi_j, y), \ \ y \in [0;1], \tag{2}$$

если γ_i и γ_j входят в одну группу Γ_k. Далее, если Γ_k состоит из интервалов $\gamma_{i1},...,\gamma_{i\nu}$, то

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_{i1}, y) + ... + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_{i\nu}, y) = 0, \ \ y \in (0;1), \tag{3}$$

где $[\frac{\partial u}{\partial x}](\xi_i, y)$ означает "скачок" производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y), \ \ \xi_i \neq 0, l.$$

Если же $\xi_i = 0$ или $\xi_i = l$, то речь идет об односторонней производной $\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y)$ и, соответственно, $-\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y)$.

Кроме того, задаются условия Дирихле:

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \ \ x \in [0;l], \ \ u(x,1) = \varphi_1(x), \ \ x \in [0;l] \tag{4}$$

В отличие от задачи Бицадзе-Самарского (см[1]) функция u не предполагается гармонической во всей полосе Π, что компенсируется условиями вида (3). Это обстоятельство не позволяет применить схему доказательства разрешимости задачи (1)-(4), предложенную в работе [1].

Преобразование задачи (1)-(4) к задаче Дирихле на стратифицированном множестве

Разрешимость краевой задачи (1)-(4) будем доказывать методом Пуанкаре-Перрона (см. следующий пункт). В этом пункте дается интерпретация соотношений (1)-(4) в виде задачи Дирихле для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. Такая интерпретация (1)-(4), не являясь обязательной, упростит наши построения.

На множестве Π введем отношение эквивалентности $\sqcup$, объявив каждую точку, не принадлежащую ни одной из групп Γ_k, эквивалентной только себе, а в группе Γ_k эквивалентными объявим все точки вида (ξ_i, y) с фиксированным y. Фактор-множество $\Pi/_{\sqcup} = \Omega_0$ удобно представить в виде объединения одномерных многообразий, получаемых склейкой элементов γ_j группы Γ_i, и двумерных многообразий – образов участков между соседними интервалами γ_j.

Результат описанной факторизации Ф можно иллюстрировать в виде множества Ω_0, устроенного на рис. 2:

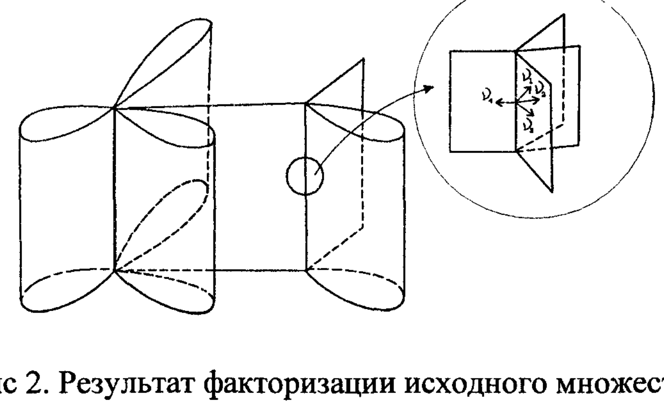

Рис 2. Результат факторизации исходного множества

Множество Ω_0 можно считать изометричным (в пределах каждой полоски между соседними γ_i) образом в R^3 прямоугольника Π. Хотя это не всегда удается реализовать без самопересечений, приводимые далее рассуждения от этого обстоятельства не зависят.

Через Ω обозначим замыкание Ω_0 в R^3. Разность $\partial\Omega_0 = \Omega$, Ω_0 будет тогда границей множества Ω_0 в топологии, индуцированной на Ω_0 из R^3. Одномерные многообразия, полученные в результате факторизации (склейки) точек отрезков $\gamma_i \in \Gamma_k$, будем называть одномерными стратами Ω и обозначать σ_{1k}. Образы полос между соседними интервалами γ_i назовем двумерными стратами; обозначать их будем через σ_{2k}. Точки из $\partial\Omega_0$, к которым примыкают страты σ_{1i} назовем нуль-мерными стратами и обозначим σ_{0i}. В число одномерных стратов включим также связные компоненты множества $\partial\Omega_0 \setminus \bigcup_i \sigma_{0i}$. В результате описанного разбиения множество Ω превратится в стратифицированное множество в смысле [2].

Соотношения (1),(2) можно теперь интерпретировать как единое уравнение $Lu = 0$ эллиптического типа (на описанном выше стратифицированном множестве), которое на одномерных стратах σ_{1i} имеет вид

$$\sum_{\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \tag{5}$$

что является иной записью уравнения (3). Суммирование ведется по всем стратам σ_{2j}, примыкающим к σ_{1i} (запись $\sigma_j \succ \sigma_{1i}$ как раз и означает факт примыкания), нормальные производные $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ вычисляются в направлении единичного вектора, ортогонального к σ_{1i} и направленного внутрь σ_{2j}; для некоторых стратов $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$ таких нормалей две и в сумму включены обе производные. На двумерных стратах уравнение $Lu = 0$ совпадает с (1). Мы позволим себе вместо L употреблять обозначение Δ, поскольку комплекс соотношений (1),(2), как было указано в работе [3] (см. также [4,5,6,7]), является точным аналогом уравнения Лапласа-Бельтрами на Ω_0.

Задача (1)-(4) на рассматриваемом множестве приобретает тогда вид аналога обычной "локальной" задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \tag{6}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{7}$$

где φ совпадает либо с φ_0, либо с φ_1 в зависимости от того, какой участок границы рассматривается.

Решением задачи (6),(7) назовем (в соответствии с предыдущим пунктом) непрерывную на Ω функцию, удовлетворяющую (6),(7) в классическом смысле. Тем самым будет доказана классическая разрешимость и задачи (1)-(4) в силу описанной выше процедуры ее сведения к (6),(7).

Разрешимость задачи (6),(7)

Доказательство разрешимости задачи, а с ней и задачи (1)-(4), проведем методом, аналогичным стандартному методу Пуанкаре–Перрона (см. [7]).

Реализацию этого метода начнем с решения задачи Дирихле в шаре множества Ω_0 достаточно малого радиуса.

Множество Ω в целом не является многообразием, а поэтому вблизи некоторых точек невозможно ввести естественные координаты; это относится, например, к точкам $X \in \sigma_{1i}$. Поэтому в окрестности ω точки $X \in \sigma_{1i}$ координаты вводятся автономно на каждой связной компоненте множества $\omega \bigcap (\sigma_{1i} \bigcup \sigma_{2j})$, где $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$ (координатные линии показаны на рис 3):

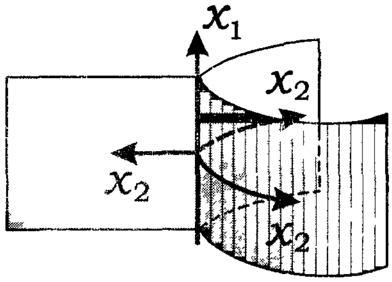

Рис 3. К введению координат

Далее в этой работе в качестве ω берется шар $B_r(X_0)$, который определяется следующим образом. Шаром $B_r(X_0)$ с центром в точке $X_0 \in \Omega_0$ назовем множество точек X, геодезическое расстояние которых до точки X_0 меньше r. При этом r будем считать меньше, чем расстояние от точки $X_0 \in \sigma_{kj}$, до стратов, отличных от σ_{kj}, замыкания которых не содержат эту точку. Праобразом такого шара при описанной выше факторизации Ф является объединение некоторого числа двумерных полушарий, если $X_0 \in \sigma_{1j}$, или обычный двумерный шар, если $X_0 \in \sigma_{2j}$. Пример стратифицированного шара изображен на следующем рисунке:

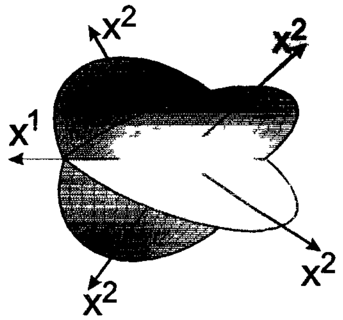

Рис 4. Стратифицированный шар

В дальнейшем постоянно используется интегрирование по так называемой "стратифицированной" мере μ. Для множества $\omega \in \Omega$ она определяется как сумма k-мерных мер Лебега "следов" ω на σ_{ki}, а именно мы полагаем

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{ki}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{ki}),$$

где μ_k - k-мерная мера Лебега на σ_{ki}. Нетрудно показать, что измеримыми по такой мере оказываются такие множества ω, что каждое пересечение $\omega \cap \sigma_{ki}$ является μ_k-измеримым. Интеграл Лебега от μ-измеримой на Ω функции f по такой мере оказывается суммой обычных интегралов Лебега по отдельным стратам, т.е.

$$\int_{\Omega} fd\mu = \sum_{\sigma_{kl}} fd\mu. \tag{8}$$

В дальнейшем рассматриваются (по большей части) интегралы по границам стратифицированных шаров (сфер). В этом случае сфера рассматривается как стратифицированное множество с естественной стратификацией $\vartheta_{l-1j} = \partial B_r(\xi) \cap \sigma_{lj}$ по всем l, j. Для обозначения меры, введенной на $\partial B_r(\xi)$ описанным выше образом, мы позволим себе пользоваться тем же символом μ.

Переходим к формуле Пуассона в стратифицированном шаре. Естественно, что в случае, когда $X_0 \in \sigma_{2j}$, формула Пуассона имеет обычный вид. Если же $X_0 \in \sigma_{1l} \subset \Omega_0$, то можно показать, что формула Пуассона имеет следующий вид:

$$u(X) = -\int_{\partial B_r(X_0)} \varphi(Y) \frac{\partial G(X,Y)}{\partial \nu} d\mu, \tag{9}$$

где, в предположении, что $Y \subset B_l = \sigma_{2l} \bigcap B_r(X_0)$ имеем:

$$G(X,Y) = \frac{2}{m} \begin{cases} \frac{m}{2} K(x,y) + \frac{2-m}{2} K(\hat{x},y), & X \in B_l, \\ \\ K(\hat{x},y), & X \in B_j (j \neq l) \end{cases} \tag{10}$$

здесь $\hat{x} = (x^1, -x^2)$, $x = (x^1, x^2)$, а m-число "лепестков" в шаре $B_r(X_0)$. Через $K(x,y)$ обозначена классическая функция Грина для оператора Лапласа в шаре при условиях Дирихле, где $x = (x^1, x^2)$ - координаты точки X, введенные описанным выше способом. Нетрудно показать, что функция $u(x)$, определяемая (9), действительно является решением задачи (6)-(7) в шаре $B_r(X_0)$.

Кроме формулы Пуассона, в шаре для реализации метода Пуанкаре-Перрона потребуются следующие факты. Первый из них является аналогом теоремы о среднем.

Теорема 4.1. Пусть $B_r(X_0)$ – стратифицированный шар, а $u(x)$ – гармоническая функция. Тогда справедливо следующее равенство:

$$u(X_0) = \frac{1}{\mu(\partial B_r(X_0))} \int_{\partial B_r(X_0)} u(x) d\mu. \tag{11}$$

Правую часть равенства (11) будем обозначать через $M_{r,x_0}(u)$. Можно показать, что если от функции u потребовать лишь выполнения неравенства $\Delta u \geq 0$, то вместо (11) имеет место неравенство

$$u(X_0) \leq M_{r,x_0}(u). \tag{12}$$

Доказательства этих утверждений стандартны. Неравенство (12) мотивирует следующее определение.

Определение 1. Непрерывная на Ω_0 функция u называется субгармонической, если для любого X_0 и для любого p справедливо неравенство $u(X_0) M_{r,x_0}(u)$.

Аналогично, с помощью противоположного неравенства, определяется понятие супергармонической функции.

Для удобства перечислим некоторые свойства субгармонических и супергармонических функций:

– функция одновременно субгармоническая и супергармоническая является гармонической;

– верхняя огибающая конечного числа субгармонических функций является субгармонической функцией;

– если v – субгармоническая (супергармоническая), а u – гармоническая функция, то $v+u$ (соответственно $(v-u)$) будет субгармонической (супергармонической) функцией;

– если $u_{X_0,r}(X)$ – гармоническая срезка (см. [8]) в шаре $\overline{B}_r(X_0)\subset\Omega$ субгармонической в Ω функции, то имеет место неравенство $u(X)\le u_{X_0,r}(X)$ при всех $X\in\Omega$.

Следующая теорема дает аналог "сферического" неравенства Харнака для гармонических функций.

Теорема 4.2. Пусть u – неотрицательная на Ω_0 гармоническая функция, а $B_r(X_0)\subset\Omega_0$, $X_0\in\sigma_{2l}$ или $X_0\in\sigma_{1l}$. Тогда при $\rho<r$ имеем

$$\frac{(r-\rho)}{(r+\rho)}u(X_0)\le u(X)\le\frac{(r+\rho)}{(r-\rho)}u(X_0) \tag{13}$$

для любого $X\in B_r(X_0)$, удаленного от X на расстояние ρ.

В отличие от классического случая, общее неравенство Харнака на стратифицированном множестве не следует из сферического из-за ограничений на радиус шара, описанного выше. Не следует оно, по тем же соображениям, и из теоремы о среднем. Тем не менее, его удается получить, комбинируя эти два факта. На этом пути получается следующее утверждение.

Теорема 4.3. Пусть $F\subset\Omega_0$ -компактно. Тогда существует такая (зависящая только от F) константа C, что неравенство

$$\max_{X\in F}u(X)\le C\min_{X\in F}u(X) \tag{14}$$

выполняется для всех неотрицательных в Ω_0 гармонических функций.

Нам также понадобится теорема Харнака.

Теорема 4.4. Пусть u_n: $B_r(X_0)\to R$ – неубывающая последовательность гармонических функций, сходящаяся в некоторой точке X. Тогда u_n сходится равномерно в любом шаре $B_{r'}(X_0)\subset B_r(X_0)$. Причем предельная функция будет гармонической.

Доказательство разрешимости, как обычно, начнем с определения класса S_φ субгармонических на Ω функций, принимающих на границе $\partial\Omega_0$ значения не большие, чем соответствующие значения функции φ. В соответствии с методом Пуанкаре – Перрона определим на Ω функцию W_φ как верхнюю огибающую класса S_φ, т.е.

$$W_\varphi(X)=\sup_{u\in S_\varphi}u(X), X\in\Omega_0.$$

Теперь нам предстоит доказать, что W_φ является классическим решением задачи (6), (7). Мы будем следовать здесь стандартной схеме, изложенной в [9].

Теорема 4.5. Функция W_φ является решением задачи (6), (7).

Доказательство. Возьмем произвольную точку $Y\in\Omega$ и покажем, что W_φ – гармоническая функция в некоторой окрестности Y. Тем самым мы покажем справедливость условия (6). Из определения W_φ следует, что существует последовательность u_n из класса S_φ, сходящаяся к W_φ в точке Y. Будем считать, что u_n – возрастающая последовательность (в противном случае, перейдем к последовательности

$\bar{u}_n = \max\{u_1, u_2, ..u_n\}$, которая также сходится в точке Y к $W_\varphi(Y)$). Можно также считать, переходя при необходимости к гармоническим срезкам, что функции u_n гармонические в некотором шаре $B_r(Y)$. Тогда в силу теоремы Харнака u_n сходится в шаре $B_{r'}(Y)$ при $r' < r$ к некоторой гармонической функции u.

Покажем, что $u = W_\varphi$ в $B_{r'}(Y)$ (тем самым мы покажем, что W_φ – гармоническая в этом шаре). В предположении противного найдется такая точка $Z \in B_{r'}(Y)$, что $u(Z) < W_\varphi(Z)$. В силу определения W_φ существует $w \in S_\varphi$ такая, что $u(Z) < w(Z) \le W_\varphi(Z)$. Рассмотрим последовательность $w_n = max(w, u_n)$. Рассуждая, как выше, видим, что гармоническая срезка функций w_n сходится к некоторой гармонической в $B_{r'}(Y)$ функции v. Тогда в силу выбора w_n имеем $u(X) \le v(X) \le W_\varphi(X)$ при всех $X \in B_{r'}(Y)$, причем $u(Y) = v(Y) = W_\varphi(Y)$. Отсюда, согласно принципу максимума, следует, что $u(X) \equiv v(X)$ в шаре $B_{r'}(Y)$. Мы пришли к противоречию с предположением, что $u(Z) < W_\varphi(Z)$ для всех $Z \in B_{r'}(Y)$.

Нам остается показать, что функция $W_\varphi(X)$ удовлетворяет граничному условию (7). Для этой цели воспользуемся стандартной барьерной техникой. Барьером в точке $Z \in \partial\Omega$ назовем, как обычно (см. [9]), супергармоническую функцию θ, положительную в $\bar{\Omega}$, $\{Z\}$ и обращающуюся в нуль в точке Z. Все точки, в которых существует барьер, называются *регулярными.*

Стандартно проверяется, что $W_\varphi(X)$ удовлетворяет условию (7) в каждой регулярной точке (подробности можно найти в работах [9,10]). Поэтому нам остается показать, что все точки границы регулярные. Это мы сделаем явным построением барьера. При этом барьерную функцию удобно строить не на стратифицированном множестве Ω, а на исходном прямоугольнике, из которого путем факторизации было получено множество Ω.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in \partial\Pi$. Построим шар в плоскости прямоугольника, касающийся этого прямоугольника только в точке z_0. Пусть y_0 – его центр. Тогда функция

$$u_{y_0}(x) = \ln\frac{|x - y_0|}{R},$$

где R радиус шара, является искомым барьером, что легко проверяется простыми выкладками. Например, очевидно, что она удовлетворяет в каждой полосе γ_i уравнению Лапласа. Из-за того, что она гладкая в прямоугольнике, следует, что все скачки, участвующие в формуле (3), равны нулю, а потому

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_{i1}, y) + \ldots + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_{iv}, y) = 0,$$

что совпадает с условием (3). Очевидно, что $u_{y_0}(x)$ положительна всюду в прямоугольнике, кроме точки z_0, и что $u_{y_0}(z_0) = 0$. Тем самым полностью доказано, что $W_\varphi(X)$ является решением задачи (6),(7).

Заключение

В работе исследована нелокальная краевая задача, являющаяся модификацией задачи Бицадзе-Самарского. С помощью метода Пуанкаре-Перрона ее удается свести к локальной краевой задаче для уравнения, аналогичного уравнению Лапласа на стратифицированном множестве. Решением является верхняя огибающая в классе суб-гармонических функций, принимающих на границе заданные значения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00697 и гранта БелГУ ВКАС-025-05.

Литература

1. Бицадзе, А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // Докл. АН СССР,1969. – Т.185. – С.739-740.

2. Фам, Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау / Ф. Фам. – М. : Мир,1970. – 184 с.

3. O.Penkin. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions //Partial Differential Equations on Multistructures, ed. by F. Ali Mehmeti, J.von Below and S.Nicaise /Lect. Notes Pure Appl. Math. -2001.-V.219.-P.183-192.

4. Penkin O.M. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks// J. Math. Sci. (N. Y.) 119 (2004), №. 6. – P. 836–867.

5. Пенкин, О.М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах / О.М. Пенкин, Е.М. Богатов // Мат. заметки. – 2000. – Вып. 68. – №.6. – С. 874.

6. Пенкин, О.М. О дифференциальных неравенствах для эллиптических уравнений на сложных многообразиях / О.М. Пенкин, Ю.В. Покорный // Докл. РАН, 1998. – Т.360, №.4, с. 456-458

7. Nicaise S., Penkin O. Poincare-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004), no. 2, 504–520.

8. John F. Partial Differential Equation. Springer Verlag, 1986. – 250 p.

9. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М.Н. Трудингер. – М. : Наука, 1989. 464 с.

10. Хейман, У. Субгармонические функции / У. Хейман, П. Кеннеди. – М. : Мир, 1980. – 304 с.

ABOUT ONE NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM.

L.A. Samoilova
Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

The problem considered here is a modification of so called Bitsadze-Samarcky's problem. Our approach is based on a special reduction of the original problem to a local boundary problem for elliptic operator on the stratified set.