НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ. 2004. № 3. Вып. 9

УДК 537.311.33

АНАЛИЗ РЕЖИМА ТЕПЛОВОГО ПРОБОЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н.В. Андреева, Ю.П. Вирченко*

Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая,14

На основе подхода Вагнера в теории теплового пробоя диэлектриков проанализировано явление теплового пробоя полупроводниковой плёнки без учёта эффекта стабилизации внешним сопротивлением. Получены формулы для диаметров проплавленных каналов и времени пробоя

ВВЕДЕНИЕ.

В работах [1], [2] была предложена математическая модель для описания возникновения и развития теплового пробоя в плёнках полупроводниковых материалов. При построении этой модели не учитывался эффект стабилизации процесса пробоя, который может иметь место в том случае, когда плёнка входит в состав функционального элемента работающей электронной цепи. В этом случае стабилизирующее влияние на развитие пробоя оказывает сопротивление внешней цепи. Необходимо отметить, что аналогичная модель рассматривалась ещё в работе [3] (см. также [4]). Она анализировалась в связи с построением теории теплового пробоя диэлектриков. Однако, фактически, результаты цитируемой работы приложимы именно для описания теплового пробоя полупроводниковых материалов, так как в ней использовалось представление о разогревании материала протекающим током, в результате которого и возникает тепловой пробой при условии возрастания проводимости материала с ростом температуры, начиная с некоторой пороговой точки вплоть до точки плавления (точки эвтектики несобственного полупроводника). Наличие заметного тока при этом характерно как раз для полупроводников, а не для диэлектриков. В диэлектриках же процесс пробоя развивается лавинно, и влияние разогрева сказывается только на уменьшении энергетической щели, отделяющей зону проводимости. В отличие от работы [5], в модели, исследуемой в [1],[2], пренебрегалось толщиной плёнки, т.е. изучалась двумерная краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности с нелинейно зависящим от температуры распределённым внутренним источником тепла, которым является протекающий ток. Это давало возможность упростить задачу математического исследования, так как уравнение непрерывности электрического тока удовлетворяется в этом случае автоматически и, как следствие, уменьшается число уравнений модели. Но, несмотря на это, достаточно глубокое исследование возникающей математической задачи, необходимое для выявления всех физических особенностей явления теплового пробоя, довольно затруднительно. Поэтому в настоящем сообщении мы предлагаем метод довольно грубого приближённого анализа указанной модели, который, однако, позволяет правильно описать некоторые физические особенности явления и предсказать зависимости характеристик пробоя – диаметров проплавленных каналов, температуры и времени пробоя от характеристик материала.

* virch@bsu.edu.ru

В основе подхода лежит представление о том, что пробой развивается из тепловых флуктуаций на плёнке при наличии положительной обратной связи между протекающим током и ростом электропроводности. При этом тепловые флуктуации превращаются в каналы с существенно повышенной температурой и, следовательно, электропроводностью. Вследствие специфической связи между температурными зависимостями электропроводности и теплопроводности теплообмен между каналами, при определённых их размерах, определяемых свойствами материала, оказывается затруднённым. Таким образом, температурное поле, описывающее развитый тепловой пробой, должно быть почти постоянным вне канала, и медленно изменяться от точки к точке внутри него и иметь довольно резкую границу перехода. Размер канала, согласно анализу работ [1], [2], должен определяться некоторой универсальной величиной, (т.н. *фундаментальной длиной*), значение которой для данного материала не зависит от условий протекания процесса. Наличие каналов с диаметрами, равными величине, присущей данному материалу, позволило применить к исследуемым решениям уравнения теплопроводности качественные рассуждения, аналогичные известной элементарной теории Вагнера электропробоя диэлектриков (см., например, [4]). Режим возникновения пробоя в рамках таких рассуждений реализуется в виде бифуркации решений уравнения теплопроводности при изменении параметров, определяющих тепловое состояние плёнки.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

Рассматривается полупроводниковая плёнка, к плоскостям которой подведены два электрода. Физически теория строится из предположения [1], [2], что в плёнке имеются тепловые флуктуации, т.е. области с повышенной температурой по сравнению с температурой фона T_0, т.е. области, окружающей тепловые флуктуации на плёнке. Ввиду того, что зависимость проводимости от температуры имеет участок монотонного возрастания, то при попадании температуры T_0 (рабочей точки) в начало этого участка, места с большей температурой обладают меньшим сопротивлением, чем всё окружающее вещество. Известно, что в [1], [2], если проводимость материала растёт быстрее, чем теплопроводность, то ток имеет тенденцию к сосредоточению в областях плёнки с повышенной температурой. Поэтому схематически температурное поле на плёнке можно представить в виде теплового фона с температурой T_0 и тепловых "каналов", перпендикулярных к плоскостям плёнки. Эти каналы соответствуют флуктуациям температуры. Между каналами и фоном имеется довольно узкая граница с какой-то характерной величиной l.

Будем считать, что размеры достаточно больших для развития пробоя температурных флуктуаций в плёнке много меньше среднего расстояния между ними. Тогда можно считать эти флуктуации невзаимодействующими. Поэтому далее рассматриваем модель, в которой имеется только один канал. Для простоты мы будем представлять его в форме кругового цилиндра с диаметром D.

Изменение температурного поля на плёнке описывается уравнением теплороводности с распределённым источником тепла с плотностью $E^2\sigma(T)/d^2$, которым является протекающий в канале ток (выделением тепла, связанным с протеканием тока вне канала пренебрегаем). Здесь E – напряжение, приложенное к плоскостям плёнки, $\sigma(T)$ – электропроводность материала, являющаяся функцией температуры T, d – толщина плёнки. Мы будем исследовать центрально симметричные решения уравнения теплопроводности.

Пусть решения $T = T(r,t)$ уравнения вне и внутри канала являются почти постоянными, соответственно равными $T(r,t) \approx T_0$ и $T(r,t) \approx T(t)$. Они существенно изменяются только вблизи границы, $r \approx D/2$. Таким образом, $T(r,t)$ должны удовлетворять эволюционному уравнению

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}(\chi(T)\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{Q_1(T)}{V}, \tag{1}$$

где считается, что начало полярных координат находится в центре канала. В уравнении (1) ρ – плотность вещества, c – удельная теплоёмкость, рассчитанная на единицу массы, $\chi(T)$ – коэффициент теплопроводности вещества, $V = Sd$ – объём цилиндрического канала (S – площадь поперечного сечения канала). Кроме того, введена функция

$$Q(T) = E^2 \sigma(T) S / d \tag{2}$$

– количество тепла, выделяющееся в канале в единицу времени.

Из уравнения (1), интегрированием его по объёму канала V получаем

$$\rho c V \frac{\partial T}{\partial t} = \int (\frac{\partial}{\partial r} \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r}) dv + Q_1(T),$$

где пренебрегается потоком тепла через торцы канала. Тогда

$$\int (\frac{\partial}{\partial r} \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r}) dv = \oint \chi(T)(\nabla T,\ d\vec{s}) = \pi\, d D \chi(T) (\frac{\partial T}{\partial r})_s$$

и заменим значение радиальной производной на границе канала на

$$(\frac{\partial T}{\partial r})_s = \frac{T(t) - T_0}{l},$$

где l – величина, по порядку величины равная толщине переходного слоя – "толщине" границы канала. Вводя вместо коэффициента теплопроводности приведенную его величину $\alpha(T) = \chi(T)/l$, получим эволюционное уравнение для изменения температуры $T(t)$ внутри канала

$$\frac{dQ}{dt} = \rho c V \frac{\partial T}{\partial t} = Q_1(T) - Q_2(T), \tag{3}$$

где $Q_2(T)$ – количество тепла, отдаваемое каналом через боковую поверхность. Оно определяется формулой

$$Q_2(T) = \alpha(T)(T - T_0)(\pi\, d D). \tag{4}$$

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДЛИНА.

Покажем, что диаметр D может быть найден на основе рассуждений, сходных с теми, которые использовались в теории Вагнера [6] в теории теплового пробоя диэлектриков.

Решения уравнения (2) обладают т.н. *обострением режима*, т.е. неограниченно возрастают за конечное время. Однако, этот неограниченный рост осуществляется по двухэтапному сценарию. Из работы [2] известно, что тепловая флуктуация сначала разрастается вширь, т.е. D увеличивается, а затем, достигнув определённого размера, величина D почти не растёт, напротив, начинает быстро расти амплитуда (максимум) решения. Таким образом, существует критическое значение величины D, которое разграничивает эти эволюционные этапы.

Заметим, что малым значениям D отвечает неравенство $Q_1(T) > Q_2(\mathrm{T})$. При реализации этого неравенства внутри канала производится больше тепла, чем отдаётся наружу. Однако, это тепло расходуется не на повышение температуры в канале, а на прогревание участков плёнки, соседних с каналом, что приводит к росту D, который продолжается до тех пор, пока не установится равновесие

$$Q_1(T) = Q_2(T). \tag{5}$$

Если реализуется обратное неравенство $Q_1(T) > Q_2(T)$, то имеется два решения уравнения (5), в случае выпуклости функции $\sigma(T)$. Меньшее решение будет устойчивым, а большее – неустойчивым. Тогда в точке бифуркации, когда в (5) реализуется двойной корень, происходит переход от этапа эволюции – расширения канала к этапу быстрого роста температуры внутри канала. Неограниченный рост температуры приводит к тепловому пробою. Он описывается именно неустойчивым решением уравнения (3).

Решая совместно систему уравнений (5) и

$$\frac{dQ_1(T)}{dT} = \frac{dQ_2(T)}{dT} \tag{6}$$

– условия касания, находим критические значения параметров T и D, начиная с которых развивается тепловой пробой в заданных внешних условиях.

В настоящей работе мы проанализируем поставленную задачу с простейшими зависимостями $\alpha(T)$ и $\sigma(T)$ в виде квадратных трёхчленов. Этот случай соответствует общему положению при существовании не более двух точек пересечения графиков $Q_1(T)$ и $Q_2(T)$. Будем считать, что зависимости от температуры имеют вид $\alpha(T) = \alpha_0(1+\mu\theta)$, $\sigma(T) = \sigma_0\ (1+\nu(\theta-\Delta)^2/2)$, $\theta = T - T_0$, $\Delta = T_0 - T_m$. Тогда (1), (4) принимают вид

$$Q_1(T) = \sigma_0\,\frac{E^2}{d}\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)(1+\nu(\theta-\Delta)^2/2), \tag{7}$$

$$Q_2(T) = \alpha_0(\pi\, d\, D)\theta(1+\mu\theta). \tag{8}$$

Введём безразмерный диаметр $x = D/d$ и характерную температуру $\frac{E^2}{4d}\frac{\sigma_0}{\alpha_0} = \Theta$.

Тогда уравнение (5) превращается в

$$\Theta x\ (1+\nu(\theta-\Delta)^2/2) = \theta\ (1+\mu\theta). \tag{9}$$

Уравнение же (6) представится в виде

$$\Theta x\nu\ (\theta-\Delta) = 1+2\mu\theta. \tag{10}$$

Решения системы (9), (10) – критические значения величин x_*, θ_*. Делением одного уравнения на другое исключаем x и находим квадратное уравнение для возможных значений θ_*

$$\nu A\theta^2 - 2\mu\theta B - B = 0, \tag{11}$$

где введены безразмерные параметры $A = 1/2 + \mu\Delta$, $B = 1+\nu\ \Delta^2/2$. Введём параметр $\frac{\nu A}{\mu B} = \hat{\Theta}^{-1}$, имеющий размерность температуры. Тогда возможные значения $\theta_\pm$ величины θ_* получаются в виде

$$\theta_\pm = \hat{\Theta}[1 \pm (1+(\mu\hat{\Theta})^{-1})^{1/2}]. \tag{12}$$

Проанализируем, какие из этих решений на самом деле соответствуют θ_*. Заметим, что мы рассматриваем все представляющиеся возможности, т.е. допускаем, что величины Δ, μ, ν могут иметь как положительные, так и отрицательные знаки. Поэтому сформулируем, прежде всего, условие разрешимости задачи, т.е. условие вещественности величины θ_*

$$(\mu\hat{\Theta})^{-1} = \frac{\nu A}{\mu^2 B} > -1. \tag{13}$$

Кроме того, необходимо потребовать, чтобы $\theta_* > 0$, так как всегда $T > T_0$, $\theta > 0$ и, очевидно, $x_* > 0$. Наконец, для возможности обострения режима (динамического развития пробоя, см. следующий раздел) необходимо $\nu > 0$. В этом случае $B > 0$.

Приступим к анализу возможных решений. Сначала не будем интересоваться знаком величины x_*. При $\nu > 0$ возможны оба знака для величины μ. Если $\mu < 0$, то исследуемая зависимость $\alpha(T)$ может рассматриваться только на ограниченном интервале температур, чтобы обеспечивать выполнение $\alpha(T) > 0$, и для возможности пробоя необходимо, чтобы температура плавления попадала в этот температурный интервал.

1). Если $\mu, \hat{\Theta} > 0$, либо μ, $\hat{\Theta} < 0$, то нераверство (13) не даёт ограничений, и в первом случае реализуется только θ_+, а во втором – θ_-.

2). Если $\mu > 0, \hat{\Theta} < 0$, то из (12) следует, что решений, обеспечивающих положительность θ_*, нет.

3). Если $\mu < 0, \hat{\Theta} > 0$, то возможно только решение θ_+.

Из требования $x_* > 0$ возникают дополнительные ограничения на возможные решения и на параметры Δ, μ, ν Согласно (10), имеем

$$x_* = \frac{1 + 2\mu\theta_*}{\nu\Theta(\theta_* - \Delta)}. \tag{14}$$

I). Пусть имеет место 1) и $\mu > 0$ Тогда обязательно выполняется $1 + 2\mu\theta_* > 0$, и при $\nu > 0$ неравенство x_* реализуется только при $\theta_* > \Delta$. В этом случае $\theta_* = \theta_+$ и $\hat{\Theta} > 0$. Неравенство $\theta_* > \Delta$ даёт нам условие на параметры Δ, μ, ν, при котором реализуется такой режим.

Кроме того, из определения величины $\hat{\Theta}$ получаем, что $A > 0$, и это влечёт дополнительное условие $\Delta > -(2\mu)^{-1}$ для возможности осуществления такого режима.

Пусть теперь $\mu < 0$. Тогда возможны случаи 1) $\hat{\Theta} < 0$, $\theta_* = \theta_+$ и 2) $\hat{\Theta} > 0$, $\theta_* = \theta_-$.

Разберём первый случай. II). Из определения $\hat{\Theta}$ следует, что $A < 0$. Для возможности обострения режима необходимо (см. (16)), чтобы $\theta_* = \theta_+ < \Delta$, что даёт условие на параметры Δ, μ, ν, в частности, $\Delta > 0$. Поэтому из неравенства $x_* > 0$ получаем $1 + 2\mu\theta_* > 0$. Заметим, что это условие согласуется с неравенством $A < 0$, так как $1 + 2\mu\theta_* > 1 + 2\mu\Delta = 2A$.

Здесь также возникает дополнительное условие $1+\mu\theta_* > 0$, получаемое из требования положительности теплопроводности $\chi(T_*) > 0$ в точке возникновения теплового пробоя (то же самое следует из (9) и $x_* > 0$). Подставляя в это условие выражение для $\theta_* = \theta_+$, получаем $1+\nu^{-1}(1+\sqrt{1+y}) > 0$, где $y = (\mu\hat{\Theta})^{-1} < 0$. Из этого неравенства следует искомое условие на параметры $\mu^2|A|(\nu B)^{-1} > 1$.

Во втором случае, $\mu < 0, \hat{\Theta} < 0$, получаем $A > 0$ и $\theta_* = \theta_-$. Тогда для обострения режима необходимо (см. (16)), чтобы $\theta_* > \Delta$ и, в свою очередь, для $x_* > 0$ нужно $1+2\mu\theta_* > 0$. Подставляя явное выражение для θ_*, получаем при y>0 невозможное неравенство $1+2y^{-1}(1-\sqrt{1+y}) > 0$.

Таким образом, бифуркации перехода к режиму теплового пробоя возможны только в случаях, описанных в пп. I) и II).

ВРЕМЯ ПРОБОЯ.

Для вычисления времени пробоя необходимо проанализировать динамическое уравнение (3) для температуры $T(t)$ внутри канала. Так как объём канала в критической точке $x = x_*$ выражается формулой $V = \pi x_*^2 d^3/4$, то в терминах функции $\theta(t)$ это уравнение представляется в виде

$$\left(\frac{\rho c d x_*}{4\alpha_0}\right)\frac{d\theta(t)}{dt} = \Theta x_*(1+\nu(\theta(t)-\Delta)^2/2) - \theta(t)(1+\mu\theta(t)), \tag{15}$$

где выражения в скобках обязаны быть положительными, так как их знаки соответствуют знакам теплопроводности и электропроводности. Развитие теплового пробоя, в рамках используемого нами подхода, интерпретируется как динамический режим с обострением, т.е. такой, когда решение обращается в бесконечность за конечное время. Такая быстрая эволюция невозможна при $\nu < 0$, так как из (15) в этом случае следует $d\theta(t)/dt < x_*\Theta$, т.е. $\theta(t) < \theta_0 + x\Theta t$.

Представим уравнение (15) в форме

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \left(\frac{4\alpha_0}{c\rho d x_*}\right)\frac{A}{\theta_* - \Delta}(\theta(t)-\theta_*)^2 = \xi(\theta(t)-\theta_*)^2, \tag{16}$$

где при преобразовании правой части использованы уравнения (11) и (14). Для осуществления режима пробоя необходимо, чтобы $\nu > 0$, и при этом решения $\theta(t)$ неограниченно возрастали. Это возможно только, если коэффициент в правой части положителен, т.е. необходимо, чтобы одновременно выполнялись условия $A > 0, \theta_* > \Delta$, либо, что то же самое, $\Theta x_*\nu > 2\mu$, ввиду $\Theta x_*\nu/2 - \mu = A(\theta_* - \Delta)^{-1}$. При этом решение, описывающее развитие пробоя, имеет вид

$$\theta(t) = \theta_* + \frac{\theta_0 - \theta_*}{1 - \xi t(\theta_0 - \theta_*)}.$$

Откуда находится время пробоя как такое время, за которое θ (t) уходит на бесконечность

$$t_{\infty} = [\xi(\theta_0 - \theta_*)]^{-1}.$$

При этом пробой возможен только, если флуктуация θ_0 достаточно велика, $\theta_0 > \theta_*$.

Список литературы

1. Yu.P. Virchenko, A.A. Vodyanitskii, Heat localization and formation of heat breakdown structure in semiconductor materials. I. Nonlinear model. Functional Materials 8, No. 3 428-434 (2001).

2. Yu.P Virchenko, A.A. Vodyanitskii, Heat localization and formation of secondary breakdown structure in semiconductor materials. II. Mathematical analysis of the model. Functional Materials 9, No. 4, 601-607 (2002).

3. Фок В.А., К тепловой теории электропробоя. Труды Ленинградской физ.-техн. лаборатории 5, 52 (1928).

4. С.М.Брагин, А.Ф.Вальтер, Н.Н.Семёнов, Теория и практика пробоя диэлектриков. М: ГИ, 1929, 383 с.

1. Fock V.A., Die Wärmetheorie des Durschlages. A.f.E. (Arkhif für Elektrotechnik) v. 19, p.71 (1927).

2. Wagner K.W. Trans. American Inst. Electr. Engin. 41, 288 (1922).

Анализ режима теплового пробоя полупроводниковых материалов на основе нелинейного уравнения теплопроводности

Н.В. Андреева, Ю.П. Вирченко

На основе подхода Вагнера в теории теплового пробоя диэлектриков проанализирован тепловой пробой полупроводниковой пленки без учета эффекта стабилизации внешним сопротивлением.

Получены формулы для диаметров проплавленных каналов и времени пробоя

Analysis of the secondary breakdown of semiconductor materials on the basis of the nonlinear thermal conductivity equation

N V. Andreyeva, Yu.P. Virchenko

On the basis of the Wagner approach in the theory of thermal breakdown of dielectrics, the secondary breakdown of the semiconductor layer has been analyzed. The effect of the stabilization by an external resistance has been not taken into account. Formulas expressing diameters of melted channels and the breakdown time are obtained.