УДК 519.62

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE 8 К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

М.А. Аматов*, И.А. Клименко, И.С. Кузнецова, Н.А. Чеканов

Белгородский государственный университет
308015, Белгород, ул. Победы, 85

В работе приведены программы для аналитического, графического и численного интегрирования методом шагов дифференциальных уравнений первого прядка с отклоняющимся аргументом. На приведённых примерах проиллюстрировано, как с помощью полученных программ можно исследовать изменение поведения решений уравнений запаздывающего и нейтрального типов в зависимости от изменения параметров.

Введение

При математическом описании различных явлений природы исходят, как правило, из простейшей гипотезы, считая, что будущее развитие процесса полностью определяется его состоянием в настоящий момент. Если при этом динамика процесса описывается дифференциальными уравнениями (в конечномерном фазовом пространстве), то, при указанной гипотезе, это будут обыкновенные дифференциальные уравнения.

Существуют, однако, явления природы, в которых будущее существенно зависит от состояния процесса на некотором интервале времени в прошлом. Этот интервал времени называется обычно запаздыванием (отклонением, последействием). Для таких явлений обыкновенные дифференциальные уравнения уже не могут служить удовлетворительной математической моделью. В этом случае прибегают, как правило, к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Такие уравнения в физических задачах используются для учёта явления гистерезиса в сопротивлении материалов и теории магнетизма [1], в биологии [2, 3] – при учёте возрастных различий в популяции.

Но особенно широкое применение такие уравнения имеют в теории автоматического управления и регулирования [4-6]. Действительно, в любой, даже самой совершенной системе автоматического управления, для передачи сигнала по линии обратной связи на управляющее устройство требуется некоторый промежуток времени, который и определяет явление запаздывания. А поскольку динамика систем автоматического регулирования, как правило, описывается дифференциальными уравнениями, то с учётом запаздывания задача сводится к нахождению непрерывного решения уравнения вида:

$$F(t,x(t),x'(t),\ldots,x^{(n)}(t),x(t-\tau),x'(t-\tau),\ldots,x^{(m)}(t-\tau))=0, \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$x(t)\equiv f(t) \quad при \quad t_0-\tau\le t\le t_0, \tag{2}$$

$$x(t_0)=f(t_0),\ x'(t_0)=x_0',\ x''(t_0)=x_0'',\ldots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{n-1}. \tag{3}$$

Здесь $f(t)$ – заранее заданная непрерывная функция, $x_0', x_0'',\ldots,x_0^{n-1}$ – произвольные заранее заданные числа.

* amatovm@bsu.edu.ru, chekanov@bsu.edu.ru, klimenko@bsu.edu.ru

Следует отметить, что теории уравнений и систем уравнений вида (1) посвящена обширная литература [7-13]. На практике же интегрирование таких уравнений – весьма сложная задача. Даже самый простой метод интегрирования уравнения (1) – метод шагов (метод последовательного интегрирования) – приводит к очень громоздким вычислениям. Поэтому естественно попытаться применить к решению краевой задачи (1) – (3) ЭВМ. Но в математическом пакете MAPLE 8 [14], прекрасно зарекомендовавшем себя при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений, программ для интегрирования уравнений вида (1) нет. Нет их и в более поздних версиях этого пакета MAPLE 9,10.

Постановка задачи

Как уже отмечалось выше, интегрирование уравнений с отклоняющимся аргументом приводит к очень громоздким выкладкам. При интегрировании методом шагов это связано с тем, что решение, полученное на некотором шаге, подставляется в уравнение, которое после этого интегрируется, и полученное решение вновь подставляется в уравнение и т.д. В результате с увеличением числа шагов усложняется как уравнение, так и его решение. Поэтому целью настоящей работы является разработка алгоритмов и составление программ для нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего и нейтрального типов на основе математического пакета MAPLE.

Основная часть

Для решения поставленной задачи методом шагов в среде MAPLE был составлен комплекс программ DEDA (от Differential Equation with Deviation Argument). В комплекс входят программы: ddesol, ddeplot, ddefsol и другие, которые позволяют находить решение дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в аналитическом виде, строить их графики и т.д. (название программ от английского differential-difference equation). Описание двух алгоритмов программ из комплекса в псевдокодах представлено ниже вместе с примерами их работы. В первом примере решение представляется в аналитическом виде, а во втором уравнение (1) численно интегрируется, и решение представляется в виде графика.

Описание алгоритма в псевдокодах нахождения решения дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (1) в аналитическом виде.

Алгоритм 1.

Input:

dde – дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом запаздывающего или нейтрального типа;

f – начальная функция; t0 – начальное значение аргумента;

X – искомая функция; m – число шагов.

Output:

M – матрица, строки которой представляют собой решения уравнения dde на первом, втором и т.д. шагах.

Local: Eq, Sol, A, a, B, b, C, DSol, M, T, ic– вспомогательные массивы, n4, n5, k – натуральные числа, T – число типа float..

Procedure

1:str:=convert(dde,string): T:=parse(substring(str,n4..n4+n5-2)):

for k=1 **to** m **do**

2: ic[k]:=op(0,X)(t0+(k-1)·τ)=C[k]:

3: Eq[k]:=subs(op(0,X)(op(1,X)-τ)=a[k],D(op(0,X)) (op(1,X)-τ)=b[k]:

4: Sol[k]:=dsolve({Eq[k],ic[k]}, op(0,X)(op(1,X))):

5: A[k]:=op(2,Sol[k]): B[k]:=op(2,diff(Sol[k],op(1,X))):

a[k+1]:=subs(op(1,X)=op(1,X)-τ,A[k]): b[k+1]:=subs(op(1,X)=op(1,X)-τ,B[k]):

6: M[k,1]:= op(0,X)(op(1,X))=A[k]:

end do:

7: convert(M,matrix): op(0,X)(op(1,X))=evalm(M);

end of procedure;

Данная процедура реализуется в виде следующей последовательности шагов:
На ШАГЕ 1 над уравнением dde проделываются некоторые вспомогательные действия, в результате чего, в частности, находится величина запаздывания T.
Во-вторых, выполняется m-кратный цикл из пяти шагов:

Шаг 2 - нахождение начальных условий.

Шаг 3 – подстановка решения и его производной с аргументом t-τ в уравнение dde.

Шаг 4 – интегрирование полученного уравнения с начальными условиями, найденными на втором шаге.

Шаг 5 – вычисление всех величин, необходимых для новых начальных условий.

Шаг 6 – формирование матрицы окончательного ответа.

После завершения m-кратного цикла выполняется следующий, последний

Шаг 7 – вывод решения.

Пример 1. Проинтегрируем с помощью приведённой процедуры следующее уравнение второго порядка запаздывающего типа:

$$x''(t) = x(t-1) + x(t) = 0 \tag{4}$$

с начальными условиями:

$$x(t) \equiv t \quad при \quad -1 \le t \le 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1. \tag{5}$$

Получаем следующий ответ:

$$x(t) = \left| \begin{array}{ll} x_1(t) = 0,5\cdot e^t - 1,5\cdot e^{-t} - t + 1, & 0 \le t \le 1; \\ x_2(t) = 0,25\cdot(t-5)e^{t-1} + 0,25\cdot(3t+5)e^{1-t} + 0,5\cdot e^t - 1,5\cdot e^{-t} + t - 2, & 1 \le t \le 2; \\ x_3(t) = -2^{-4}\cdot\left(3t^2 + 7t + 12\right)e^{2-t} + 0,25\cdot(3t+5)e^{1-t} + & \\ +2^{-4}\cdot\left(t^2 - 13t + 44\right)e^{t-1} + 0,25\cdot(t-5)e^{t-1} + 0,5\cdot e^t - 1,5\cdot e^{-t} - t + 3, & 2 \le t \le 4. \end{array} \right|$$

Мы ограничились выводом только трёх шагов решения основной начальной задачи (4), (5) потому, что формула решения на четвёртом шаге занимает почти половину страницы. Возрастание сложности выражения решения с ростом числа шагов – явление очевидное и присуще всем без исключения дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Следует отметить, что для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего и нейтрального типов составленные программы обеспечивают вывод числа шагов ограниченного только объёмом памяти компьютера. Для нелинейных же уравнений вывод решения прекращается на том шаге, когда в силу чрезмерного усложнения уравнения его решение уже не может быть выражено через элементарные и известные специальные функции или когда на следующем шаге решение обращается в бесконечность.

Алгоритм 2.

Input:

dde – дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом запаздывающего или нейтрального типа;

f – начальная функция; t0 – начальное значение аргумента;

X – искомая функция; m – число шагов;

Output:

P – график решения уравнения dde.

Local: Eq, Sol, A, a, B, b, C, DSol, M, p, ic, – вспомогательные массивы, n4, n5, k –натуральные числа, T – число типа float..

```
Procedure
    1: str:=convert(dde,string): T:=parse(substring(str,n4..n4+n5-2)):
for k=1 to m do
    2: xt[k]:=op(0,X0)(t0+(k-1)·τ)=C[k]:
    3: Eq[k]:=subs(op(0,X0)( op(1,X0)-τ)=a[k],D(op(0,X0)) ( op(1,X0)-τ)=b[k]:
    4: Sol[k]:=dsolve({Eq[k], xt[k]}, op(0,X0)( op(1,X0))):
    F[k]:= dsolve({Eq[k], xt[k]}, op(0,X0)( op(1,X0)), type=numeric,
        range=t0+(k-1)τ..t0+kτ):
    5: A[k]:=op(2,Sol[k]): B[k]:=op(2,diff(Sol[k],op(1,X0))):
        a[k+1]:=subs(op(1,X0)=op(1,X0)-τ, A[k]): b[k+1]:=subs(op(1,X0)=
        op(1,X0)-τ,B[k]):
    6: p[k]:=odeplot(F[k],[ op(1,X0), op(0,X0)( op(1,X0))], t0+(k-1)τ..t0+kτ)
end do:
    7: plots[display](p[k]$k=1..m);
end of procedure;
```

Данная процедура отличается от предыдущей только в шаге 4, где добавлено численное интегрирование дифференциального уравнения dde и в заключительном шаге 7, на котором осуществляется вывод графика решения.

Пример 2. В качестве примера проинтегрируем с помощью приведённой процедуры следующее уравнение первого порядка нейтрального типа:

$$x'(t) = a \cdot x(t-1) + b \cdot x'(t-1) + c \cdot x(t) \tag{6}$$

с начальными условиями

$$x(t) \equiv f(t) \equiv t^2 - 1, \quad при \quad 0 \le t \le 1, \quad x(1) = 0 \tag{7}$$

для различных значений параметров a, b, c.

При значениях параметров: $a = 1, b = 1, c = -1$ график решения основной начальной задачи (6), (7) изображён на рисунке 1.

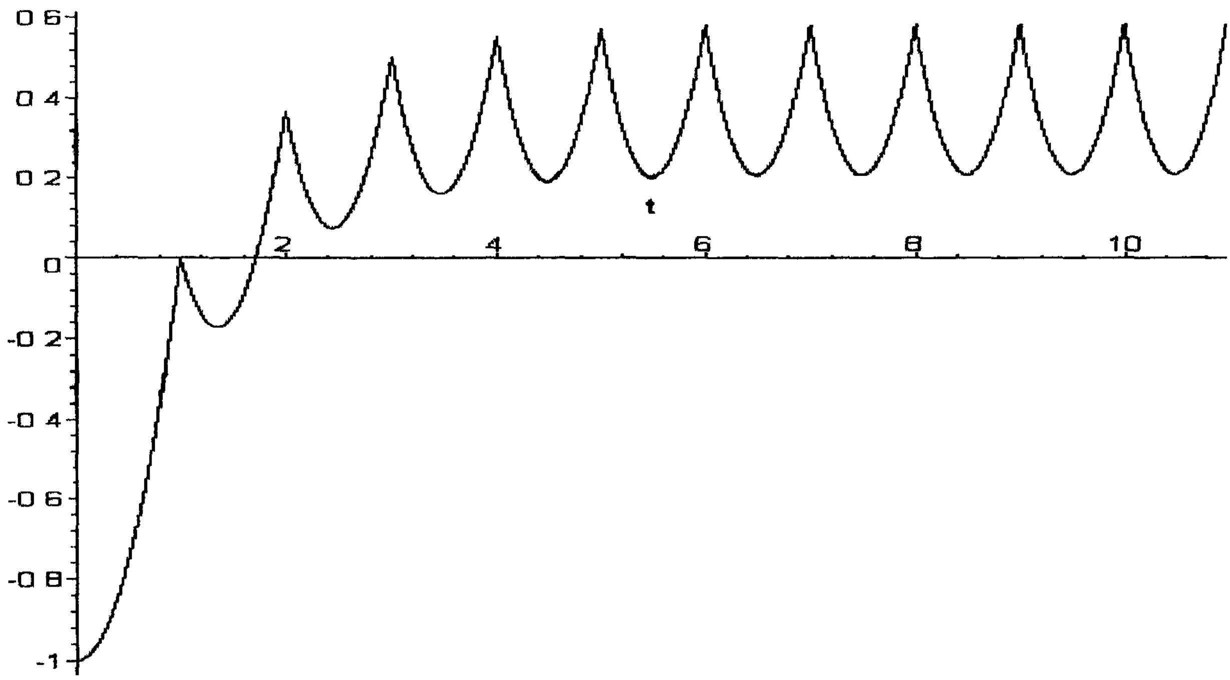

Рис. 1

Из рис. 1 видно, что с увеличением числа шагов в системе, описываемой начальной задачей (6), (7), устанавливается периодический режим, график которого получается параллельным сдвигом куска параболы $x \approx 1,5 \cdot t^2 + 0,21$; $-0,5 \le t \le 0,5$ в положительном направлении оси Ot.

При значениях параметров: $a = 1, b = 1, c = 1$ график решения основной начальной задачи (6), (7) изображён на рис. 2.

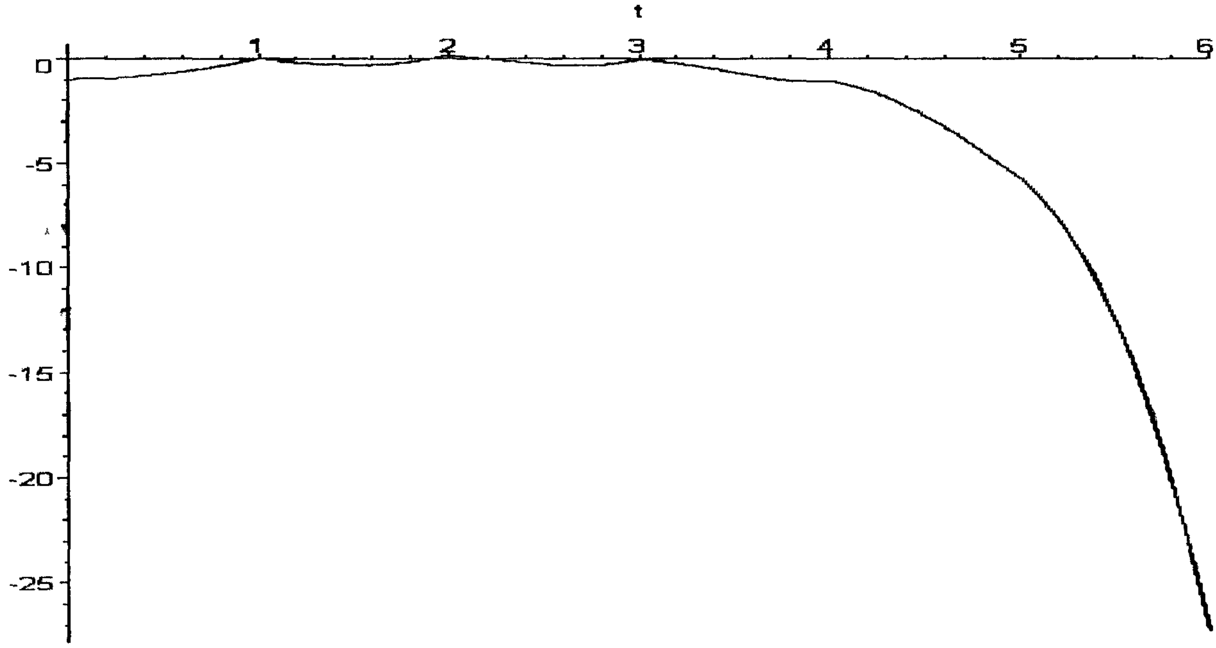

Рис. 2

Из рис. 2 ясно, что $\lim x(t) = -\infty$, где t_0 заключено между 6 и 7.

Если же мы возьмём значения параметров $a = -1, b = 1, c = -3$, то решением той же начальной задачи (6), (7) будут затухающие хаотические колебания, график которых изображён на рис. 3.

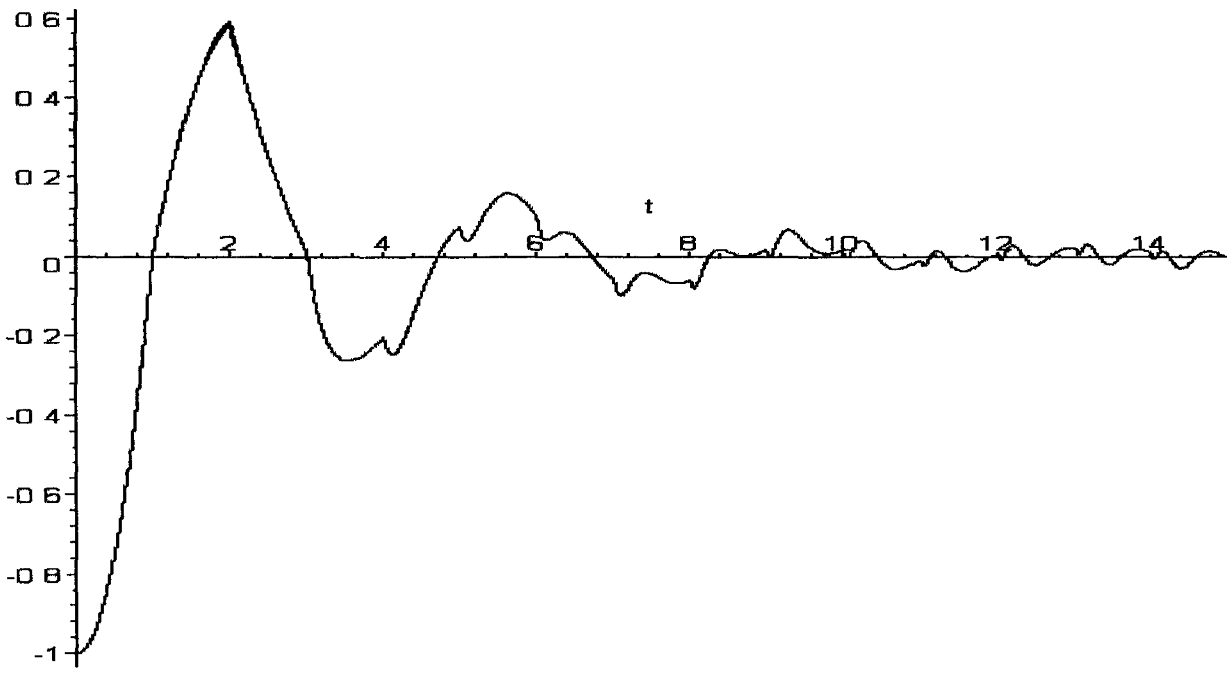

Рис. 3

Пример 2 (и множество других примеров, рассмотренных авторами) показывает,

что:

1) полученные программы позволяют анализировать изменения поведения решения в зависимости от значений параметров, входящих в уравнения и начальные данные;

2) для определения асимптотического поведения решения, как правило, достаточно конечного числа шагов.

Литература

1. Volterra V. Sur la theorie mathematique des phenomenes hereditaires. J. Math. Pures and Appl. – 1828. – Vol. 7.– P 249-298.

2. Вольтера, В. Математическая теория борьбы за существование / В.Вольтера – М. : Наука, 1976. – 286 с.

3. Мари, Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях / Дж. Мари. – М : Мир, 1983. – 397 с.

4. Резван, В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием / В. Резван; пер. с рум. – М.: Наука, 1983. – 359 с.

5. Ройтенберг, Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг. – М. : Наука, 1971. – 595 с.

6. Гноенский, Л.С. Математические основы теории управляемых систем / Л.С. Гноенский, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 512 с.

7. Азбелев, Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. – М : Наука, 1991. –277 с.

8. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К.Л. Кук; пер. с англ. – М. : Мир, 1967. – 548 с.

9. Мышкис, А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. – М. : Наука,1972. – 352 с.

10. Норкин, С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / С.Б. Норкин. – М. : Наука, 1965. – 354 с.

11. Пинни, Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения / Э. Пинни; пер. с англ. – М. : ИЛ, 1961. – 248 с.

12. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

13. Эльсгольц, Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М. : Наука, 1971. – 296 с.

14. Дьяконов, В.П. MAPLE 9 в математике, физике и образовании / В.П. Дьяконов. – М. : Солон, 2004.–688 с.

The Use of MAPLE 8 Mathematical Package for Integration of differential-difference equations

M.A. Amatov, I.A. Klimenko, N.A. Chekanov

Belgorod State University
308007, Belgorod, Studencheskaj Str., 14

The paper deals with software programs for analytical, graphic, and numerical step integration of differential-difference equations. The examples given illustrate a way to investigate changes in behavior of solutions for delayed and neutral types of equations depending on changes in parameters.