

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ  
В ПРИБРЕЖНЫХ НАПОРНЫХ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТАХ**

Э.Н. Береславский\*, Т. В. Соловьева

Академия гражданской авиации  
196210, Санкт-Петербург, ул. Пилотов, 38

В рамках двумерной теории установившейся фильтрации рассматриваются математические модели некоторых течений пресных грунтовых вод в прямоугольном напорном водоносном пласте к морю с соленой водой. Для их изучения формулируются и с применением метода П.Я. Полубариновой-Кочиной решаются смешанные краевые задачи теории аналитических функций. На базе этих моделей разработаны алгоритмы расчета фильтрации в случаях, когда потоки грунтовых вод поступают в море сбоку или снизу. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов приводится детальный анализ структуры и характерных особенностей моделируемых процессов, а также влияния всех физических характеристик моделей на характер фильтрации. Дается сопоставление результатов расчета для обеих схем притока и обсуждаются особенности течений в зависимости от исходного положения контакта жидкостей. На примере схемы бокового притока приводится сопоставление приближенного решения задачи, основанного на использовании гидравлических соображений, с полученным точным решением задачи. Рассматриваются предельные случаи течений.

Общепринято [1-3], что при совместном движении двух жидкостей разной плотности в прибрежных напорных водоносных горизонтах первоначально невозмущенная линия раздела между пресными и солеными водами всегда является горизонтальной, вследствие чего потоки грунтовых вод поступают в море через его горизонтальное дно снизу. Впервые на необходимость и возможность рассмотрения наряду с этим также и вертикального контакта жидкостей было обращено внимание в [4]. В работах авторов [5,6], где были рассмотрены обе указанные схемы, исследованы математические модели фильтрации пресных грунтовых вод в полубесконечном горизонтальном напорном слое. Ниже подобные течения изучаются в случае, когда фильтрация происходит через прямоугольный пласт конечных размеров. По сравнению с [5,6], фильтрационные схемы значительно усложняются из-за появления в области течения дополнительного граничного участка – эквипотенциали, соответствующей левой вертикальной границе пласта. Это приводит к увеличению общего числа неизвестных параметров, возникающих в процессе решения соответствующей краевой задачи: число угловых особых точек достигает пяти, и с вычислительной точки зрения трудности решения задачи вполне аналогичны классическому случаю фильтрации в прямоугольной перемычке, впервые рассмотренному П.Я. Полубариновой-Кочиной [7].

В настоящей работе оба случая (бокового притока и притока снизу) исследуются с использованием метода П.Я. Полубариновой-Кочиной [8], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [9]. Сначала решения задач преобразуются к виду, удобному для вычислений. Затем с помощью преобразованных формул и числовых расчетов анализируется влияние каждого физического параметра моделей на геометрические и фильтрационные характеристики, изучаются особенности течений, что в итоге и дает полную картину явлений. Далее результаты расчетов для обеих схем сопоставляются при одинаковых фильтрационных

\* [Beres@nwgsm.ru](mailto:Beres@nwgsm.ru)



$$\begin{aligned} AB: x = l_1, \varphi = \rho(y - T); \quad BC: y = T, \phi = Q; \quad CD: x = 0, \varphi = -H \\ DE: y = 0, \phi = 0; \quad AE: \phi = 0, \varphi = \rho(y - T) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  – искомые ширина и высота языка соленой воды, вторгшегося в пресноводный пласт. Вторые условия на участках  $CD$  и  $AB$  означают, что левая граница пласта принимается за эквипотенциаль, а вдоль его правой границы происходит высачивание в море.

Отметим еще одно допущение: толщину переходной зоны между пресной и соленой водой будем считать настолько незначительной, что при математическом моделировании ею можно пренебречь и полагать, как это обычно принято в подобных случаях [1,4,7,8,11], что между обеими зонами существует резко выраженная граница раздела  $AE$ . Второе соотношение на ней является следствием предпосылок о непрерывном изменении давления при переходе через линию раздела и об отсутствии движения в зоне соленых вод ([8], с. 331-332).

2. **Построение решения.** Для решения задачи используем метод П.Я. Полубаринской-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Вводится вспомогательная параметрическая переменная  $\zeta$  и функции:  $z(\zeta)$ , конформно отображающая верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на область  $z$  (соответствие точек указано на фиг. 2а), комплексная скорость  $w = \frac{d\omega}{dz}$ , а также

$$Z = \frac{dz}{d\zeta}, \quad F = \frac{d\omega}{d\zeta}. \quad (2.1)$$

Определяя показатели функций  $Z$  и  $F$  около особых точек [8], найдем, что в данном случае они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [8,9]:

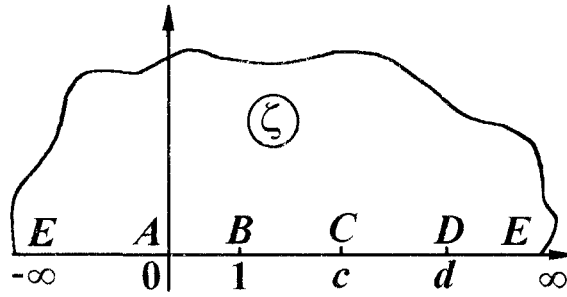
$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & c & d & \infty \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{matrix} \zeta \right\} = \frac{1}{\Delta(\zeta)} P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{matrix} \zeta \right\} = \frac{Y}{\Delta(\zeta)} \quad (2.2)$$

$$\Delta(\zeta) = \sqrt{(1-\zeta)(c-\zeta)(d-\zeta)}$$

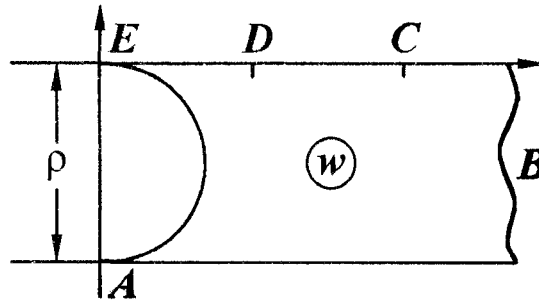
Из соотношения (2.2) видно, что точки  $\zeta = c$  и  $\zeta = d$  – обыкновенные точки для функции  $Y$ . Поэтому соответствующее символу Римана (2.2) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса принимает вид

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + (1-2\zeta)Y' - \frac{1}{4}Y = 0. \quad (2.3)$$

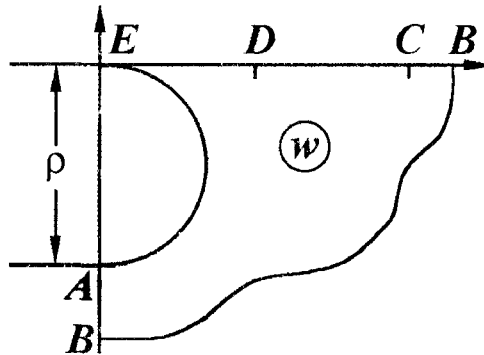
Как известно [8,9], уравнение (2.3) имеет два линейно-независимых интеграла  $Y_1 = K(\zeta)$ ,  $Y_2 = K'(\zeta)$ , образующих фундаментальную систему решений в окрестности точки  $\zeta = 0$ . Здесь  $K(\zeta)$  – полный эллиптический интеграл первого рода, рассматриваемый как функция квадрата модуля  $k^2 = \zeta$ ,  $K'(\zeta) = K(1-\zeta) = K(k'^2)$ ,  $k'^2 = 1-\zeta$ . Отметим, что функция  $K'(\zeta)$  является решением, содержащим логарифмическую особенность в точке  $\zeta = 0$ , вблизи которой асимптотическое представление имеет вид  $K'(\zeta) = -1/2 \ln \zeta$  [12].



а



б



в

Фиг. 2.

Обратимся к области комплексной скорости  $W$ , соответствующей граничным условиям (1.1), которая изображена на фиг. 2,б. Она совпадает с таковой для случая [5], так что функция, совершающая конформное отображение верхней полуплоскости на область комплексной скорости, сохраняет свой вид

$$w = \rho(K(\zeta) - iK'(\zeta))/K'(\zeta). \quad (2.5)$$

Однако на контуре области фильтрации теперь становится на одну угловую точку больше, так что по числу особых точек задача вполне аналогична классическому случаю фильтрации в прямоугольной перемычке [7,8].

Принимая во внимание соотношение (2.2) и учитывая выражение (2.5), найдем

$$Z = iAK'(\zeta)/\Delta(\zeta), \quad F = A\rho(K'(\zeta) + iK(\zeta))/\Delta(\zeta), \quad (2.6)$$

где  $A > 0$  неизвестная масштабная постоянная. Можно проверить, что функции (2.1), определенные на основании соотношений (2.6), удовлетворяют граничным условиям (1.1), сформулированным в терминах упомянутых функций, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Запись представлений (2.6) для различных участков границы области  $\zeta$  с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию контура области движения  $Z$  и тем самым служит контролем вычислений. В результате получаем выражения

$$H = A\rho \int_1^c \frac{K(1/\zeta)}{\Delta_1(\zeta)} d\zeta, L = A \int_1^c \frac{K(\zeta/\zeta-1)}{\Delta_1(\zeta)} d\zeta, \Delta_1 = \sqrt{\zeta(\zeta-1)(c-\zeta)(d-\zeta)}, \quad (2.7)$$

$$T = A \int_c^d \frac{K((\zeta-1)/\zeta)}{\Delta_2(\zeta)} d\zeta, Q = A\rho \int_c^d \frac{K(1/\zeta)}{\Delta_2(\zeta)} d\zeta, \Delta_2 = \sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-c)(d-\zeta)}, \quad (2.8)$$

$$l_0 = A \int_d^\infty \frac{K((\zeta-1)/\zeta)}{\Delta_3(\zeta)} d\zeta, \Delta_3 = \sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-c)(\zeta-d)}, \quad (2.9)$$

и координаты точек линии раздела  $AE$

$$x(\zeta) = l_0 + A \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{K(\zeta/(\zeta-1))}{\sqrt{1-\zeta}\Delta(\zeta)} d\zeta, y(\zeta) = A \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{K(1/(1-\zeta))}{\sqrt{1-\zeta}\Delta(\zeta)} d\zeta, -\infty \leq \zeta \leq 0. \quad (2.10)$$

Полагая в уравнениях (2.10) для координат точек линии раздела  $AE$   $\zeta = 0$ , найдем искомые размеры языка

$$l_1 = x(0) - l_0 = L - l_0, l_2 = y(0). \quad (2.11)$$

Контролем счета являются другие выражения для величин  $l_2$ ,  $Q$  и  $H$ :

$$l_2 = T - A \int_0^1 \frac{K(1-\zeta)}{\Delta(\zeta)} d\zeta, Q = A\rho \int_0^1 \frac{K(\zeta)}{\Delta(\zeta)} d\zeta, H = \rho \left( T + A \int_d^\infty \frac{K(1/\zeta)}{\Delta_3(\zeta)} d\zeta \right). \quad (2.12)$$

**3. Преобразование формул к виду, удобному для вычислений.** Представления (2.7) - (2.12) содержат три неизвестные постоянные  $A$ ,  $c$  и  $d$  ( $1 < c \leq d < \infty$ ).

Для определения параметров отображения служат уравнения (2.7) для  $H$  и  $L$ , постоянная  $A$  при этом предварительно исключается из всех уравнений (2.7)-(2.12) посредством первого из соотношений (2.8), фиксирующего мощность пласта  $T$ .

Основная вычислительная сложность задачи заключается в том, что подынтегральные функции, входящие в (2.7) - (2.12), имеют логарифмические особенности в окрестности точки  $\zeta = 0$  и, кроме того, они бесконечны на пределах интегрирования. Аналогично тому, как это сделано в [6], можно показать, что в точках  $\zeta = c$  и  $\zeta = d$  все интегралы являются сходящимися, а также конечность значений  $l_1$ ,  $l_2$  и  $Q$ .

Для удобства вычислений введем обозначения  $\alpha = 1/c$  и  $\gamma = 1/d$  ( $0 < \gamma \leq \alpha < 1$ ) и, следуя П.Я. Полубариновой-Кочиной [8] (с. 278), заменим  $\zeta$  соответствующими выражениями для различных интервалов, делающими подынтегральные функции в выражениях (2.7) - (2.12) конечными на пределах интегрирования, а именно, положим

$$\zeta = \sin^2 t \text{ при } 0 < \zeta < 1; \zeta = 1 - 1/\tau \quad \tau = \cos^2 t \text{ при } -\infty < \zeta < 0,$$

$$\zeta = 1/\tau \quad \tau = \alpha + (1-\alpha)\sin^2 t \text{ при } 1 < \zeta < c,$$

$$\tau = \gamma + (1-\gamma)\sin^2 t \text{ при } c < \zeta < d; \tau = \gamma \sin^2 t \text{ при } d < \zeta < \infty.$$

В результате приходим к следующим расчетным зависимостям:

$$\begin{aligned}
 H &= C\rho \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha + \alpha_1 \sin^2 t)}{\Delta_1(t)} dt, \quad L = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha_1 \cos^2 t)}{\Delta_1(t)} dt, \quad \Delta_1 = \sqrt{\alpha - \gamma + \alpha_1 \sin^2 t} \\
 T &= C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\gamma_1 - (\alpha - \gamma) \sin^2 t)}{\Delta_2(t)} dt, \quad Q = C\rho \int_0^{\pi/2} \frac{K(\gamma + (\alpha - \gamma) \sin^2 t)}{\Delta_2} dt \\
 &\quad \Delta_2 = \sqrt{\gamma_1 - (\alpha - \gamma) \sin^2 t} \\
 l_0 &= C\sqrt{\gamma} \int_0^{\pi/2} \frac{K(1 - \gamma \sin^2 t) \sin t}{\Delta_3(t)} dt, \quad \Delta_3 = \sqrt{(1 - \gamma \sin^2 t)(\alpha - \gamma \sin^2 t)}
 \end{aligned}$$

$$x(t) = l_0 + I_S(t; \alpha_1, \gamma_1), \quad y(t) = I_C(t; \alpha_1, \gamma_1), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.2)$$

$$l_1 = L - x\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad l_2 = y\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$l_2 = T - I'_C, \quad Q = \rho I'_S,$$

$$H = \rho \left( T + C\sqrt{\gamma} \int_0^{\pi/2} \frac{K(\gamma \sin^2 t) \sin t}{\Delta_3(t)} dt \right).$$

Здесь

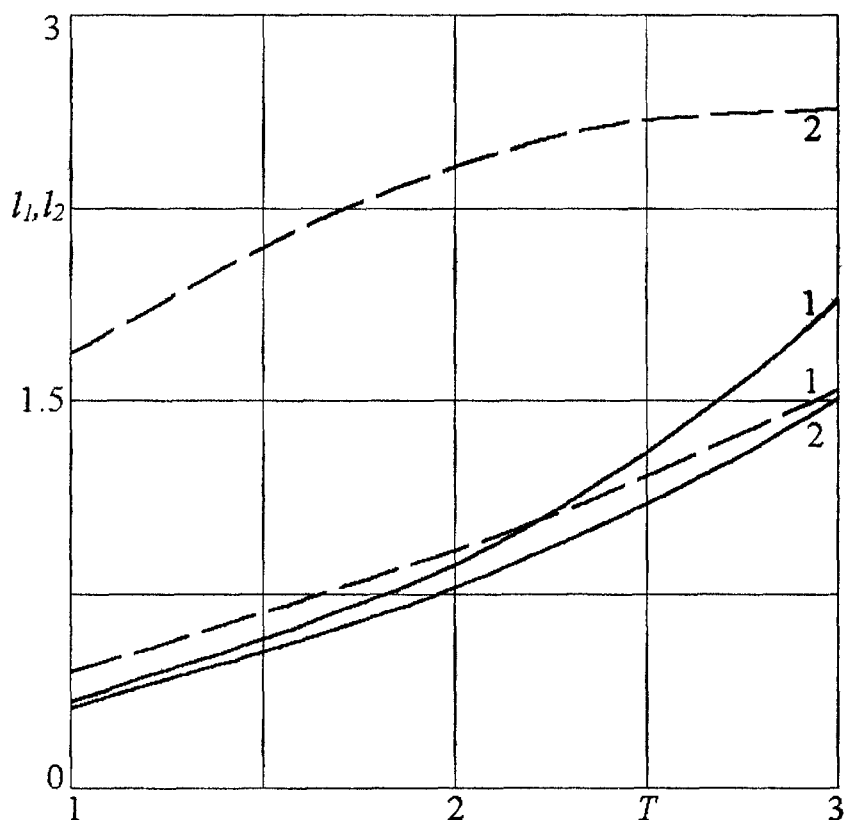
$$C = 2A\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha, \quad \gamma_1 = 1 - \gamma,$$

$$I_S(t; \alpha, \gamma) = C \int_0^t \frac{K(\sin^2 t) \sin t \cos t}{\Delta(t)} dt, \quad I_C(t; \alpha, \gamma) = C \int_0^t \frac{K(\cos^2 t) \sin t \cos t}{\Delta(t)} dt,$$

$$I'_S = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\sin^2 t) \sin t}{\Delta_4(t)} dt, \quad I'_C = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\cos^2 t) \sin t}{\Delta_4(t)} dt,$$

$$\Delta_4 = \sqrt{(1 - \alpha \sin^2 t)(1 - \gamma \sin^2 t)}.$$

4. **Расчет схемы течения и анализ численных результатов.** На фиг. 1 изображена картина течения, рассчитанная при  $T=2.4$ ,  $L=3.0$ ,  $\rho=0.01$  и  $H=0.036$ . Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров  $T$ ,  $L$ ,  $\rho$  и  $H$  приведены в табл. 1 и 2 (верхние строки). В каждом из трех блоков таблиц (они разделены вертикальными линиями) варьируется в три раза (в допустимом диапазоне, с таким расчетом, чтобы выполнялось условие  $H - \rho T > 0$ , которое непосредственно вытекает из физических предпосылок) один из указанных параметров, а значения остальных фиксируются  $T=2.4$ ,  $L=3.0$ ,  $\rho=0.01$  и  $H=0.036$ . На фиг. 3-6 сплошными линиями представлены зависимости  $l_1$  (кривые 1) и  $l_2$  (кривые 2) от  $T$ ,  $L$ ,  $\rho$  и  $H$ .



Фиг. 3.

Анализ данных таблиц и графиков приводит к следующим выводам. Увеличение размеров пласта и плотности соленых вод и уменьшение напора увеличивают размеры языка.

Обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин  $l_1$  и  $l_2$  от параметров  $T$ ,  $L$  и  $\rho$ : увеличение толщины и ширины пласта и плотности соленых вод приводит к росту размеров языка соленой воды. Так, при увеличении мощности  $T$  величины  $l_1$  и  $l_2$  возрастают в 5.7 и 4.9 раза соответственно, подобные изменения прослеживаются и при варьировании ширины  $L$ . При этом, относительные размеры языка могут быть весьма значительными: из табл. 1 следует, что при  $L=6$ ,  $T=2.4$  имеем  $l_2=1.6962$ , а при  $T=3.0$ ,  $L=3.0$  получаем  $l_1=1.9072$ , т.е. высота и ширина языка могут достигать соответственно 70.7 и 63.6% от мощности и ширины пласта.

Напротив, увеличение параметра  $\rho$  и уменьшение напора  $H$  – оба эти фактора, способствуя как бы усилению подпора со стороны соленых вод, – приводят к увеличению размеров языка и расхода (табл. 2).

Весьма существенное влияние на размеры языка оказывает плотность соленых вод: при возрастании параметра  $\rho$  величины  $l_1$  и  $l_2$  возрастают соответственно на 1635 и 1091%.

Однако наиболее значительное влияние на размеры языка  $l_1$  и  $l_2$  оказывает действующий напор. Так, при возрастании параметра  $H$  величины  $l_1$  и  $l_2$  изменяются соответственно в 23.3 и 18.1 раза; расход при этом также претерпевает наибольшие изменения: параметр  $Q$  увеличивается почти на 306.6%.

Для всех блоков таблиц и фиг. 3 - 6 примечательно, что в случае малых значений параметров  $T$ ,  $L$  и  $\rho$  и больших значений  $H$  выполняется приближенное равенство  $l_1 \approx l_2$ . И наоборот, для больших значений  $T$ ,  $L$  и  $\rho$  и малых  $H$  имеем  $l_1 \approx ml_2$ , где  $1.26 \leq m \leq 1.69$ .

Что касается расхода, то  $Q$  увеличивается с ростом параметров  $T$  и  $H$  и с уменьшением  $\rho$  и  $L$ .

**5. Об оценке точности приближенного гидравлического решения.** Поскольку построено точное решение задачи, то можно оценить погрешность приближенного решения, полученного исходя из гидравлических предпосылок [13]. В гидравлической постановке (при осреднении горизонтальных составляющих скорости по вертикали и учете модели предельно анизотропных грунтов [14]) из рассмотрения фрагментов  $B'CDE$  и  $ABB'E$  ([8], с. 392-393; [10], с. 56-57) можно найти выражения [4]

$$l_1 = \frac{\rho LT}{2H - \rho T}, \quad Q = \frac{(2H - \rho T)T}{2L}. \quad (5.1)$$

Заметим, что формулы (5.1) могут быть получены также непосредственно из интегральной формулы [15].

Сравнение формул (5.1) с результатами табл. 1 и 2 показывает, что если относительная погрешность формулы для  $Q$  лежит в пределах 1-4% и доходит до 21.8% лишь при малых значениях  $\rho$ , то расхождения формулы для  $l_1$  с результатами точного решения весьма существенны. Так, при малых значениях  $\rho$ , а также больших значениях напора  $H$  разница между приближенными и точными значениями величины  $l_1$  достигает 169 - 3823%.

**6. Схема притока снизу. Постановка задачи и ее решение.** На фиг. 7 изображена традиционная схема [1-3] потока пресных грунтовых вод в прибрежном напорном водоносном пласте, поступающего в море снизу. Задача сводится к определению комплексного потенциала  $\omega(z)$  при краевых условиях (1.1) с той лишь разницей, что условия для участка  $AB$  заменяются условиями  $y = T$ ,  $\varphi = 0$ .

Искомые функции  $Z$  и  $F$  определяются следующим символом Римана:

$$P \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & c & d & \infty \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 2 & \zeta \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 2 & \end{array} \right\} = \quad (6.1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(c-\zeta)(d-\zeta)}} P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \end{array} \right\} = \frac{Y}{\sqrt{\zeta} \Delta(\zeta)}$$

Соответствующее (6.1) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right)Y' = 0$$

имеет два линейно независимых интеграла

$$Y_1(\zeta) = \arcsin \sqrt{1-\zeta}, \quad Y_2(\zeta) = const.$$

Конформное отображение верхней полуплоскости вспомогательной параметрической переменной  $\zeta$  (фиг. 2, а) на область комплексной скорости (фиг. 2, в) имеет вид

$$w = \frac{i\pi\rho}{2 \arcsin \sqrt{1-\zeta}}. \quad (6.2)$$



Принимая во внимание соотношение (6.1) и учитывая выражение (6.2), найдем

$$Z = -\frac{2A \arcsin \sqrt{1-\zeta}}{\pi \sqrt{\zeta \Delta(\zeta)}}, \quad F = \frac{iA\rho}{\sqrt{\zeta \Delta(\zeta)}}, \quad A > 0. \quad (6.3)$$

Выражения для определяющих параметров модели, соответствующие выражениям (2.7)-(2.9), принимают вид

$$H = \frac{2A\rho K}{\sqrt{(d-1)c}}, \quad Q = \frac{A\rho K'}{\sqrt{(d-1)c}}, \quad k = \sqrt{\frac{(c-1)d}{(d-1)c}}, \quad k' = \sqrt{\frac{d-c}{(d-1)c}}, \quad (6.4)$$

$$T = \frac{2A}{\sqrt{(d-1)c}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{d-1}{d}}, k\right), \quad (6.5)$$

$$l_0 = \frac{2A}{\pi} \int_d^\infty \frac{\ln(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-1})}{\Delta_3(\zeta)} d\zeta, \quad L = \frac{2A}{\pi} \int_1^c \frac{\ln(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-1})}{\Delta_1(\zeta)} d\zeta, \quad (6.6)$$

а координаты точек линии раздела  $AE$  ( $-\infty \leq \zeta \leq 0$ ),

$$x(\zeta) = l_0 + \frac{2A}{\pi} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\ln(\sqrt{-\zeta} + \sqrt{1-\zeta})}{\sqrt{-\zeta \Delta(\zeta)}} d\zeta, \quad (6.7)$$

$$y(\zeta) = \frac{2A}{\sqrt{(d-1)c}} \left[ F\left(\arcsin \sqrt{\frac{d-1}{d}}, k\right) - F\left(\arcsin \sqrt{\frac{-(d-1)\zeta}{(1-\zeta)d}}, k\right) \right]$$

Интегрируя выражение для  $Z$  на участке  $AB$  и полагая в первом из уравнений (6.7)  $\zeta = 0$ , найдем искомые геометрические величины

$$l_1 = x(0) - l_0, \quad l_2 = \frac{2A}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta \Delta(\zeta)}} d\zeta. \quad (6.8)$$

Здесь контролем счета является очевидное равенство  $l_1 = L + l_2 - l_0$ , а также следующие выражения для величин  $T$  и  $H$ :

$$T = \frac{2A}{\pi} \int_c^d \frac{\ln(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-1})}{\Delta_2(\zeta)} d\zeta, \quad H = \rho \left[ T + \frac{2A}{\sqrt{(d-1)c}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}, k\right) \right]. \quad (6.9)$$

Используя выражение (6.5) для величины  $T$ , правую часть последней формулы можно записать в виде

$$\frac{2\rho A}{\sqrt{(d-1)c}} \left[ F\left(\arcsin \sqrt{\frac{d-1}{d}}, k\right) + F\left(\arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}, k\right) \right].$$

Учитывая, что в данном случае амплитуда и модуль эллиптических интегралов связаны известным соотношением ([16], с. 38)

$$\operatorname{ctg} \arcsin \sqrt{\frac{d-1}{d}} \cdot \operatorname{ctg} \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}} = k',$$

выражение в квадратных скобках можно свернуть следующим образом:

$$F\left(\arcsin \sqrt{\frac{d-1}{d}}, k\right) + F\left(\arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}, k\right) = K.$$

В результате правая часть формулы для  $H$  (6.9) принимает вид  $\frac{2\rho AK}{\sqrt{(d-1)c}}$ , что в

свою очередь совпадает с выражением (6.4).

Преобразуя формулы (6.4) – (6.9) аналогично тому, как это сделано в разд. 3, придем к следующим расчетным зависимостям, соответствующим формулам (3.2):

$$\begin{aligned}
H &= \frac{C\rho K}{\sqrt{\gamma_1}}, \quad Q = \frac{C\rho K'}{\sqrt{\gamma_1}}, \quad k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}}, \quad k' = \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{\gamma_1}}, \quad T = \frac{C}{\sqrt{\gamma_1}} F(\arcsin \sqrt{\gamma_1}, k), \\
l_0 &= \frac{2C\sqrt{\gamma}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln\left(\frac{(1 + \sqrt{1 - \gamma \sin^2 t})/\sqrt{\gamma} \sin t}{\Delta_3(t)}\right) \sin t}{\Delta_3(t)} dt, \\
L &= \frac{2C}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln\left(\frac{(1 + \sqrt{\alpha_1} \cos t)/\sqrt{\alpha + \alpha_1 \sin^2 t}}{\Delta_1(t)}\right) dt}{\Delta_1(t)}, \\
x(t) &= l_0 + \frac{2C}{\pi} \int_t^{\pi/2} \frac{\ln\left(\frac{(1 + \sin t)/\cos t}{\Delta(t)}\right) \cos t}{\Delta(t)} dt
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\Delta(t) = \sqrt{(1 - \alpha_1 \sin^2 t)(1 - \gamma_1 \sin^2 t)}$$

$$y(t) = \frac{C}{\sqrt{\gamma_1}} \left[ F(\arcsin \sqrt{\gamma_1}, k) - F(\arcsin(\sqrt{\gamma_1} \sin t), k) \right],$$

$$l_1 = x(0) - l_0, \quad l_2 = \frac{2C}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\Delta_5(t)} dt, \quad \Delta_5 = \sqrt{(1 - \alpha \cos^2 t)(1 - \gamma \cos^2 t)},$$

$$T = \frac{2C}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln\left(\frac{(1 + \sqrt{\gamma_1 - (\alpha - \gamma) \sin^2 t})/\sqrt{\gamma + (\alpha - \gamma) \sin^2 t}}{\Delta_2(t)}\right) dt}{\Delta_2(t)},$$

$$H = \rho \left( T + \frac{C}{\sqrt{\gamma_1}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, k\right) \right)$$

7 Анализ численных расчетов и сопоставление результатов для обеих схем. Представления (6.10) содержат, как и прежде, неизвестные постоянные  $A$ ,  $\gamma$

и  $\alpha$  ( $0 < \gamma \leq \alpha < 1$ ). Для определения модуля эллиптических интегралов  $k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}}$  слу-

жит соотношение  $Q/H$ : из выражений (6.10) получаем

$$\frac{K'}{K} = \frac{Q}{H}. \tag{7.1}$$

Зная связь между параметрами  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$  (посредством модуля  $k$ ) и используя одно из уравнений для  $H$  или  $Q$ , находим искомые параметры  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$ , а значит,  $\alpha$  и  $\gamma$ . Постоянная  $A$  при этом, также как и в разд. 3, определяется из всех уравнений (6.10) посредством уравнения для мощности пласта  $T$ .

Соотношение (7.1) регламентирует задание определяющих физических параметров  $Q$ ,  $H$  и  $T$  и, следовательно, область применимости принятой схемы течения. Поэтому в отличие от схемы бокового притока при численных расчетах здесь вместо ширины пласта  $L$  удобнее задавать именно параметр  $Q$ , который является определяющим при решении уравнения (7.1), а уже затем находить величину  $L$ . При этом диапазон изменения задаваемых параметров  $Q$ ,  $H$  и  $T$  определяется исходя из уравнения (7.1) с учетом значений  $Q_*$ ,  $H_*$  и  $T_*$ , соответствующих предельным значениям модуля  $k_* \approx 0$  и  $k_* \approx 1$ .

На фиг. 7 изображена картина течения, рассчитанная при тех значениях параметров  $T$ ,  $\rho$  и  $H$ , что и фиг. 1, и  $Q=0.055$ . В табл. 1 и 2 (нижние строки) сведены результаты расчетов влияния определяющих физических характеристик  $T$ ,  $\rho$ ,  $H$  и  $Q$  на величины  $l_1$  и  $l_2$ . На фиг. 3, 5, 6, 8 штриховыми линиями представлены зависимости  $l_1$  (кривые 1) и  $l_2$  (кривые 2) от  $T$ ,  $\rho$ ,  $H$  и  $Q$ .

Анализ зависимостей искомых величин от указанных физических параметров сводится к следующему.

Так же, как и в предыдущей задаче, увеличение мощности пласта приводит к увеличению языка. Примечательно, что зависимость ширины  $l_1$  от  $T$  здесь качественно подобна случаю бокового притока (фиг. 3), а зависимости  $l_1$  от  $\rho$  и  $H$  линейны (фиг. 5 и 6). Однако, по сравнению с первой схемой, коренным образом меняется характер зависимости величины  $l_2$  при варьировании параметров  $\rho$  и  $H$ : ее рост обусловлен теперь уменьшением плотности соленых вод и увеличением действующего напора (фиг. 5 и 6), а также расхода, что в свою очередь (табл. 2) связано с уменьшением ширины пласта. Из таблиц можно заметить, что с изменением параметров  $T$ ,  $\rho$ ,  $H$  и  $Q$  вариации величины  $l_2$  колеблются в пределах 41.6-85.5%, а наибольшие изменения при этом она претерпевает при варьировании  $\rho$ , уменьшаясь в 1.85 раз.

Как и прежде, наиболее существенное влияние на величину  $l_1$  оказывает мощность слоя  $T$ . Так, с увеличением  $T$  ширина возрастает на 246%. Из табл. 2 видно, что увеличение напора и уменьшение расхода приводят к существенным изменениям ширины пласта  $L$ : изменения параметров  $H$  и  $Q$  дают увеличение  $L$  на 765 и 848% соответственно.

Расчеты показывают, что для приводимых в табл. 1 и 2 значений параметров  $0.4 \leq l_1^{(2)}/l_1^{(1)} \leq 15$ ,  $1.5 \leq l_2^{(2)}/l_2^{(1)} \leq 50$ , где верхний индекс указывает на вычисления по первой или второй схемам. Последнее означает, что в задаче о притоке снизу величина  $l_2$  превосходит по крайней мере в полтора раза высоту языка в задаче о боковом притоке.

Из графиков, приведенных на фиг. 3-6, 8 и таблиц следует, что для всех расчетных вариантов  $l_1 < l_2$ , иными словами  $L < l_0$ . Последнее показывает, что в плоскости течения абсцисса точки  $B$  (левая граница моря) меньше абсциссы точки  $E$  (отрыва линии раздела от водоупора). Более того, оказывается также, что и  $l_1 < l_0$ . При этом с увеличением параметров  $T$  и  $H$  и уменьшением  $\rho$  и  $Q$  точка  $E$  все более удаляется вправо, причем наибольшее удаление эта точка достигает при вариации напора, увеличиваясь в 3.4 раза.

Отношение  $r = l_1/(l_0 + l_1)$ , которое в определенной степени характеризует кривизну кривой раздела или ее выполаживание, убывает с уменьшением параметров  $T$ ,  $\rho$ ,  $Q$  и возрастанием  $H$ : при малых значениях величины  $r$  линия раздела является более крутой, но с ее увеличением кривая постепенно выполаживается и становится все более вытянутой вправо. Так, из табл. 2 видно, что с увеличением напора параметр  $r$  уменьшается от 0.4198 до 0.1614, т.е. кривая раздела становится круче в 2.6 раза.

**8. Предельные случаи.** При слиянии точек  $C$  и  $D$  в плоскостях  $z$  и  $\zeta$ , что соответствует значениям параметров  $L = \infty$  и  $c = d$ , в обеих схемах имеем течения в полубесконечном напорном водоносном слое. Результаты для этого случая получаются при  $\alpha = \gamma$ . При этом в схеме бокового притока из уравнений (3.2) происходят выражения

$$Q = C\rho \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha)}{\sqrt{\alpha_1}} dt = \frac{A\rho\alpha K(\alpha)}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{A\rho K(1/c)}{\sqrt{c(c-1)}} \quad (8.1)$$

$$T = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha_1)}{\sqrt{\alpha_1}} dt = \frac{A\alpha K(\alpha_1)\pi}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{A\pi K'(1/c)}{\sqrt{c(c-1)}}$$

В схеме притока снизу при  $\alpha = \gamma$  имеем  $k = 1$ ,  $k' = 0$  и из уравнений (6.10) получаем

$$Q = \frac{C\rho K'}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{A\rho\alpha\pi}{\sqrt{\alpha_1}}, T = \frac{C}{\sqrt{\alpha_1}} F(\arcsin \sqrt{\alpha_1}, 1) = \frac{2A\alpha}{\sqrt{\alpha_1}} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha}} \quad (8.2)$$

Здесь использован известный результат ([17], с. 37).

Формулы (8.2) позволяют выразить неизвестные постоянные в явном виде

$$\alpha = ch^{-2} \frac{\pi\rho T}{2Q}, A = \frac{Q}{2\pi} sh \frac{\pi\rho T}{Q} \quad (8.3)$$

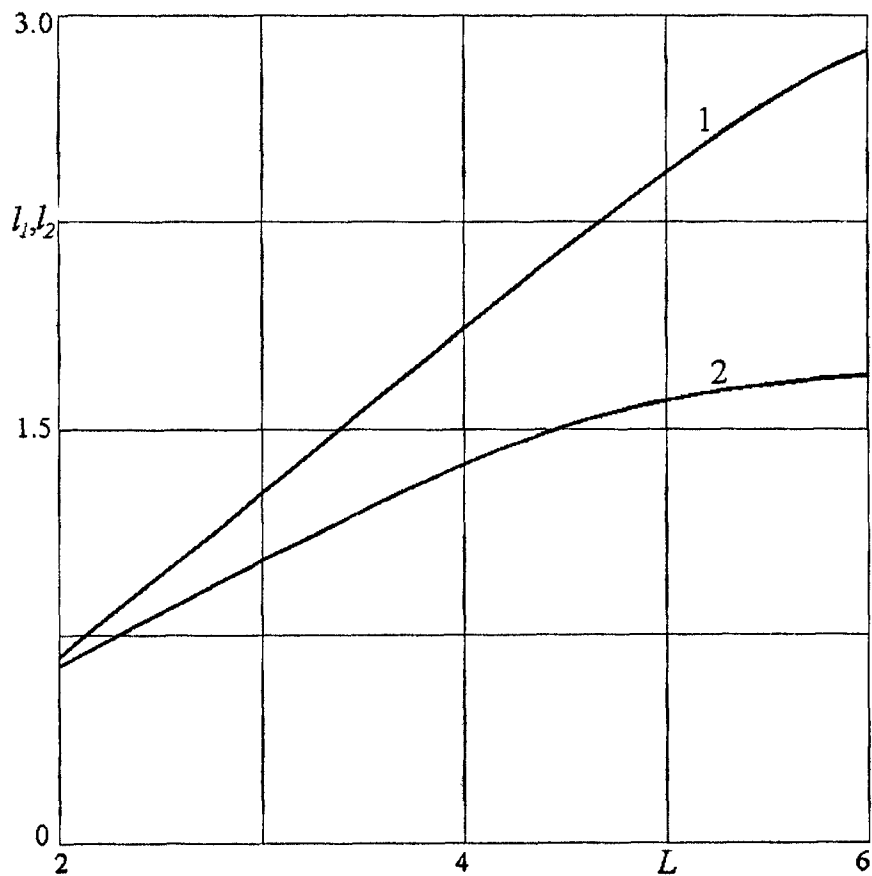
Формулы (8.1) и (8.3) совпадают с формулами (2.8) и (6.6) работы [6] и служат для определения неизвестных параметров по заданным значениям физических характеристик  $T$  и  $Q$ .

Таблица 1

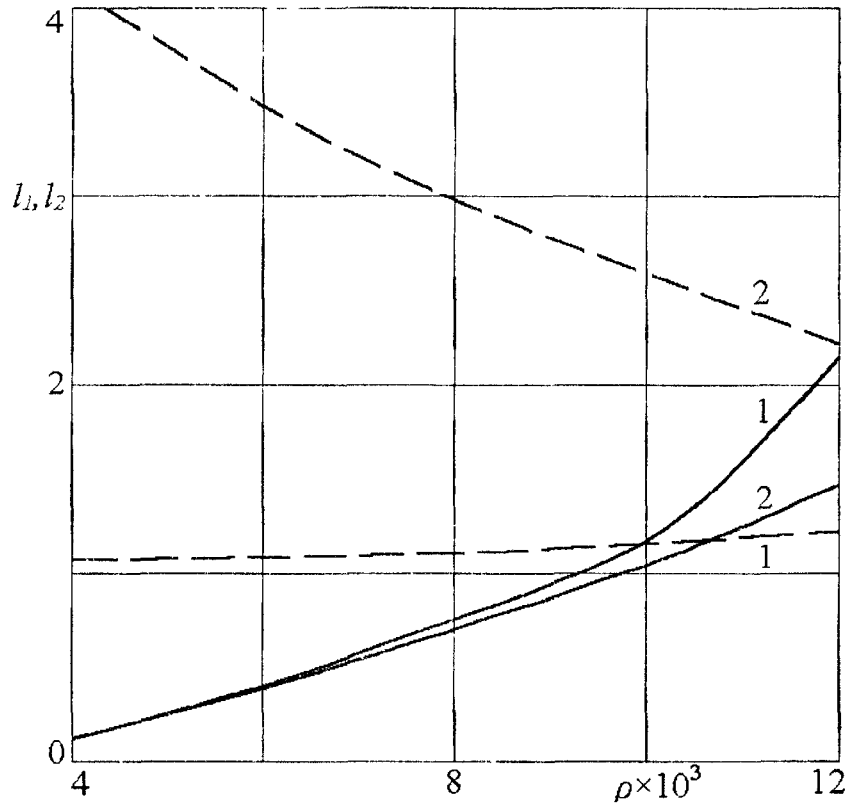
$T \cdot 10$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$	$L$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^4$
			$L \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^3$			$L \cdot 10^4$
10	3333	3108	103	2	6840	6430	276
	4462	16826	2268	24	12152	19595	23861
16	6320	5743	149	3	11985	10354	192
	7278	21905	3548	36	11755	22029	12399
20	8851	7869	173	4	17795	13502	143
	9281	24246	4332	48	11529	24537	7017
24	11985	10354	192	5	23814	15694	112
	11461	25812	5029	60	11436	26491	4087
30	19072	15166	205	6	28781	16962	95
	15438	26465	5783	72	11402	27747	2518

Таблица 2

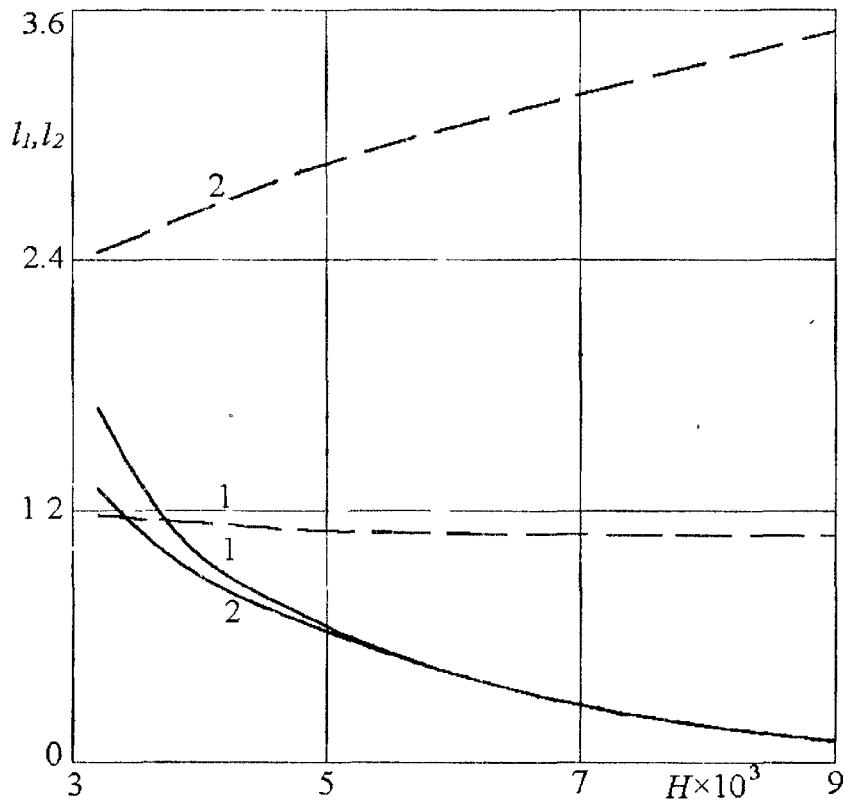
$\rho \cdot 10^3$	$l_1$	$l_2$	$Q \cdot 10^4$	$H \cdot 10^3$	$l_1$	$l_2$	$Q \cdot 10^4$
			$L \cdot 10^4$				$L \cdot 10^4$
4	1237	1234	215	32	16816	12991	151
	10700	41026	5450		11768	24465	3568
6	3925	3852	212	48	6571	6255	276
	10849	34582	5362		11025	28319	9902
8	7550	7084	205	64	3689	3624	365
	11087	29802	5227		10928	30946	16846
10	11985	10354	192	80	1930	1919	467
	11461	25812	5029		10829	33484	23854
12	21462	14697	152	96	721	720	614
	12104	22121	4729		10765	35807	30879



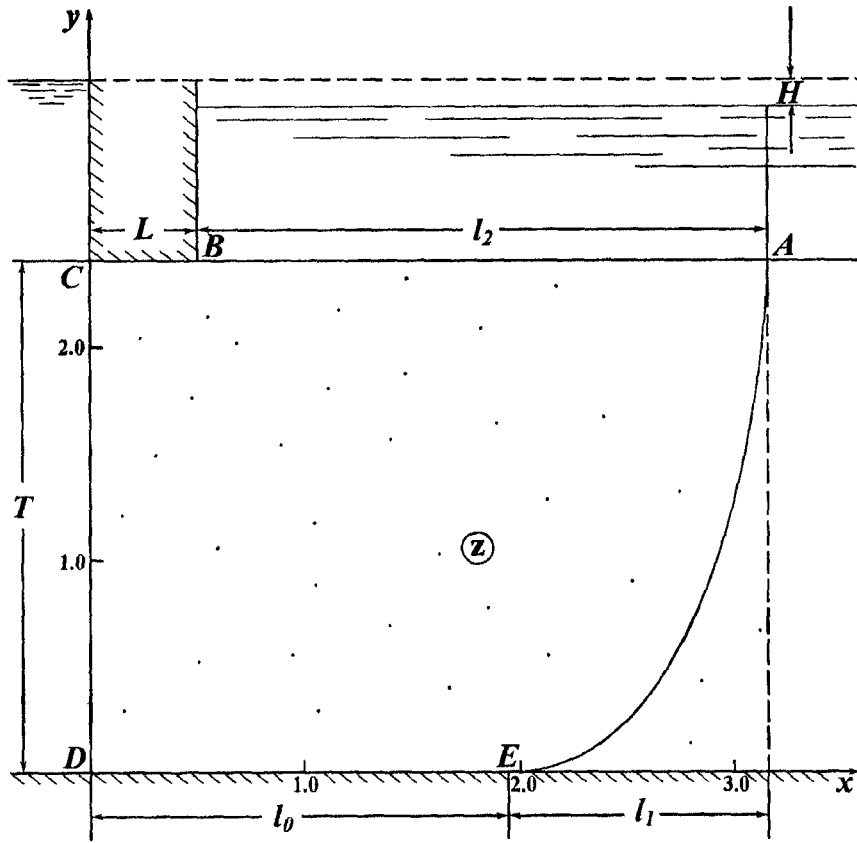
Фиг. 4.



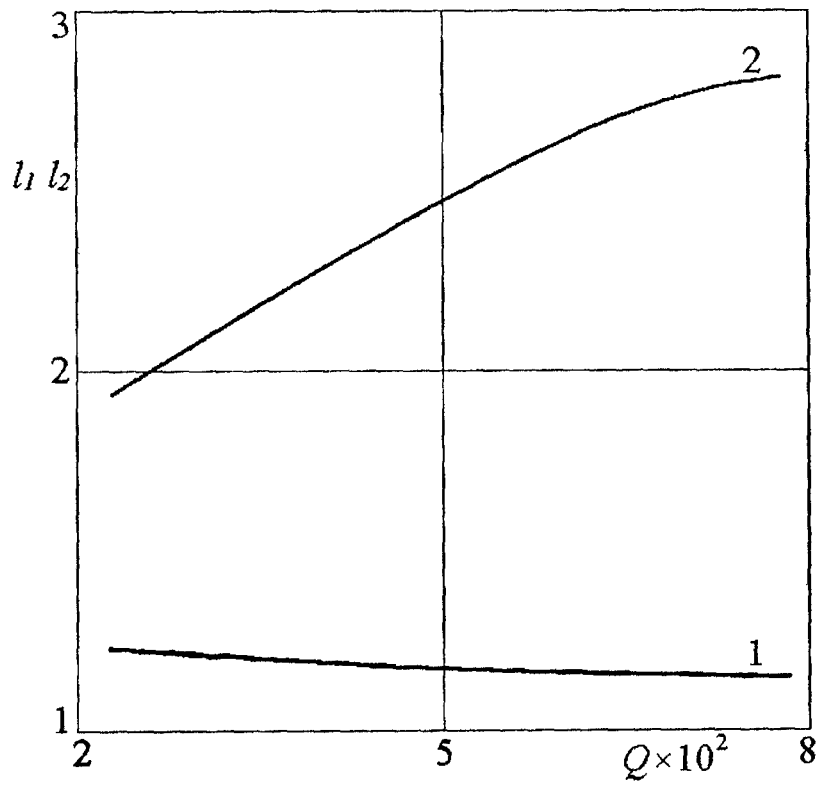
Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

**Список литературы**

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. 452 с.
2. Фролов А.П., Хубларян М.И. Проникновение соленой воды в пресноводные прибрежные горизонты // Водные ресурсы. 1986. № 2. с. 58-63.
3. Хубларян М.И., Фролов А.П. Моделирование процессов интрузии в эстуариях и подземных водоносных горизонтах. – М.: Наука, 1989. 143 с.
4. Михайлов Г.К. Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 6. с. 945-948.
5. Береславский Э.Н., Соловьева Т.В. Некоторые математические модели процессов интрузии в прибрежных водоносных горизонтах // Труды международного конгресса «Фундаментальные проблемы естествознания и техники» / Спб, 2002. Часть 2. – С. 273-285.
6. Береславский Э.Н., Соловьева Т.В. Математическое моделирование интрузии соленых вод в прибрежных напорных водоносных горизонтах // Вестник ХГТУ, 2002. № 2 (15). С. 75-78.
7. Полубаринова-Кочина П.Я. Расчет фильтрации через земляную перемычку // ПММ. 1940. Т. 4. № 1. С. 53-64.
8. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. – М.: Наука, 1977. 664 с.
9. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. М.; Л. Гостехиздат, 1950. 436 с.
10. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Фильтрационные расчеты гидротехнических расчетов. – М.: Л.: Гостехиздат, 1955. 291 с.
11. Полубаринова-Кочина П.Я. О фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 2. с. 101-104.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. 1108 с.
13. Форхгеймер Ф. Гидравлика. – М.: Л.: ОНТИ, 1935. 615 с.
14. Михайлов Г.К. Применение модели предельно анизотропных грунтов для оценки решений некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водопупору // Инж. сб., 1953. Т. 15. с. 159-168.
15. Чарный И.А. Об одном интегральном соотношении и его приложениях к решению некоторых задач безнапорной фильтрации // Докл. АН СССР. 1953. Т. 92. № 2. с. 251-254.
16. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
17. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. 365 с.



**Mathematical modeling of flows at the coastal pressure water layers**

E.N. Bereslavsky, T.V. Solov'eva

Academy of the Civil Aviation  
Pilotov Str., 38, Saint-Peterbourg, 196210, Russia

Mathematical model of filtrational current of fresh subsoil waters in pressure head water bearing a layer to sea (to a foundation ditch, pool, etc.) with salty water are considered. For her studying are formulated and application of a method of P. J. Polubarinovoj-Kochinoj solve the mixed regional problem of theory of analytical functions. On the basis of this model algorithm of calculation intrusion (introductions of salty water in water bearing a layer) in situation when streams of subsoil water unload in the sea at lateral inflow is developed. With the help of the received exact analytical dependences and numerical calculations influence of physical parameters of model on character and a pressings degree is analysed. The hydrodynamical structure is described and prominent features of modelied current are revealed.