НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ. 2004. № 3. Вып. 9.

УДК 51-72:530.145

ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВУМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Н.А. Чеканов* [1)], В.Н. Тарасов[2)], Н.Н. Чеканова[3)]

[1)] Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14
[2)] Академия гражданской защиты Украины, 61023, г. Харьков, ул. Чернышевского, 94
[3)] ННЦ Харьковский физико-технический институт, 61108, г. Харьков, ул. Академическая, 1

Изложена процедура приведения классического гамильтониана к нормальной форме Биркгофа-Густавсона. При помощи правила соответствия Вейля по классической нормальной форме некоторых интегрируемых и неинтегрируемых систем построены их квантовые аналоги и найдены приближенные энергетические спектры и волновые функции. Показано, что полученный таким образом энергетический спектр с хорошей точностью воспроизводит точный спектр в той области энергий, где при классическом рассмотрении этой же системы движение регулярно, а в области, где классическое движение переходит в хаотическое, согласие между обоими спектрами резко ухудшается. Установлено, что причиной неприменимости полуклассического приближения служит явление множественных пересечений энергетических уровней одинаковой симметрии, которые случаются не в изолированных точках, а вдоль линий в пространстве параметров гамильтониана. Показано, что метод квантования с помощью нормальной формы применим не только к полиномиальным гамильтонианам, но и к более сложным, например, содержащим сингулярность в начале координат.

ВВЕДЕНИЕ.

К настоящему времени установлено существование детерминированного хаоса в различных классических динамических системах [1,2]. Большое количество работ, посвященных установлению и исследованию этого явления выполнено специалистами по квантовой химии [3,4]. Известно, что детерминированный или классический хаос возможен в консервативных гамильтоновых системах даже с двумя степенями свободы [5], а также и в одномерных гамильтоновых системах, но зависящих от времени [6].

В данной работе рассмотрены консервативные гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, хотя используемый метод исследования применим для систем с произвольным числом степеней свободы.

Исследование хаоса в классических системах представляет самостоятельный интерес, однако, более интригующим является изучение его квантовых проявлений, то есть поиск каких-либо особенностей, которые возникают, если проводить квантово-механическое описание динамических систем, допускающих хаотическое поведение в классическом пределе. Таким образом, в последние годы возникла проблема квантового хаоса, которая в полной мере не решена до настоящего времени [7].

Для исследования квантовых проявлений классического хаоса целесообразно одновременное и последовательное изучение заданной динамической системы как с классической, так и с квантовой точек зрения. При этом возродился интерес к фундаментальным проблемам старой квантовой теории [8], центральной из которых является проблема квантования классического движения системы для получения ее квантовых характеристик, таких как энергетический спектр и волновые функции. Известные условия квантования Бора-Зоммерфельда получили дальнейшее развитие [9-12] и успешно используются для вычислений энергетических спектров, исходя из решений уравнений классического движения [13,14]. Для расчетов спектров многомерных систем очень перспективен метод, предложенный в работе [15], на основе адиабатического принципа.

---

* chekanov@bsu.edu.ru, malaj@bsu.edu.ru

Однако имеются другие подходы к вычислению квантовых характеристик, которые не требуют непосредственно классических траекторий, как правило, получаемых численным путем. В настоящей работе используется метод нормальных форм для определения энергетического спектра и волновых функций динамической системы, для которой известен классический гамильтониан. Существо метода нормальных форм заключается в предварительном каноническом преобразовании исходного классического гамильтониана с целью приведения его к более простому виду, который будем называть нормальной формой. Простота заключается в том, что классические уравнения движения в новых канонически сопряженных переменных решаются тривиальным образом. Основная сложность состоит в трудоемкости нахождения нужных канонических преобразований, которые выполняются на персональных компьютерах при помощи известных программных систем аналитических вычислений, например, REDUCE [16]. В нашей работе необходимые вычисления проведены с помощью пакета программ GITA [17].

Идея нормализации гамильтоновых систем восходит к А. Пуанкаре [18], которую развил и широко использовал Дж. Биркгоф [19], а затем Ф. Густавсон [20], доказавший важную теорему в 1966 г. В наших исследованиях мы следуем их процедуре нормализации гамильтоновых систем, поэтому нормальную форму будем называть нормальной формой Биркгофа-Густавсона. Как показано в работах [19,20], классическая нормальная форма может быть использована для решения и анализа классических уравнений движения.

Однако в настоящей работе нормальная форма Биркгофа Густавсона используется для получения ее квантового аналога, а затем для нахождения энергетического спектра и волновых функций для нескольких гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Впервые метод нормальной формы для квантования классической системы был предложен и применен к гамильтоновой системе Хенона-Хейлеса в 1979 [21] и получил дальнейшее развитие в работах [22-27].

Ниже в разделе 1 кратко изложена процедура приведения классического гамильтониана к нормальной форме Биркгофа-Густавсона и построен его квантовый аналог. Для простоты изложения рассмотрены системы из двух нелинейно связанных осцилляторов с равными частотами.

В разделах 2 и 3 рассмотрены неинтегрируемая и интегрируемая полиномиальные гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, для которых получены классические нормальные формы Биркгофа Густавсона и их квантовые аналоги. Для квантовых нормальных форм решены соответствующие уравнения Шредингера и найдены энергетические спектры и волновые функции в приближении, которое будем называть полуклассическим. Проведено также сравнение полученных полуклассических уровней энергий с точными квантово-механическими значениями, которые были определены путем численного решения методом диагонализации исходного гамильтониана.

В разделе 4 показано, что полуклассическое приближение на основе метода нормальных форм можно применять не только к полиномиальным гамильтонианам, но и к более сложным, например, содержащим сингулярность в начале координат, каким является двумерный атом водорода в постоянном магнитном поле. Для такой системы выполнено преобразование Леви-Чивита [28], приводящее ее гамильтониан к гамильтониану двух нелинейно связанных осцилляторов, для которого получены нормальная форма Биркгофа-Густавсона и ее квантовый аналог. Для квантового аналога решена задача на собственные значения и по найденному решению получено аналитическое уравнение, определяющее энергетический спектр атома водорода в постоянном магнитном поле.

КЛАССИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И ЕЕ КВАНТОВЫЙ АНАЛОГ.

Пусть динамическая система имеет две степени свободы и описывается классическим гамильтонианом в следующем полиномиальном виде

$$H(q_1, q_2, p_1, q_2) = H^{(2)}(q, p) + \sum_{i>2} H^{(i)}(q, p), \tag{1a}$$

$$H^{(2)}(q,p) = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2), \tag{1b}$$

$$H^{(i)}(q,p) = h_{l_1 l_2 m_1 m_2} q_1^{l_1} q_2^{l_2} p_1^{m_1} p_2^{m_2}, \; i = l_1 + l_2 + m_1 + m_2, \tag{1c}$$

где величины $q = (q_1,q_2)$, $p = (p_1,p_2)$ обозначают канонически сопряженные двумерные координаты и импульсы, $h_{l_1 l_2 m_1 m_2}$ – числовые коэффициенты, а верхний индекс в круглых скобках – степень однородности полинома. Частоты ω_1 и ω_2 всюду ниже будем считать одинаковыми и равными единице, так как рассматриваемые нами гамильтонианы обладают этим свойством. В таких случаях оказывается удобным сперва выполнить предварительное каноническое преобразование $(q,p) \rightarrow (Q,P)$ [26]

$$q_1 = \frac{i}{2}(-Q_1 + Q_2 + P_1 - P_2),$$
$$q_2 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2),$$
$$p_1 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 + P_1 - P_2),$$
$$p_2 = \frac{i}{2}(Q_1 + Q_2 - P_1 - P_2) \tag{2}$$

и переписать классический гамильтониан (1) в новых канонически сопряженных переменных $Q=(Q_1,Q_2)$, $P = (P_1,P_2)$ в виде

$$K(Q,P)=cH(q(Q,P), p(Q,P)) = K^{(2)} + \sum_{s>2} K^{(s)}(Q,P), \tag{3a}$$

$$K^{(2)} = c(Q_1P_1 + Q_2P_2), \tag{3b}$$

где постоянная $c = i$ есть валентность [29] канонического преобразования (2) Преобразование, обратное (2), запишем следующим образом:

$$Q_{1,2} = \frac{1}{2}(q_2 - ip_2) \pm \frac{i}{2}(q_1 - ip_1),$$
$$P_{1,2} = \frac{1}{2}(q_2 + ip_2) \mp \frac{i}{2}(q_1 + ip_1). \tag{4}$$

Очевидно, что введение четырех комплексных величин (Q_1,Q_2,P_1,P_2) не увеличивает числа независимых переменных по сравнению с начальными вещественными переменными (q_1,q_2,p_1,p_2), потому что имеют место равенства $Q_1^* = P_1$, $Q_1^* = P_2$, где символ * обозначает операцию комплексного сопряжения.

Как доказано в работе [20], классический гамильтониан (3) подходящим каноническим преобразованием $(Q,P) \rightarrow (\xi, \eta)$ может быть приведен к нормальной форме Биркгофа-Густавсона в виде степенного ряда

$$G(\xi, \eta) = \sum_{s\geq 2} G^{(s)}(\xi, \eta). \tag{5}$$

Теперь дадим определение нормальной формы: гамильтониан G(ξ, η) имеет нормальную форму Биркгофа-Густавсона, если выполняется условие

$$\hat{D}G(\xi,\eta)=0, \tag{6}$$

где введен оператор нормальной формы

$$\hat{D}\cdot=-\{K^{(2)},\cdot\}, \tag{7}$$

а символ $\{\cdot,\cdot\}$ означает скобки Пуассона[30].

Для каждого однородного полинома $K^{(s)}$ степени s=2,3... в исходном гамильтониане (3) существует однородный полином $W^{(s)}$, который генерирует каноническое преобразование

$$\xi=Q+\frac{\partial W^{(s)}(Q,\eta)}{\partial\eta},\ P=\eta+\frac{\partial W^{(s)}(Q,\eta)}{\partial Q} \tag{8}$$

такое, что новый гамильтониан G(ξ, η) будет в нормальной форме до степени s включительно. В частности, гамильтониан $K^{(2)}$ из уравнения (3b) уже в нормальной форме, а значит, $W^{(2)}=0$.

Для нахождения нормальной формы $G^{(s)}$ и производящего полинома $W^{(s)}$ степени $s\geq 3$ необходимо решить следующее дифференциальное уравнение:

$$\hat{D}(Q,\eta)W^{(s)}(Q,\eta)=-K^{(s)}(Q,\eta)+G^{(s)}(Q,\eta), \tag{9}$$

где $\hat{D}$ есть оператор нормальной формы (7).

Представим неизвестные однородные полиномы $G^{(s)}$, $W^{(s)}$ и заданный член гамильтониана $K^{(s)}$ степени $s=l_1+l_2+m_1+m_2$ в следующем виде:

$$G^{(s)}=\sum q^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2}Q_1^{l_1}Q_2^{l_2}\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2},\quad W^{(s)}=\sum w^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2}Q_1^{l_1}Q_2^{l_2}\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2},$$
$$K^{(s)}=\sum b^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2}Q_1^{l_1}Q_2^{l_2}\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}. \tag{10}$$

Так как мономы $Q_1^{l_1}Q_2^{l_2}\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}$ – собственные функции оператора нормальной формы (7), то дифференциальное уравнение сводится к алгебраическому, из которого определяются неизвестные коэффициенты $q^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2}$ и $w^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2}$ по формулам

$$q^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2}=b^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2},\ \text{если } l_1+l_2=m_1+m_2,$$
$$w^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2}=\frac{b^{(s)}_{l_1l_2m_1m_2}}{c(m_1+m_2-l_1-l_2)},\ \text{если } l_1+l_2\neq m_1+m_2. \tag{11}$$

Таким образом, шаг за шагом s=3,4,... можно получить производящий полином $W(Q,\eta)=W^{(3)}+W^{(4)}+\ldots$, который генерирует каноническое преобразование, приводящее исходный гамильтониан (3) к нормальной форме Биркгофа-Густавсона G в виде степенного ряда

$$G(\xi,\eta)=G^{(2)}(\xi,\eta)+G^{(3)}(\xi,\eta)+\ldots \tag{12}$$

Квантовый аналог нормальной формы (12) будем строить следующим образом. Канонически сопряженным переменным $\xi_\nu,\eta_\nu,(\nu=1,2)$ сопоставим квантовомеханические операторы $\hat{\xi}_\nu,\hat{\eta}_\nu$, равные правым частям уравнений (4), в которых переменные q_ν,p_ν заменены на соответствующие операторы $q_\nu\to\hat{q}_\nu=q_\nu, p_\nu\to\hat{p}_\nu=-i\dfrac{\partial}{\partial q_\nu}$ с обычным правилом коммутации, а скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ заменяется на коммутатор $[\cdot,\cdot]/i\hbar c$ [31]. (В дальнейшем считаем постоянную ħ=1).

Входящие в нормальную форму (12) мономы $\xi_\nu^n \eta_\nu^m, (\nu = 1,2)$ выражаются через операторы $\hat{\xi}_\nu, \hat{\eta}_\nu$ согласно правилу соответствия Вейля [32] следующим образом:

$$\xi_\nu^m \eta_\nu^m \to \frac{1}{2^m} \sum_{l=0} \frac{m!}{l!(m-l)!} \prod_{j=1} (\hat{\eta}_\nu^+ \hat{\eta}_\nu - m + l + j), \tag{13}$$

После выполнения указанных выше действий получаем квантовую нормальную форму Биркгофа-Густавсона $\hat{G}(\hat{\xi}_\nu, \hat{\eta}_\nu)$ или $\hat{G}(\hat{\eta}_\nu^+, \hat{\eta}_\nu)$, так как $\hat{\xi}_\nu = \hat{\eta}_\nu^+, (\nu = 1,2)$.

В частности, квантовый аналог для осцилляторной части исходного классического гамильтониана (3b) имеет вид

$$\hat{G}^{(2)} = \hat{\eta}_1^+ \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2^+ \hat{\eta}_2 + 1. \tag{14}$$

Отметим сразу, что собственные векторы гамильтониана (14) можно записать в виде [26]

$$|N,L\rangle = \left[\left(\frac{N-L}{2} \right)! \left(\frac{N+L}{2} \right)! \right]^{-1/2} (\hat{\eta}_2^+)^{(N-L)/2} (\hat{\eta}_1^+)^{(N+L)/2} |00\rangle, \tag{15a}$$

где вакуумное состояние |00> определяется как

$$\hat{\eta}_1 |00\rangle = \hat{\eta}_2 |00\rangle = 0, \tag{15b}$$

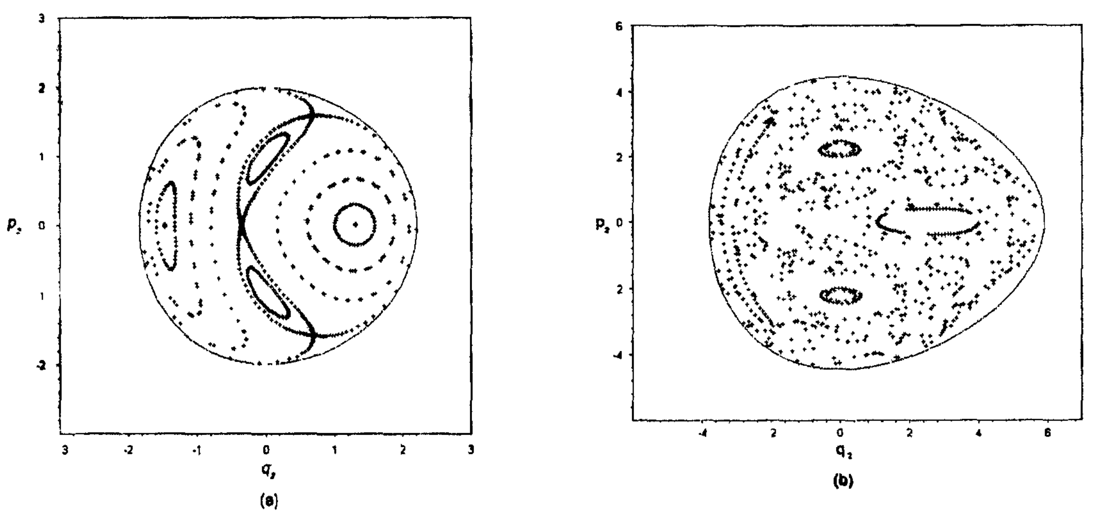
а главное квантовое число N может быть равно любому положительному целому числу N=0,1,2,3,..., и для заданного значения N орбитальное квантовое число L принимает следующий ряд значений: L= ± N, ±(N-2),..., 1 или 0. Соответствующие собственные значения равны (N+1).

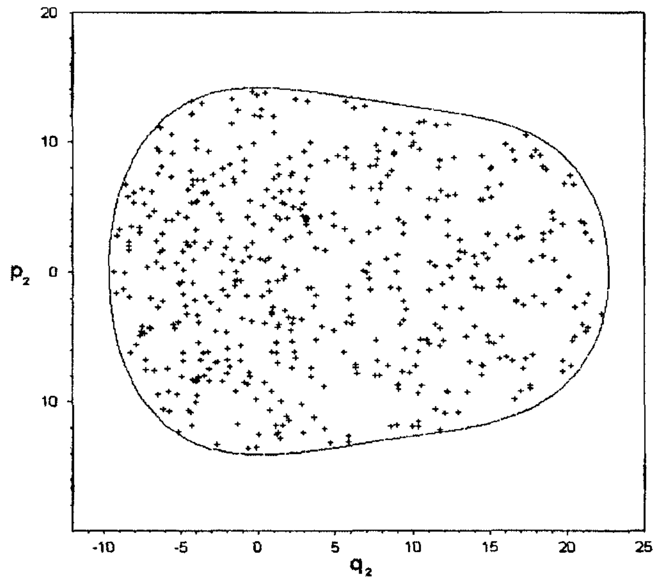
НЕИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ.

Рассмотрим динамическую систему с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + b(q_1^2 q_2 - \frac{1}{2} q_2^3) + c(q_1^2 + q_2^2)^2, \tag{16}$$

который используется в теории атомного ядра [33] и молекулярной химии [25,34]. Известно [35], что в такой системе возможно хаотическое классическое движение. Это иллюстрируется сечениями Пуанкаре, т.е. множеством точек на плоскости p_2, q_2, полученных в результате пересечения фазовой кривой для данной полной энергии E с плоскостью $q_1=0$, при трех значениях полной энергии: $E=0.2E_{cr}$; $0.8\ E_{cr}$ и $1.2\ E_{cr}$ (см. рис. 1).





(c)

Рис. 1. Сечения Пуанкаре для гамильтониана (16)
при различных значениях энергии системы: $E=0.2E_{cr}$ (a); $0.8E_{cr}$ (b); $1.2E_{cr}$ (c).

Здесь теоретическая критическая энергия E_{cr} перехода к хаотическому движению вычислена по критерию отрицательной гауссовой кривизны [36]. Как видно из рис. 1(c), уже при энергии немного ниже критической практически все фазовое пространство занято хаотическими траекториями, что свидетельствует об неинтегрируемости системы (16).

Классическая нормальная форма Биркгофа-Густавсона для гамильтониана (16) до членов степени $s_{max} = 6$ равна

$$G_6 = G^{(2)} + G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} + G^6,$$

$$G^{(2)} = i(\eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2), \quad G^{(3)} = 0,$$

$$G^{(4)} = i\left(\frac{b^2}{6} + c\right)(\eta_1^2\xi_1^2 + \eta_2^2\xi_2^2) + i(-2b^2 + 4c)\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2, \quad G^{(5)} = 0,$$

$$G^{(6)} = i\left(\frac{11}{54}b^4 + \frac{10}{9}b^2c + 2c^2\right)(\eta_1^3\xi_1^3 + \eta_2^3\xi_2^3) + i\left(\frac{5}{12}b^4 - \frac{61}{3}b^2c + 15c^2\right)\cdot$$

$$\cdot\eta_1\eta_2\xi_1\xi_2(\eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2) + +i\frac{2b^2}{9}(7b^2 - 26c)(\eta_2^3\xi_1^3 + \eta_1^3\xi_2^3), \qquad (17)$$

а соответствующий ей квантовый аналог $\hat{G}_6$, полученный согласно изложенной выше процедуре, запишем в виде

$$\hat{G}_6 = G^{(2)} + G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} + G^{(6)},$$

$$\hat{G}^{(2)} = (\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2 + 1),$$

$$\hat{G}^{(4)} = \frac{b^2}{6}(\hat{\eta}_1^{+2}\hat{\eta}_1^2 + \hat{\eta}_2^{+2}\hat{\eta}_2^2 - 5\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1 - 5\hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2 - 12\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1\hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2 - 2)$$

$$+ c(\hat{\eta}_1^{+2}\hat{\eta}_1^2 + \hat{\eta}_2^{+2}\hat{\eta}_2^2 + 3\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1 + 3\hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2 + 4\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1\hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2 + 2),$$

$$\hat{G}^{(6)} = \left(\frac{11}{54}b^4 + \frac{10}{9}b^2c + 2c^2\right)(\hat{\eta}_1^{+3}\hat{\eta}_1^3 + \hat{\eta}_2^{+3}\hat{\eta}_2^3) +$$

$$+\left(\frac{5}{12}b^4-\frac{61}{3}b^2c+15c^2\right)\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1\hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2(\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1+\hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2)$$

$$+\left(\frac{37}{72}b^4-\frac{51}{6}b^2c+\frac{21}{2}c^2\right)(\hat{\eta}_1^{+2}\hat{\eta}_1^2+\hat{\eta}_2^{+2}\hat{\eta}_2^2)+2\left(\frac{5}{12}b^4-\frac{61}{3}b^2c+15c^2\right)\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1\hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2+$$

$$+\left(\frac{311}{432}b^4-\frac{469}{36}b^2c+\frac{61}{4}c^2\right)(\hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1+\hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2)+\left(\frac{14}{9}b^4-\frac{54}{9}b^2c\right)(\hat{\eta}_1^{+3}\hat{\eta}_2^3+\hat{\eta}_2^{+3}\hat{\eta}_1^3). \quad (18)$$

Так как введенные ранее векторы (15) являются собственными для членов $\hat{G}^{(2)}$ и $\hat{G}^4$ (но не для членов $\hat{G}^{(6)}$ и выше) квантовой нормальной формы, то для энергетического спектра гамильтониана (3) можно получить простую приближенную аналитическую формулу

$$E(N,L)=N+1+\frac{b^2}{12}(7L^2-5N^2-10N-4)+\frac{c}{2}(3N^2+6N-L^2+4). \quad (19)$$

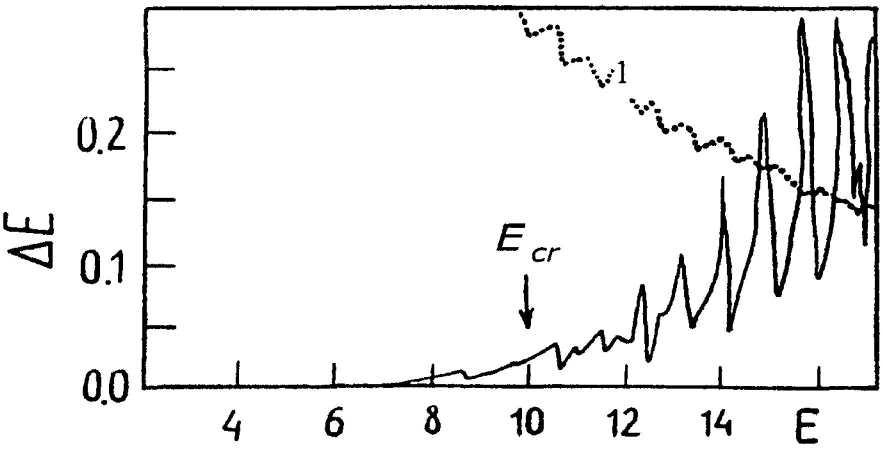


Рис. 2. Разность $\Delta E = E_{QM} - E_{SC}$ между квантово-механическими уровнями энергии E_{QM} и полуклассическими E_{SC}, вычисленными по формуле (19) для гамильтониана (16) (b=0.12347, c=0.00135). Критическая энергия перехода от регулярного движения к хаотическому E_{cr} = 10. Линия, помеченная цифрой 1, изображает среднее расстояние между соседними энергетическими уровнями.

На рис. 2 представлена разность $\Delta E = E_{QM} - E_{SC}$ между точными квантово-механическими значениями энергии E_{QM} и вычисленными E_{cr} по формуле (19). Как видно из рис. 2, полуклассическая формула (19) в области энергий, где классическое движение регулярно, достаточно точно воспроизводит квантово-механический спектр. Разность энергий ΔE составляет малую часть среднего расстояния между соседними квантованными энергетическими уровнями. При переходе через критическую энергию E_{cr} перехода к хаосу в классическом пределе эта разность резко возрастает.

На рис. 3 показано изменение энергетических уровней Е-типа гамильтониана (16) в зависимости от параметра b при фиксированном значении другого параметра c. На рис. 3(b) проиллюстрировано наличие множества точек пересечения энергетических уровней, сконцентрированных вдоль линии 1, которая в классическом пределе соответствует критической энергии E_{cr} (b,c) перехода к хаосу. Здесь под пересечением понимается сближение уровней до расстояний порядка точности численных расчетов 10^{-7}. Как видно из сравнения рис. 3(a) и (b), полуклассическая формула с хорошей точностью предсказывает квантовый спектр вплоть до возникновения множества точек пересечений энергетических термов. Численными расчетами обнаружено, что любая пара сближающихся термов пересекается не в изолированной точке, а вдоль линий в пространстве параметров гамильтониана (16). Однако вопрос о природе обсуждаемых пересечений – то ли это не состоявшиеся или, как говорят, избегнутые пересечения, то ли же точное совпадение двух термов – остается пока открытым.

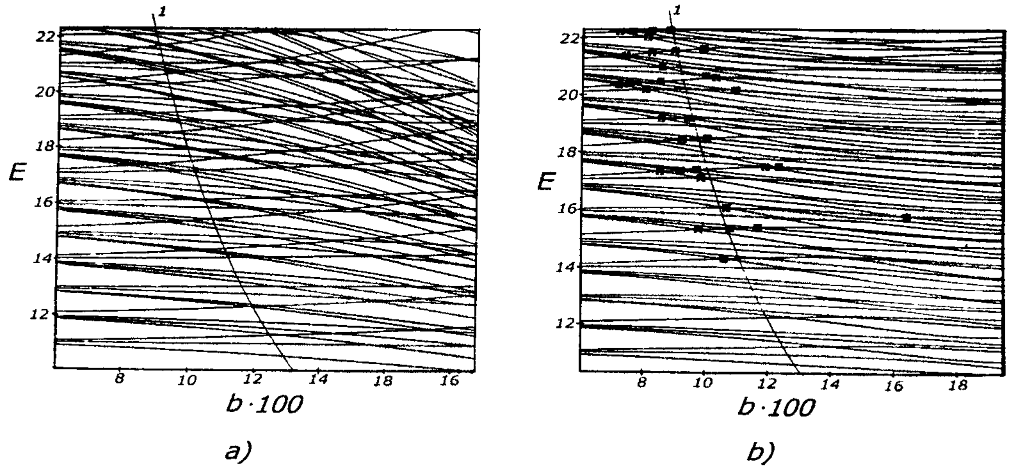


Рис. 3. Энергетические спектры гамильтониана (16) в зависимости от значения параметра b: a) – полуклассический спектр, вычисленный по формуле (19); b) – квантовомеханический спектр (при тех же значениях параметров b и c как в случае a). Сплошная линия, помеченная цифрой 1, изображает зависимость критической энергии E_{cr} от параметра b; квадратики отмечают пересечения энергетических уровней.

Полученные численные результаты позволяют сделать предположение, что одно из проявлений существования хаотических режимов движения в классически неинтегрируемых системах проявляется во множественных пересечениях энергетических уровней одинаковой симметрии в области перехода от регулярного движения к хаотическому. Эти пересечения, скорее всего, определяют границу применимости полуклассических методов квантования неинтегрируемых классических систем.

ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ.

Если в гамильтониане (16) положить параметр b=0, то получим

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + c(q_1^2 + q_2^2)^2, \tag{20}$$

который описывает интегрируемую классическую систему [1]. Классическая нормальная форма Биркгофа-Густавсона для гамильтониана (20) до членов степени S_{max} =12 имеет вид

$$G_{12} = G^{(1)} + G^{(2)} + G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} + G^{(6)} + G^{(7)} + G^{(8)} + G^{(9)} + G^{(10)} + G^{(11)} + G^{(12)},$$

$$G^{(2)} = i(\eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2),$$

$$G^{(3)} = 0,$$

$$G^{(4)} = i(\eta_1^2\xi_1^2 + 4\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2 + \eta_2^2\xi_2^2),$$

$$G^{(5)} = 0,$$

$$G^{(6)} = -ic^2(2\eta_1^3\xi_1^3 + 15\eta_1\eta_2\xi_1\xi_2(\eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2) + 2\eta_2^3\xi_2^3),$$

$$G^{(7)} = 0,$$

$$G^{(8)} = ic^3(8\eta_1^4\xi_1^4 + 177\eta_1^2\xi_1^2\eta_2^2\xi_2^2 + 91\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2(\eta_1^2\xi_1^2 + \eta_2^2\xi_2^2) + 8\eta_2^4\xi_2^4),$$

$$G^{(9)} = 0,$$

$$G^{(10)} = -\frac{ic^4}{4}(168\eta_1^5\xi_1^5 + 2613\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2(\eta_1^3\xi_1^3 + \eta_2^3\xi_2^3) + 7988\eta_1^2\xi_1^2\eta_2^2\xi_2^2(\eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2) + 168\eta_2^5\xi_2^5),$$

$$G^{(11)} = 0,$$

$$G^{(12)} = \frac{ic^5}{4}[1024\eta_1^6\xi_1^6 + 20469\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2(\eta_1^4\xi_1^4 + \eta_2^4\xi_2^4) + 86295\eta_1^2\xi_1^2\eta_2^2\xi_2^2(\eta_1^2\xi_1^2 + \eta_2^2\xi_2^2) +$$
$$+ 134620\eta_1^3\xi_1^3\eta_2^3\xi_2^3 + 1024\eta_2^6\xi_2^6]. \tag{20}$$

Соответствующую квантовую нормальную форму Биркгофа-Густавсона представим как

$$\hat{G}_{12} = \hat{G}^{(2)} + \hat{G}^{(4)} + \hat{G}^{(6)} + \hat{G}^{(8)} + \hat{G}^{(10)} + \hat{G}^{(12)},$$

$$\hat{G}^{(2)} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2,$$

$$\hat{G}^{(4)} = c[\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + 4\hat{A}_1\hat{A}_2 + 3(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + 2],$$

$$\hat{G}^{(6)} = -c^2\left[2\hat{A}_1^3 + 2\hat{A}_2^3 + 15\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + 21(\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2) + 30\hat{A}_1\hat{A}_2 + 19(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \frac{21}{2}\right],$$

$$\hat{G}^{(8)} = c^3\left[8\hat{A}_1^4 + 8\hat{A}_2^4 + 91\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2) + \frac{132}{2}(\hat{A}_1^3 + \hat{A}_2^3) + 177\hat{A}_1^2\hat{A}_2^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{627}{2}\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + 541\hat{A}_1\hat{A}_2 + \frac{784}{4}(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \frac{273}{2}\right],$$

$$\hat{G}^{(10)} = -c^4\left[42\hat{A}_1^5 + 42\hat{A}_2^5 + \frac{2613}{4}\hat{A}_1^2\hat{A}_2^2(\hat{A}_1^3 + \hat{A}_2^3) + \frac{3453}{8}(\hat{A}_1^4 + \hat{A}_2^4) + \right.$$
$$+ 1977\hat{A}_1^2\hat{A}_2^2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \frac{6567}{2}\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2) + \frac{8247}{4}(\hat{A}_1^3 + \hat{A}_2^3) + 5931\hat{A}_1^2\hat{A}_2^2 +$$
$$\left. + \frac{40743}{4}\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \frac{40989}{8}(\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2) + 13134\hat{A}_1\hat{A}_2 + \frac{49833}{8}(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \frac{22221}{8}\right],$$

$$\hat{G}^{(12)} = c^5\left[256\hat{A}_1^6 + 256\hat{A}_2^6 + \frac{20469}{4}\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1^4 + \hat{A}_2^4) + \frac{26613}{8}(\hat{A}_1^5 + \hat{A}_2^5) + \right.$$
$$+ \frac{86295}{4}\hat{A}_1^2\hat{A}_2^2(\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2) + \frac{274935}{8}\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1^3 + \hat{A}_2^3) + \frac{346615}{16}(\hat{A}_1^4 + \hat{A}_2^4) +$$
$$+ 33655\hat{A}_1^3\hat{A}_2^3 + 93630\hat{A}_1^2\hat{A}_2^2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + 161630\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2) +$$
$$+ \frac{320325}{4}(\hat{A}_1^3 + \hat{A}_2^3) + \frac{1165845}{4}\hat{A}_1^2\hat{A}_2^2 + \frac{2872755}{8}\hat{A}_1\hat{A}_2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \qquad (22)$$
$$\left. + \frac{269839}{16}(\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2) + \frac{1699627}{4}\hat{A}_1\hat{A}_2 + \frac{366873}{2}(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \frac{304965}{4}\right],$$

где для простоты записи введены операторы $\hat{A}_1 = \hat{\eta}_1^+\hat{\eta}_1$ и $\hat{A}_2 = \hat{\eta}_2^+\hat{\eta}_2$. Векторы (15) являются собственными для квантовой нормальной формы (22), что позволяет получить следующую формулу для энергетического спектра в полуклассическом приближении

$$E(N,L) = N + 1 + \frac{c}{2}(3N^2 - L^2 + 6N + 4) + \frac{c^2}{4}\times$$
$$\times(9L^2N + 9L^2 - 17N^3 - 51N^2 - 76N$$
$$-42) + \frac{c^3}{16}(11L^4 - 258L^2N^2 - 516L^2N - 590L^2 + 375N^4 + 1500N^3 + 3738N^2 +$$
$$+ 4476N + 2184) + \frac{3c^4}{64}(2970L^2N^3 - 303L^4N - 303L^4 + 8910L^2N^2 + 21336L^2N +$$
$$+ 15396L^2 - 3563N^5 - 17815N^4 - 65320N^3 - 124700N^2 - 132888N - 59256) + \qquad (23)$$
$$+ \frac{c^5}{128}(28650L^4N^2 - 460L^6 + 57300L^4N + 92225L^4 - 170520L^2N^4 - 682080L^2N^3$$
$$- 2583690L^2N^2 - 3803220L^2N - 2801260L^2 + 175098N^6 + 1050588N^5 + 5264385N^4 +$$
$$+ 14053620N^3 + 24392772N^2 + 23479872N + 9758880).$$

Квантовая нормальная форма Биркгофа-Густавсона для гамильтониана (20) в любом приближении имеет собственные векторы (15), так как исходная гамильтоновая система является интегрируемой. В таблице приведены точный (E_{QM}) и вычисленный (E_{SC}) по полукласической формуле (23) энергетические спектры. Разность $\Delta E = E_{QM} - E_{SC}$ между квантово-механическими и полуклассическими величинами энергий меньше среднего расстояния между соседними уровнями. Как видно из таблицы, относительная погрешность ε составляет не более 3% и растет монотонно в отличие от резкого роста погрешности в области перехода регулярность – хаос для неинтегрируемого гамильтониана (16), рассмотренного в предыдущем разделе.

Таблица

Квантовый (E_{QM}) и полуклассический (E_{SC}) спектры гамильтониана (20) (b=0, c=0.001)

№	E_{QM}	E_{SC}	N, L	ε, %	№	E_{QM}	E_{SC}	N, L	ε, %
1.	1.0199	1.0119	0,0	0.08	26.	4.1836	4.1825	3,3	0.03
2.	2.0573	2.0564	1,1	0.04	27.	4.2176	4.2170	3,1	0.01
3.	3.1118	3.1110	2,2	0.03	28.	5.2703	5.2700	4,4	0.01
4.	3.1299	3.1289	2,0	0.03	29.	5.3202	5.3204	4,2	0.00
5.	5.3372	5.3373	4,0	0.00	30.	11.2150	11.2899	9,1	0.67
6.	6.3730	6.3735	5,5	0.01	31.	12.0963	12.1379	10,10	0.34
7.	6.4378	6.4392	5,3	0.02	32.	12.2236	12.2955	10,8	0.59
8.	6.4696	6.4722	5,1	0.05	33.	12.3231	12.4213	10,6	0.80
9.	7.4902	7.4926	6,6	0.03	34.	12.3936	12.5129	10,4	0.96
10.	7.5682	7.5737	6,4	0.07	35.	12.4363	12.5686	10,2	1.06
11.	7.6151	7.6227	6,2	0.10	36.	12.4509	12.5873	10,0	1.10
12.	7.6313	7.6390	6,0	0.10	37.	13.2807	13.3492	11,11	0.52
13.	8.6215	8.6277	7,7	0.07	38.	13.4194	13.5356	11,9	0.87
14.	8.7131	8.7247	7,5	0.13	39.	13.5293	13.6898	11,7	1.19
15.	8.7744	8.7900	7,3	0.18	40.	13.6126	13.8084	11,5	1.44
16.	8.8044	8.8229	7,1	0.21	41.	13.6688	13.8888	11,3	1.61
17.	9.7663	9.7794	8,8	0.13	42.	13.6959	13.9295	11,1	1.71
18.	9.8708	9.8937	8,6	0.23	43.	14.4773	14.5862	12,12	0.75
19.	9.9446	9.9766	8,4	0.32	44.	14.6253	14.8089	12,10	1.25
20.	9.9892	10.0268	8,2	0.38	45.	14.7472	14.9985	12,8	1.70
21.	10.0046	10.0436	8,0	0.39	46.	14.8427	15.1507	12,6	2.07
22.	10.9258	10.9489	9,9	0.21	47.	14.9102	15.2619	12,4	2.36
23.	11.0408	11.0829	9,7	0.38	48.	14.9510	15.3296	12,2	2.53
24.	11.1279	11.1855	9,5	0.52	49.	14.9651	15.3524	12,0	2.59
25.	11.1865	11.2549	9,3	0.61					

ДВУМЕРНЫЙ АТОМ ВОДОРОДА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

При помощи метода нормальных форм можно успешно провести квантование неполиномиальных гамильтонианов. В этом разделе рассмотрим гамильтониан $\widetilde{H}$ с сингулярностью в начале координат

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\gamma}{2}(xp_y - yp_x) + \frac{\gamma^2}{8}(x^2 + y^2), \qquad (24)$$

который описывает двумерный атом водорода [37] во внешнем постоянном магнитном поле B, перпендикулярном к плоскости (x,y) движения электрона, (p_x,p_y) – импульсы, канонически сопряженные координатам (x,y). Здесь использованы атомные единицы измерения и $\gamma = B / (2.35 \cdot 10^5$ T) – единица измерения магнитного поля. Выполним каноническое преобразование Леви-Чивита [28]

$$\begin{aligned} &x = \left(q_1^2 - q_2^2\right)/2\sqrt{-2E},\ y = q_1 q_2/\sqrt{-2E} \\ &p_x = (q_1 p_1 - q_2 p_2)\sqrt{-2E} / \left(q_1^2 + q_2^2\right) \\ &p_y = (q_2 p_1 + q_1 p_2)\sqrt{-2E} / (q_1^2 + q_2^2), \\ &dt / d\tau = r / \sqrt{-2E}, \\ &r = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned} \tag{25}$$

где E<0 есть полная энергия системы, гамильтониан (24) переписывается следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + \frac{\beta}{8}(q_1 p_2 - q_2 p_1)(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\beta^2}{128}(q_1^2 + q_2^2)^2, \tag{26}$$

где $\beta = \gamma / (-E)$, причем $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \sqrt{-2 / E}$.

Следуя общей схеме, изложенной выше в втором разделе, получим классическую и квантовую нормальные формы для гамильтониана (26) до порядка степени $S_{max} = 10$

$$G_{10}(\xi, \eta) = G^{(2)} + G^{(4)} + G^{(6)} + G^{(8)} + G^{(10)},$$

$$G^{(2)} = i(\eta_1 \xi_1 + \eta_2 \xi_2),$$

$$G^{(4)} = \frac{i}{8}\beta(\eta_2^2 \xi_2^2 - \eta_1^2 \xi_1^2),$$

$$G^{(6)} = \frac{5i}{64}\beta^2(\eta_1^2 \xi_1^2 \eta_2 \xi_2 + \eta_1 \xi_1 \eta_2^2 \xi_2^2),$$

$$G^{(8)} = \frac{i}{512}\beta^3(-\eta_2^4 \xi_2^4 - 13\eta_1 \xi_1 \eta_2^3 \xi_2^3 - 13\eta_1^3 \xi_1^3 \eta_2 \xi_2 + \eta_1^4 \xi_1^4),$$

$$G^{(10)} = \frac{i}{2048}\beta^4(\eta_2^5 \xi_2^5 + \frac{27}{8}\eta_1 \xi_1 \eta_2^4 \xi_2^4 - \frac{107}{2}\eta_1^2 \xi_1^2 \eta_2^3 \xi_2^3 - \frac{107}{2}\eta_1^3 \xi_1^3 \eta_2^2 \xi_2^2 +$$
$$+ \frac{27}{8}\eta_1^4 \xi_1^4 \eta_2 \xi_2 + \eta_1^5 \xi_1^5),$$

$$\hat{G}_{10} = \hat{G}^{(2)} + \hat{G}^{(4)} + \hat{G}^{(6)} + \hat{G}^{(8)} + \hat{G}^{(10)},$$

$$\hat{G}^{(2)} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1,$$

$$\hat{G}^{(4)} = \frac{1}{8}\beta(-\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 - \hat{A}_1 + \hat{A}_2),$$

$$\hat{G}^{(6)} = \frac{5}{256}\beta^2(4\hat{A}_1^2\hat{A}_2 + 2\hat{A}_1^2 + 4\hat{A}_1\hat{A}_2^2 + 8\hat{A}_1\hat{A}_2 + 3\hat{A}_1 - 2\hat{A}_2^2 + 3\hat{A}_2 + 1),$$

$$\hat{G}^{(8)} = \frac{1}{2048}\beta^3(4\hat{A}_1^4 + 52\hat{A}_1^3\hat{A}_2 + 34\hat{A}_1^3 + 78\hat{A}_1^2\hat{A}_2 + 59\hat{A}_1^2 - 52\hat{A}_1\hat{A}_2^3 -$$
$$- 78\hat{A}_1\hat{A}_2^2 + 29\hat{A}_1 - 4\hat{A}_2^4 - 34\hat{A}_2^3 - 59\hat{A}_2^2 - 29\hat{A}_2),$$

$$\hat{G}^{(10)} = \frac{1}{32768}\beta^4(16\hat{A}_1^5 + 54\hat{A}_1^4\hat{A}_2 + 67\hat{A}_1^4 - 856\hat{A}_1^3\hat{A}_2^2 - 748\hat{A}_1^3\hat{A}_2 -$$
$$214\hat{A}_1^3 - 856\hat{A}_1^2\hat{A}_2^3 - 2568\hat{A}_1^2\hat{A}_2^2 - 2726\hat{A}_1^2\hat{A}_2 - 949\hat{A}_1^2 + 54\hat{A}_1\hat{A}_2^4 -$$
$$- 748\hat{A}_1\hat{A}_2^3 - 2726\hat{A}_1\hat{A}_2^2 - 2992\hat{A}_1\hat{A}_2 - 1125\hat{A}_1 + 16\hat{A}_2^5 + 67\hat{A}_2^4 -$$
$$- 214\hat{A}_2^3 - 949\hat{A}_2^2 - 1125\hat{A}_2 - 441), \tag{28}$$

где $\hat{A}_1 = \hat{\xi}_1\hat{\eta}_1, \quad \hat{A}_2 = \hat{\xi}_2\hat{\eta}_2$.

Чтобы вычислить энергетический спектр E в полуклассическом приближении для атома водорода в магнитном поле, сперва необходимо предварительно решить задачу на собственные значения для дифференциального оператора (28)

$$\hat{G}_{10}\,|\,\lambda\rangle = \lambda(E)\,|\,\lambda\rangle, \tag{29}$$

для которого собственные векторы $|\,\lambda\rangle$ и собственные значения $\lambda(E)$ зависят от энергии E. Легко проверить, что векторы (15) являются собственными для оператора (28). Для однозначности [38] волновых функций атома водорода надо положить в выражении (15) N=2n и L=2l. Тогда собственные значения задачи (29) будут равны

$$\lambda(E_{nl}) = 2n + 1 - \frac{\beta}{4}l(2n+1) + \frac{5\beta^2}{128}(-4l^2n - 2l^2 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$$
$$+ \frac{\beta^3}{1024}l(-88l^2n - 44l^2 + 120n^3 + 108n^2 + 118n + 29)$$
$$+ \frac{\beta^4}{32768}(-1876l^4n - 938l^4 + 3960l^2n^3 + 5940l^2n^2 + 4168l^2n$$
$$+ 1094l^2 - 1572n^5 - 3930n^4 - 5880n^3 - 4890n^2 - 2250n - 441), \tag{30}$$

где $n = 0,1,2,3,\ldots$ и $l = \pm n,\ \pm(n-1),\ \ldots$

А энергетический спектр E_{nl}. в нашем приближении для двумерного атома водорода в постоянном магнитном поле определяется из алгебраического уравнения

$$\lambda(E_{nl}) = \sqrt{-\frac{2}{E_{nl}}}. \tag{31}$$

Напомним, что параметр β зависит от энергии E_{nl}. В частности, если магнитное поле отсутствует ($\gamma = 0$), то для энергетического спектра двумерного атома водорода получаем известную формулу

$$E_{nl} = -\frac{2}{(2n+1)^2}. \tag{32}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Таким образом, метод нормальных форм Бирқгофа-Густавсона позволяет проквантовать заданную гамильтонову классическую систему, которая может быть как интегрируемой, так и неинтегрируемой. Для исследованных систем были получены приближенные формулы для энергетического спектра и волновые функции, которые естественно назвать полуклассическими. Однако приближенные формулы для спектра обеспечивают с определенной точностью согласие с истинным квантовым спектром только в той области энергии, где классическое движение является регулярным. В области же энергий, где классическое движение хаотическое, полуклассические формулы становятся непригодными. Это связано с тем, что в области энергий перехода от регулярного к хаотическому движению, в квантовомеханическом спектре для неинтегрируемых систем наблюдаются множественные пересечения энергетических уровней в пространстве параметров гамильтониана, которые и определяют границу применимости полуклассического приближения.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований № 03-02-17695 и № 03-02-16263.

Список литературы

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984, 528 с.
2. Gutzwiller M. C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York, Springer, 1990, 432 P.
3. Percival I. C. // Adv. Chem. Phys. 1977, Vol. 36, P. 1.
4. Tabor M. // Adv. Chem. Phys. 1981. Vol. 46. P. 73 – 115.
5. Henon M. and Heiles K. // Astron. Jour. 1964. Vol. 69. N 1. P. 73 – 79.
6. Chirikov B.V. // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 265 – 379.
7. Chirikov B.V., Vivaldi F.// Physica D. 1999. Vol. 129. P. 223 – 234.
8. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985. 380 с.
9. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1966, с. 407 – 416.
10. Brillouin L. // J. Phys. Radium, 1926. Vol. 7. P. 353 – 368.
11. Keller J. B. // Ann. Phys. 1958. Vol. 4, N. 2. P. 180 – 188.
12. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988. 312 с.
13. Sorbie K. S. and Handy N. C. // Mol. Phys. 1974. Vol. 32, N 5, P. 1327 – 1347.
14. Noid D. W and Marcus R. A. // J. Chem. Phys. 1977. Vol. 67. N 2. P. 559 – 567.
15. Соловьев Е. А. // ЖЭТФ. Т. 75. Вып. 4(10). С. 1261 – 1268.
16. Hearn A. C. REDUCE Uzer's Manual, vers. 3.4. Santa Monica: Rand Corporation, 1991, 224 P.
17. Basios V, Chekanov N. A, Markovski B. L., Rostovtsev V. A and Vinitsky S. I. // Comp. Phys. Commun. 1995. Vol. 90. P. 355 – 368.
18. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 1,2. М.: Наука, 1971-1972.
19. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.И.: РХД, 2002. 406с.
20. Gustavson F. G. // Astron. J. 1966. Vol. 71. N. 8. P. 670 – 686.
21. Swimm R. T. and Delos J. B. // J. Chem. Phys. 1979. Vol. 71. P. 17061 – 716.
22. Jaffe Ch and Reinhardt W. P. // J. Chem. Phys. 1982. Vol. 77. N. 10. P. 5191 – 5203.
23. Shirts R. B. and Reinhardt W. P. // J. Chem. Phys. 1982. Vol. 77. N. 10. P. 5204 – 5217.
24. Robnik M. // J. Phys.: Math. Gen. A. 1984. Vol. 17. P. 109 – 130.
25. Uzer T and Marcus R. A. // J. Chem. Phys. 1984. Vol. 81. N. 11. P. 5013 – 5023.
26. Чеканов Н. А. // ЯФ. 1989. Т. 50. Вып. 8. с. 344 – 346.
27. Gonchar V. Yu., Chekanov N. A., Markovski B. L. et. al. // Preprint JINR E11-90-564, Dubna, 1990, 16 P.
28. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. – М.: Наука, 1975. 304 с.

29. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. 300 с.
30. Голдстейн Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1975. 415 с.
31. Дирак П. Принципы квантовой механики. – М.: Наука, 1979. 480 с.
32. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. – М.: Наука, 1986. 496 с.
33. Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Инопин Е. В. и др. // ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. Вып. 4. С. 878 – 929.
33. Коломийцова Т. Д., Щепкин Д. Н. // Опт. и спектр. 1972. Т. 32. С. 488.
35. Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Тарасов В. Н., Чеканов Н. А. // ЯФ. 1990. Т. 52. Вып. 3(9). с. 669 – 678.
36. Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Кривошей И. В. // Хим. физика. 1986. Т. 5. – С. 309 – 317.
37. Гусев А. А., Красильников В. В., Чеканов Н. А. // Ж. физ. хим. 2000, Т. 74. N. 1. с. 101 – 104.
38. Cisneros A. and McIntosh H. // J. Math. Phys. 1969. Vol. 10.P. 277 – 280.

A SEMICLASSICAL APPROACH TO THE INVESTIGATION OF THE TWO-DIMENSIONAL HAMILTONIAN SYSTEMS BY THE NORMAL FORM METHOD

N.A. Chekanov[1)], V.N. Tarasov[2)], N.N. Chekanova[3)]

[1)] Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia
[2)] Fire Safety Academy of Ukraine, Chernyshevsky St. 94, Kharkov, 61023, Ukraine
[3)] National Scientific Center, Kharkov Institute for Physics and Technology, Akademicheskaj St. 1, Kharkov, 61108, Ukraine

The receiving procedure of classical Hamiltonian to the Birkhoff-Gustavson normal form is described. With help of the Weyl correspondence rule for the classical normal forms of some integrable and nonintegrable systems their quantum counterparts are constructed and approximated energy spectra and wave functions are found. It is shown that thus obtained energy spectra are represented good exact ones in an energy domain where the classical motion is regular but agreement is worsen strongly at the energy domain where the classical regular motion is going into chaotic one. It is established that a cause for lack of the semiclassical approach is a phenomenon of multiple same symmetry energy level avoided crossings that take place not at isolated points but along the lines in the parameter space of Hamiltonians. It is shown that normal form method of a quantization is valid not only for polynomial Hamiltonians but for more complicated ones, for example, for singular at zero Hamiltonians.