

ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Економічна кібернетика

міжнародний науковий журнал
№3-4 ' 2001

Свідцтво про державну
реєстрацію друкованого засобу
масової інформації КВ № 3946

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор
д.е.н., проф. **Ю.Г.Лисенко**

Заступник головного редактора
д.е.н., проф. **В.Л.Петренко**

Відповідальний редактор
д.е.н., проф. **М.Г.Гузь**

В.Н.Амітан, д.е.н., проф. (Донецьк, Україна)
О.І.Амоша, д.е.н., проф., чл.-кор. НАН України
(Донецьк, Україна)
О.О.Бакаєв, д.е.н., проф., академік НАН України (Київ,
Україна)
Я.Г.Берсуцький, д.е.н., проф. (Донецьк, Україна)
Ст.Бір, Президент Всесвітньої Організації Кібернетики
та Систем (Торонто, Канада)
В.М.Бурков, д.т.н., проф. (Москва, Росія)
Е.Ванагс, д.е.н., проф., академік Латвійської академії
наук (Рига, Латвія)
В.В.Вітлінський, д.е.н., проф. (Київ, Україна)
В.М.Гєсць, д.е.н., проф., академік НАН України (Київ,
Україна)
П.В.Сгоров, д.е.н., проф. (Донецьк, Україна)
В.Я.Заруба, д.е.н., проф. (Харків, Україна)
М.І.Іванов, д.е.н., проф., чл.-кор. НАН України
(Донецьк, Україна)
Т.С.Клебанова, д.е.н., проф. (Харків, Україна)
І.М.Ляшенко, д.ф.-м.н., проф. (Київ, Україна)
А.О.Москардіні, проф. (Сандерленд, Великобританія)
В.Ф.Прісняков, д.т.н., проф., академік НАН України
(Дніпропетровськ, Україна)
Р.С.Седегов, д.е.н., проф. (Мінськ, Білорусь)
Ю.М.Черемних, д.е.н., проф. (Москва, Росія)
В.В.Шкурба, д.ф.-м.н., проф. (Москва, Росія)

РАДА СПРИЯННЯ

А.О. Орлов, к.е.н., (ГПП "Укрпромводчормет", Донецьк,
Україна)
О.В. Савчук, к.т.н., (ВАТ "Азовмаш", Маріуполь,
Україна)
Є.О. Вареник, (ВАТ "Донецький енергозавод", Донецьк,
Україна)

Журнал видається трьома мовами: українською,
російською та англійською, з анотаціями англійською
мовою. Читачі можуть замовити у редакції переклад статті
кожною із трьох мов.

Видається за рішенням Вченої ради Донецького
національного університету

Затверджено як наукове спеціальне видання України
додатком до постанови президії ВАК України від
11.04.2001 р. № 5-05/4 (Бюл. ВАК, №3, 2001, с.5)

За сприянням **TEMPUS TACIS CD-JEP-21135-2000**

Адреса редакції:

83002, Україна, м.Донецьк, вул.Челюскінців, 198а

тел.: (062) 381-30-18, факс.: (062) 381-30-17

E-mail: andrey@dongu.donetsk.ua

ЗМІСТ

**Теоретичні та методологічні проблеми
економічної кібернетики**

В.В. Християнівський. Дослідження
дестабілізаційних процесів в економічних системах

**Моделювання в системах мікро - і
макроекономіки**

В.Ф. Прісняков, Ю.В. Пріснякова. Математична
модель фінансового ринку

М.В. Румянцев. Модель виробничо-економічної
системи як системи масового обслуговування типу
 $M/G1(m) \cdot G2(\text{from}) / 1$

В.М. Порохня, С.В. Солодухін. Моделювання
соціально-економічних процесів розвитку міста
Запоріжжя з використанням моделі регіонального
бюджетування

В.М. Московкін, А.В. Журавка. Математичне
моделювання конкурентно-коопераційних взаємодій
в суспільних науках

К.Ф. Ковальчук, Т.М. Рева. Вплив податкової
політики на економічний розвиток громад в Україні

Методи прийняття рішень

Л.Б. Долінський. Оцінювання ризикованості
вексельних зобов'язань в умовах фондового ринку

Г.В. Макарка. Оцінювання цінового ефекту
мультиплікації з використанням теорії нечітких
множин

**Моделі та методи економічної динаміки, стійкості
і рівноваги**

О.І. Ляшенко. Агрегована системна модель еволюції
відкритої ринкової економіки

Моделі менеджменту та маркетингу

М.М. Лепа, Т.П. Решетникова. Методика оцінювання
конкурентноздатності підприємства

Н.В. Яненко. Структурно-функціональна модель
потенційно – небезпечної території як економічного
регіону

М.Ю. Ануфрієв. Концептуальна модель
співробітництва суб'єкту регіонального бізнесу з
асоціацією

Економетрика

А.Г. Тиженко, Е.Н. Ястремська. Генетичний
алгоритм в дослідженні стратегічного інвестування

Ю.Т. Олейник. Алгоритми оптимальної класифікації
багатомірних приблизно-нормальних вибірок

**Проблеми освіти в області економічної
кібернетики**

Ю.Г. Лисенко, В.Л. Петренко, В.М. Тимохін. Нова
магістерська спеціальність "Прикладна економіка" в
Україні

Меморандум секції економічної кібернетики

Інформація про авторів

Анотації

До уваги авторів

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТНО- КООПЕРАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

УДК 519.86:(339.137+65.012.6)

д.э.н., профессор В.М. Московкин

аспирант А.В. Журавка

Широко известный класс математических моделей конкурентных взаимодействий в популяционной динамике [1-3] в последнее время находит применение при построении моделей конкурентных взаимодействий социальных [4] и межэтнических [5] групп, инноваций [6], моделей конкурентных взаимодействий в стратифицированном обществе [7], моделей остроконфликтных ситуаций при супружеской дисгармонии [8]. На наш взгляд, такого рода модели могут также описывать конкурентные взаимодействия для широкого класса социально-экономических объектов от конкурирующих предприятий, выпускающих сходный товар или фирм, продающих этот товар, до конкурирующих приграничных регионов или стран. Эти же модели могут лежать в основе теоретической (математической) конфликтологии. В тоже время, помимо описания в этих моделях межвидовых (межгрупповых, межобъектных) попарных конкурентных взаимодействий, ничто не мешает описывать аналогичные попарные кооперационные взаимодействия. Они отличаются от конкурентных взаимодействий только знаком. Запишем в общем виде трехмерную модель конкурентно-кооперационных взаимодействий.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1^2 + \gamma_{12} N_1 N_2 + \gamma_{13} N_1 N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} = \alpha_2 N_2 - \beta_2 N_2^2 + \gamma_{21} N_2 N_1 + \gamma_{23} N_2 N_3 \\ \frac{dN_3}{dt} = \alpha_3 N_3 - \beta_3 N_3^2 + \gamma_{31} N_3 N_1 + \gamma_{32} N_3 N_2 \end{cases} \quad (1)$$

где N_i – фазовая переменная моделируемого i -го объекта, $\alpha_i > 0$ – коэффициент роста фазовой переменной i -го объекта, $\beta_i > 0$ – коэффициент внутривидовой (внутригрупповой, внутриобъектной) конкуренции для i -го объекта, $\gamma_{ij} < 0$ – коэффициент межвидовой (межгрупповой, межобъектной) конкуренции для i и j -го объектов, $\gamma_{ij} > 0$ – тоже самое для кооперации i и j -го объектов.

Из модели (1) следует восемь вариантов знакоопределенных динамических систем третьего порядка, которые описывают один вариант модели конкурентных взаимодействий ($\gamma_{ij} < 0$), один вариант – кооперационных взаимодействий ($\gamma_{ij} > 0$), шесть вариантов – конкурентно-кооперационных взаимодействий ($\gamma_{ij} > 0$ или $\gamma_{ij} < 0$). Рассматриваемая модель имеет восемь особых (равновесных) точек, семь из которых имеют вид:

- 1) $N_1^* = N_2^* = N_3^* = 0$;
- 2) $N_1^* = N_2^* = 0, \quad N_3^* = \frac{\alpha_3}{\beta_3}$;
- 3) $N_1^* = N_3^* = 0, \quad N_2^* = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$;
- 4) $N_1^* = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad N_2^* = N_3^* = 0$;

$$\begin{aligned}
5) \quad N_1^* &= 0, \quad N_2^* = \frac{\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \gamma_{23}}{\beta_2 \beta_3 - \gamma_{23} \gamma_{32}}, \quad N_3^* = \frac{\alpha_2 \gamma_{32} + \alpha_3 \beta_2}{\beta_2 \beta_3 - \gamma_{23} \gamma_{32}}; \\
6) \quad N_1^* &= \frac{\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \gamma_{13}}{\beta_1 \beta_3 - \gamma_{13} \gamma_{31}}, \quad N_2^* = 0, \quad N_3^* = \frac{\alpha_1 \gamma_{31} + \alpha_3 \beta_1}{\beta_1 \beta_3 - \gamma_{13} \gamma_{31}}; \\
7) \quad N_1^* &= \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \gamma_{12}}{\beta_1 \beta_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}}, \quad N_2^* = \frac{\alpha_1 \gamma_{21} + \alpha_2 \beta_1}{\beta_1 \beta_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}}, \quad N_3^* = 0.
\end{aligned}$$

Для последних трех особых точек легко показать, что равновесный уровень для кооперационных взаимодействий выше, чем аналогичный уровень для конкурентных взаимодействий. Возьмем, например, значение N_1^* для шестой особой точки, тогда для условия кооперации это значение будет иметь вид $(N_1^*)_{\text{кооп.}} = \frac{\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \gamma_{13}}{\beta_1 \beta_3 - \gamma_{13} \gamma_{31}}$; $\gamma_{13}, \gamma_{31} > 0$,

а для условия конкуренции — $(N_1^*)_{\text{конк.}} = \frac{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 |\gamma_{13}|}{\beta_1 \beta_3 - |\gamma_{13}| |\gamma_{31}|}$; $\gamma_{13}, \gamma_{31} < 0$, откуда следует, что $(N_1^*)_{\text{кооп.}} > (N_1^*)_{\text{конк.}}$.

Существует также восьмая особая точка динамической системы (1) с не нулевыми фазовыми координатами. Она находится из решения алгебраической линейной системы третьего порядка:

$$\begin{cases} -\beta_1 N_1 + \gamma_{12} N_2 + \gamma_{13} N_3 = -\alpha_1 \\ \gamma_{21} N_1 - \beta_2 N_2 + \gamma_{23} N_3 = -\alpha_2 \\ \gamma_{31} N_1 + \gamma_{32} N_2 - \beta_3 N_3 = -\alpha_3 \end{cases} \quad (2)$$

Решение этой системы, например, с помощью метода Крамера, имеет вид

$$\begin{cases} N_1^* = \frac{\alpha_1(\gamma_{23}\gamma_{32} - \beta_2\beta_3) - \alpha_2(\beta_3\gamma_{12} + \gamma_{13}\gamma_{32}) - \alpha_3(\beta_2\gamma_{13} + \gamma_{12}\gamma_{23})}{\beta_1(\gamma_{23}\gamma_{32} - \beta_2\beta_3) + \gamma_{12}(\beta_3\gamma_{21} + \gamma_{31}\gamma_{23}) + \gamma_{13}(\beta_2\gamma_{31} + \gamma_{21}\gamma_{32})} \\ N_2^* = \frac{-\alpha_1(\beta_3\gamma_{21} + \gamma_{23}\gamma_{31}) - \alpha_2(\beta_1\beta_3 - \gamma_{13}\gamma_{31}) - \alpha_3(\beta_1\gamma_{23} + \gamma_{13}\gamma_{21})}{\beta_1(\gamma_{23}\gamma_{32} - \beta_2\beta_3) + \gamma_{12}(\beta_3\gamma_{21} + \gamma_{31}\gamma_{23}) + \gamma_{13}(\beta_2\gamma_{31} + \gamma_{21}\gamma_{32})} \\ N_3^* = \frac{-\alpha_1(\beta_2\gamma_{31} + \gamma_{21}\gamma_{32}) - \alpha_2(\beta_1\gamma_{32} + \gamma_{12}\gamma_{31}) - \alpha_3(\beta_1\beta_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})}{\beta_1(\gamma_{23}\gamma_{32} - \beta_2\beta_3) + \gamma_{12}(\beta_3\gamma_{21} + \gamma_{31}\gamma_{23}) + \gamma_{13}(\beta_2\gamma_{31} + \gamma_{21}\gamma_{32})} \end{cases} \quad (3)$$

Матрица линеаризованной системы (1) (матрица Якоби) в произвольной особой точке (N_1^*, N_2^*, N_3^*) имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 2\beta_1 N_1^* + \gamma_{12} N_2^* + \gamma_{13} N_3^* & \gamma_{12} N_1^* & \gamma_{13} N_1^* \\ \gamma_{21} N_2^* & \alpha_2 - 2\beta_2 N_2^* + \gamma_{21} N_1^* + \gamma_{23} N_3^* & \gamma_{23} N_2^* \\ \gamma_{31} N_3^* & \gamma_{32} N_3^* & \alpha_3 - 2\beta_3 N_3^* + \gamma_{31} N_1^* + \gamma_{32} N_2^* \end{bmatrix} \quad (4)$$

Эта матрица в первой нулевой особой точке имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Так как $\alpha_i > 0$, то собственные числа этой матрицы $\lambda_i = \alpha_i$ положительны и рассматриваемая особая точка является неустойчивым узлом.

Во второй особой точке матрица A примет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \gamma_{13} \frac{\alpha_3}{\beta_3} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + \gamma_{23} \frac{\alpha_3}{\beta_3} & 0 \\ \gamma_{31} \frac{\alpha_3}{\beta_3} & \gamma_{32} \frac{\alpha_3}{\beta_3} & -\alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Характеристическое уравнение $|A - \lambda I| = 0$, где I - единичная матрица, для этой особой точки примет вид

$$\left(\alpha_1 + \gamma_{13} \frac{\alpha_3}{\beta_3} - \lambda \right) \left(\alpha_2 + \gamma_{23} \frac{\alpha_3}{\beta_3} - \lambda \right) (-\alpha_3 - \lambda) = 0, \quad (7)$$

откуда

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \gamma_{13} \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \quad \lambda_2 = \alpha_2 + \gamma_{23} \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \quad \lambda_3 = -\alpha_3 \quad (8)$$

Отсюда следует, что при $\gamma_{13} > 0$ (кооперация между первым и третьем объектами) или(и) $\gamma_{23} > 0$ (кооперация между вторым и третьем объектами) имеет место седло (неустойчивая особая точка), при $\gamma_{13} < 0, \gamma_{23} < 0$ (конкуренция между вышеуказанными объектами) устойчивый узел будет возникать при наличии дополнительных условий: $\alpha_1 < |\gamma_{13}| \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \alpha_2 < |\gamma_{23}| \frac{\alpha_3}{\beta_3}$.

В третьей особой точке матрица A примет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \gamma_{12} \frac{\alpha_2}{\beta_2} & 0 & 0 \\ \gamma_{21} \frac{\alpha_2}{\beta_2} & -\alpha_2 & \gamma_{23} \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ 0 & 0 & \alpha_3 + \gamma_{32} \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Характеристическое уравнение для этой особой точки примет вид

$$\left(\alpha_1 + \gamma_{12} \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \lambda \right) \left(\alpha_3 + \gamma_{32} \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \lambda \right) (-\alpha_2 - \lambda) = 0. \quad (10)$$

Откуда

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \gamma_{12} \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \lambda_2 = \alpha_3 + \gamma_{32} \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \lambda_3 = -\alpha_2. \quad (11)$$

При $\gamma_{12} > 0$ или(и) $\gamma_{32} > 0$ имеем седловую неустойчивую точку. Устойчивый узел будет возникать при $\gamma_{12} < 0, \gamma_{32} < 0$ (конкуренция между первым и вторым, а также вторым и третьим объектами) и дополнительных условиях:

$$\alpha_1 < |\gamma_{12}| \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \alpha_3 < |\gamma_{32}| \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

В четвертой особой точке матрица A примет вид

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \gamma_{12} \frac{\alpha_1}{\beta_1} & \gamma_{13} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ 0 & \alpha_2 + \gamma_{21} \frac{\alpha_1}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 + \gamma_{31} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

а характеристическое уравнение –

$$\left(\alpha_3 + \gamma_{31} \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \lambda \right) \left(\alpha_2 + \gamma_{21} \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \lambda \right) (-\alpha_1 - \lambda) = 0, \quad (13)$$

откуда

$$\lambda_1 = \alpha_3 + \gamma_{31} \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \lambda_2 = \alpha_2 + \gamma_{21} \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \lambda_3 = -\alpha_1. \quad (14)$$

При $\gamma_{31} > 0$ или(и) $\gamma_{21} > 0$ имеем седловую неустойчивую точку. Устойчивый узел будет возникать при $\gamma_{31} < 0$, $\gamma_{21} < 0$ и дополнительных условиях:

$$\alpha_3 < \left| \gamma_{31} \right| \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \alpha_2 < \left| \gamma_{21} \right| \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Для пятой особой точки запишем сразу характеристическое уравнение

$$(\alpha_1 + \gamma_{12} N_2^* + \gamma_{13} N_3^* - \lambda) [(\alpha_2 - 2\beta_2 N_2^* + \gamma_{23} N_3^* - \lambda)(\alpha_3 - 2\beta_3 N_3^* + \gamma_{32} N_2^* - \lambda) - \gamma_{23} \gamma_{32} N_2^* N_3^*] = 0 \quad (15)$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения при

$$\alpha_2 = \alpha_3, \quad \beta_2 = \beta_3, \quad \gamma_{23} = \gamma_{32}, \text{ тогда получим, что } N_2^* = N_3^* = \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \gamma_{23}}. \text{ Подставляя}$$

найденные значения N_2^* и N_3^* в уравнение (15), получим

$$\left[\frac{\alpha_1(\beta_2 - \gamma_{23}) + \alpha_2(\gamma_{12} + \gamma_{13})}{\beta_2 - \gamma_{23}} - \lambda \right] \left[\frac{\alpha_2(\beta_2 + \gamma_{23})}{(\gamma_{23} - \beta_2)} - \lambda \right] (-\alpha_2 - \lambda) = 0. \quad (16)$$

Из уравнения (16) следует, что

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1(\beta_2 - \gamma_{23}) + \alpha_2(\gamma_{12} + \gamma_{13})}{\beta_2 - \gamma_{23}}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha_2(\beta_2 + \gamma_{23})}{\gamma_{23} - \beta_2}, \quad \lambda_3 = -\alpha_2. \quad (17)$$

При $\gamma_{12}, \gamma_{13} > 0$ и $\gamma_{23} < 0$ имеем $\lambda_1 > 0$ и приходим к седловой точке.

При $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23} > 0$ возможен случай, когда $\beta_2 > \gamma_{23}$, тогда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ - седловая точка.

При $\beta_2 < \gamma_{23}$ мы попадаем в нефизическую область, так как здесь $N_2^* = N_3^* < 0$. Устойчивый узел возможен, например, при $\beta_2 > \gamma_{23} > 0$ и $\alpha_2 (|\gamma_{12}| + |\gamma_{13}|) > \alpha_1(\beta_2 - \gamma_{23})$; $\gamma_{12}, \gamma_{13} < 0$.

Для шестой особой точки характеристическое уравнение запишем в виде

$$(\alpha_2 + \gamma_{21} N_1^* + \gamma_{23} N_3^* - \lambda) [(\alpha_1 - 2\beta_1 N_1^* + \gamma_{13} N_3^* - \lambda)(\alpha_3 - 2\beta_3 N_3^* + \gamma_{31} N_1^* - \lambda) - \gamma_{13} \gamma_{31} N_1^* N_3^*] = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения при $\alpha_1 = \alpha_3$, $\beta_1 = \beta_3$, $\gamma_{13} = \gamma_{31}$,

тогда получим, что $N_1^* = N_3^* = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \gamma_{13}}$. Подставляя найденные значения N_1^* и N_3^* в

уравнение (18), получим

$$\left[\frac{\alpha_2(\beta_1 - \gamma_{13}) + \alpha_1(\gamma_{21} + \gamma_{23})}{\beta_1 - \gamma_{13}} - \lambda \right] \left[\frac{\alpha_1(\beta_1 + \gamma_{13})}{(\gamma_{13} - \beta_1)} - \lambda \right] (-\alpha_1 - \lambda) = 0. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_2(\beta_1 - \gamma_{13}) + \alpha_1(\gamma_{21} + \gamma_{23})}{\beta_1 - \gamma_{13}}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha_1(\beta_1 + \gamma_{13})}{\gamma_{13} - \beta_1}, \quad \lambda_3 = -\alpha_1. \quad (20)$$

Здесь только отметим, что устойчивый узел в рассматриваемой особой точке возможен, например, при $\beta_1 > \gamma_{13} > 0$ и $\alpha_1(|\gamma_{21}| + |\gamma_{23}|) > \alpha_2(\beta_1 - \gamma_{13})$; $\gamma_{21}, \gamma_{23} < 0$.

Для седьмой особой точки, которая при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ вырождается в точку $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1 - \gamma_{12}}, \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \gamma_{12}}, 0 \right)$, запишем сразу собственные числа матрицы Якоби:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_3(\beta_1 - \gamma_{12}) + \alpha_1(\gamma_{31} + \gamma_{32})}{\beta_1 - \gamma_{12}}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha_1(\beta_1 + \gamma_{12})}{\gamma_{12} - \beta_1}, \quad \lambda_3 = -\alpha_1. \quad (21)$$

Здесь устойчивый узел возможен, например, при $\beta_1 > \gamma_{12} > 0$ и $\alpha_1(|\gamma_{31}| + |\gamma_{32}|) > \alpha_3(\beta_1 - \gamma_{12})$; $\gamma_{31}, \gamma_{32} < 0$.

Рассмотрим теперь случай восьмой особой точки. Для простоты анализа предположим, что $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $\gamma_{ij} = \gamma$, тогда координаты этой точки, согласно выражений (3) примут вид

$$N_1^* = N_2^* = N_3^* = \frac{-\alpha(\beta + \gamma)^2}{2\gamma^3 + 3\beta\gamma^2 - \beta^3}. \quad (22)$$

Нас будет интересовать положительное значение этого выражения, которое имеет место при $2\gamma^3 + 3\beta\gamma^2 - \beta^3 < 0$. Из последнего неравенства сразу видим, что оно не соблюдается при $\gamma > \beta$, то есть, когда коэффициент межобъектной кооперации выше, чем коэффициент внутриобъектной конкуренции. Для случая $\gamma > 0$ определим область этого параметра, в которой в выражении (22) положительно. Для этого представим этот параметр в виде $\gamma = n\beta$, где n - положительное действительное число. Тогда неравенство $2\gamma^3 + 3\beta\gamma^2 - \beta^3 < 0$ эквивалентно неравенству

$$\beta^3(2n^3 + 3n^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow \beta^3\left(n - \frac{1}{2}\right)(2n^2 + 4n + 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < n < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, приходим к следующему интервалу $0 < \gamma < \frac{\beta}{2}$, в котором координаты рассматриваемой восьмой особой точки положительны. Аналогичным образом легко показать, что для случая конкуренции ($\gamma < 0$) рассматриваемое неравенство всегда выполняется. Таким образом, область положительных значений выражения (22) имеет вид: $-\infty < \gamma < \frac{\beta}{2}$.

Для нашего случая матрица (4) может быть преобразована к виду

$$A = \begin{bmatrix} -\beta N^* & \gamma N^* & \gamma N^* \\ \gamma N^* & -\beta N^* & \gamma N^* \\ \gamma N^* & \gamma N^* & -\beta N^* \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где $N_1^* = N_2^* = N_3^* = N^*$.

При выводе этой матрицы выражение (22) подставлялось в диагональные члены матрицы (4), которые приведены к виду указанному в выражении (23). Соответствующее характеристическое уравнение после ряда преобразований приведено нами к виду

$$(\beta N^* + \gamma N^* \div \lambda)(\beta N^* + \lambda)(-\beta N^* + \gamma N^* - \lambda) + 2\gamma^2(N^*)^2 = 0. \quad (24)$$

Это уравнение имеет следующие решения

$$\lambda_{1,2} = -N^*(\beta + \gamma), \lambda_3 = N^*(2\gamma - \beta). \quad (25)$$

Таким образом, в случае кооперационных взаимодействий $\left(0 < \gamma < \frac{\beta}{2}\right)$, приходим к устойчивому узлу $(\lambda_1, \lambda_2 < 0)$.

Важно отметить, что модель кооперационных взаимодействий (1) $(\gamma_{ij} > 0)$ аналогична моделям мутуализма Лотка-Вольтерра в биологии и экологии [9]. При мутуализме взаимодействия между двумя видами выгодны для развития обоих видов. В вышеуказанной работе рассмотрена модель Лотка-Вольтерра

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i \left(k_i + \sum_{j=1}^m a_{ij} N_j \right), i = 1, 2, \dots, m. \quad (26)$$

где $a_{ij} \geq 0, i \neq j$ - условие мутуализма.

В работе [9] доказана теорема: Если нетривиальное равновесие системы (26) существует, то необходимым и достаточным условием для локальной и глобальной стабильности этой системы является положительность всех главных миноров матрицы Якоби. Отметим, что под нетривиальным равновесием понимается особая точка $(\overline{N}_1, \overline{N}_2, \dots, \overline{N}_m)$ для которой $\overline{N}_i \neq 0$. Легко видеть, что динамическая система (26) при $m=3$ равносильна нашей системе (1) при $\gamma_{ij} > 0, i \neq j$ (условия кооперации). В частном случае, когда матрица A имеет вид (23), можно видеть, что главные миноры этой матрицы положительны. Следовательно, согласно вышеуказанной теореме, рассматриваемая модель в особой нетривиальной точке (22) является глобально устойчивой.

Отметим, что динамическая система (1) может представлять собой, например трехполюсную геополитическую модель, которая позволяет проигрывать разные сценарии попарных взаимодействий между геополитическими полюсами (странами), в виде стратегий конкуренции (сдерживания) и кооперации (сотрудничества). Здесь в качестве фазовых переменных могут рассматриваться ВВП стран. Актуально рассмотрение такой модели для США, России и Китая. Возможны и другие комбинации стран или их группировок (блоков).

В заключении отметим, что по аналогии с динамической системой (1) могут строиться n -мерные динамические системы.

Литература

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. – М.: Мир, 1970. – 326 с.
2. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
3. Федоров В.Д., Гильманов Т.Г. Экология. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 464 с.
4. Karmeshu, Yasuhiro Takeuchi. Dynamic model of three competing social groups // Int. Journal of systems science. - 1989. - Vol.20.-N 11. - p. 2125-2137.
5. Московкин В. М. Математическое моделирование межэтнических конкурентных взаимодействий // Бизнес Информ. – 2000. - №4. – с.11-13.
6. Московкин В. М. Основы концепции диффузии инноваций // Бизнес Информ. – 1998.- №17-18. – с.41-48.
7. Московкин В. М. Конкурентные взаимодействия в стратифицированном обществе (Математическое моделирование) // Бизнес Информ. – 2000. - №2. – с.36-39.
8. Семенкина И.А. Модельное описание доминант остроконфликтных ситуаций при супружеской дисгармонии // Международный медицинский журнал. –1999. - №3. – с.49-50.
9. Goh B.S. Stability in models of mutualism // The American Naturalist. –1979. - Vol.113.-№2. – p.261-274.