Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, №1. С. 5–14.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.226 DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-5-14
MSC 35J70

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В. В. Панков, С. А. Шабров

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым*)

ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет,
Воронеж, 394018, Россия

E-mail: pankovfam@mail.ru, shabrov_s_a@math.vsu.ru

Аннотация. В работе получены коэрцитивные априорные оценки решений краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, а также доказана теорема существования и единственности решения таких задач. Уравнение содержит весовые операторы, представляющие собой суперпозицию оператора умножения на функцию, которая обращается в нуль на границе, и оператора дифференцирования. На границе рассматриваются условия типа условий Дирихле. Оценки получены в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовые пространства С. Л. Соболева, весовые производные, теорема существования и единственности

Для цитирования: Панков В. В., Шабров С. А. 2022. О разрешимости одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Прикладная математика & Физика. 54(1): 5–14.
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-5-14

ON SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A STRIP FOR A DEGENERATE HIGH-ORDER ELLIPTIC EQUATION

Vladimir Pankov, Sergey Shabrov

(*Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov*)

Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia
E-mail: pankovfam@mail.ru, shabrov_s_a@math.vsu.ru
Received January, 25, 2022

Abstract. In this paper we obtain coercive a priori estimates of solutions to the boundary value problem of the Dirichlet type in a strip for a degenerate high-order elliptic equation and prove existence and uniqueness of such solutions. The equation contains weight operators, which are a superposition of the multiplication operator on the function, which vanishes at the boundary, and the differentiation operator. We consider conditions of the Dirichlet type on the strip boundary. We obtain estimates in special weight spaces such as Sobolev spaces.

Key words: a priori estimate, degenerate elliptical equation, S. L. Sobolev's weight spaces, weight derivatives, existence and uniqueness theorem

For citation: Pankov Vladimir, Shabrov Sergey. 2022. On solvability of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 5–14. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-5-14

1. Введение. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений используются при моделировании вырождающихся процессов, то есть процессов, в которых протекание процесса вблизи границы существенно отличается от его протекания внутри области. Краевые задачи для таких уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [7], [8]. В работе В. П. Глушко

[9] были получены априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [1, 2, 3] были сформулированы априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка. В работах А. Д. Баева и С. С. Бунеева [4, 5] были исследованы краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка.

В настоящей работе получены априорные оценки решений краевых задач в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение произвольного нечетного порядка по одной из переменных, а также доказана теорема существования и единственности решений таких задач. Работа является естественным продолжением исследований, начатых в работах [4, 5, 10, 11, 12, 13, 14].

2. Основные обозначения, определения и результаты. Пусть в полосе $\mathbb{R}^n_d = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < t < d\}$ задана следующая краевая задача:

$$A\left(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) v\left(x,t\right) = F\left(x,t\right), \tag{1}$$

где

$$A\left(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) v = L_{2m}\left(D_x, D_{\alpha,t}\right) v + b(-1)^k \partial_t^{2k-1} v,$$
$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau j} D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j}, a_{\tau j} \in \mathbb{C}, Im\, \bar{b} a_{0,2m} = 0,$$
$$D_x^{\tau} = i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} ... \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}},$$

$D_{\alpha,t} u(t)$ – так называемая весовая производная функции $u(t)$:

$$D_{\alpha,t} u(t) = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t (\sqrt{\alpha(t)} u(t)), \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},$$
$$D_{\alpha,t}^{j} u(t) = D_{\alpha,t}(D_{\alpha,t}^{j-1} u(t)), j = 1, 2, ...,$$

$\alpha(t)$ – специальная весовая функция, которая будет определена далее, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

На границе $t = 0$ полосы $\mathbb{R}^n_d$ задаются условия:

$$B_j(D_x) v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\le m_j} b_{\tau j} D_x^{\tau} \partial_t^{j} v|_{t=0} = G_j(x), \;\; j = 1, ..., k-1. \tag{2}$$

На границе $t = d$ полосы $\mathbb{R}^n_d$ заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1} v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Априорные оценки решения задачи (1) – (3) будут установлены в специальных пространствах с весом.

Определение 2.1. *Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\left(\mathbb{R}^n_d\right)$, $s \ge 0, s \in \mathbb{Z}$ состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2\left(\mathbb{R}^n_d\right)$, для которых конечна норма*

$$||v||_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{i=0}^{\left[\frac{(2k-1)s}{2m}\right]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha} \left[\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s-\frac{2m}{2k-1}l\right)} F_{\alpha} F_{x\to\xi} \left[\partial_t^l v(x,t)\right]\right]\right\|^2_{L_2\left(\mathbb{R}^n_d\right)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\left[\frac{(2k-1)s}{2m}\right]$ – целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$. Если s – натуральное число такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$||v||_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l\le s} \left\| D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^l v \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ пространство С. Л. Соболева. Пусть выполнены следующие условия:

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство

$$Re\left(\bar{b} L_{2m}(\xi,\eta)\right) \ge c\left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^m,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого числа $s \geq 2m + \max\limits_{1 \leq j \leq k-1} (m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0, \alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \neq 0, j = 1, 2, ..., k-1$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Основным результатом работы являются теоремы 2.1 и 2.2.

Теорема 2.1. *Пусть* $s \geq \max \left\{ 2m, \max\limits_{1 \leq j \leq k-1} \left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\}$ *– целое число,* $m \geq 2k-1$ *– целое число и выполнены условия 1 – 3, тогда для любого решения* $v(x,t)$ *задачи (1) – (3), принадлежащего пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \left(\mathbb{R}^n_d \right)$, *справедлива априорная оценка*

$$|v|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leq c \left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \left\| B_j v|_{t=0} \right\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}} \right), \tag{4}$$

где постоянная $c > 0$ *не зависит от* v. *Здесь* $\|\cdot\|_s$ *– норма в пространстве Соболева – Слободецкого* $H_s \left(\mathbb{R}^{n-1} \right)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $s \geq \max \left\{ 2m, \max\limits_{1 \leq j \leq k} \left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\}$ *– целое число,* $m \geq 2k-1$ *– целое число, а также выполнены условия 1 – 3. Пусть* $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \left(\mathbb{R}^n_d \right)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}} \left(\mathbb{R}^{n-1} \right)$, $j = 1, 2, ..., k-1$, *тогда существует единственное решение* $v\,(x,t)$ *задачи (1) – (3), принадлежащее пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \left(R^n_d \right)$.

3. Схема доказательства теоремы 2.1. Для доказательства теоремы 2.1 преобразуем задачу (1) – (3), применив преобразование Фурье $F_{x \to \xi}$ к уравнению, начальным и краевым условиям. Обозначим $u(\xi,t) = F_{x \to \xi}[v], f(\xi,t) = F_{x \to \xi}[F], g(\xi) = F_{x \to \xi}[G]$,

$$L'_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} \xi^\tau D^j_{\alpha,t}, B'_j(\xi) = \sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \partial^j_t,$$

тогда после применения преобразования Фурье исходная задача (1) – (3) приобретает вид

$$L'_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u(\xi,t) + b(-1)^k \partial_t^{2k-1} u(\xi,t) = f(\xi,t), \tag{5}$$

$$B'_j(\xi)\, u(\xi,t)|_{t=0} = g_j(\xi), j = 1, ..., k-1, \tag{6}$$

$$u|_{t=d} = \partial_t\, u|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1} u|_{t=d} = 0. \tag{7}$$

Дополнительно введем еще одно пространство.

Определение 3.1. *Будем говорить, что функция* $u\,(t)$ *принадлежит пространству* $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\,(0;d)$ *(*$s \geq 0$ *– целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра* $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} = \left\{ \sum_{k+\frac{2m}{2k-1} j \leq s} \left\| F_\alpha^{-1} \left[\left(1 + |\xi|^2 + \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}k} F_\alpha \left[\partial^j_t u \right] \right] \right\|^2_{L_2(0;d)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2.1 доказывается с помощью теоремы 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть* $s \geq \max \left\{ 2m, \max\limits_{1 \leq j \leq k-1} \left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\}$ *– целое число,* $m \geq 2k-1$ *– целое число. Пусть* $f\,(\xi,t) \in \widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\,(0;d)$ *при всех и выполнены условия 1 – 3. Тогда для любого решения* $u\,(\xi,t)$ *задачи (5) – (7), принадлежащего при всех* $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ *пространству* $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\,(0;d)$, *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leq c \left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{s-m_j-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}} \left| g_j\,(\xi) \right|^2 \right) \tag{8}$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* u, f, g.

Для доказательства теоремы 3.1 потребуются несколько вспомогательных понятий и утверждений, в частности, интегральное преобразование F_α, свойства весовых производных и несколько лемм.

Интегральное преобразование F_α на функциях $u(t) \in C_0^\infty\,(\mathbb{R}_+)$ может быть записано в виде:

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} \right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование (его можно называть весовым преобразованием Фурье) было введено в работе [1]. В этом преобразовании $\alpha(t)$ – некоторая функция со свойствами:

$$t \in \mathbb{R}_+, \alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0, \alpha(t) > 0 \text{ при } t > 0,$$
$$\alpha(t) = const \text{ при } t \geq d, d > 0.$$

Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье следующим образом:

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \text{ где}$$
$$u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}\, u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, \tau = \varphi(t) = -\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Соответственно, для F_α можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде:

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)},$$

где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ – обратное преобразование Фурье.

Для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля:

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Это дает возможность расширить F_α до непрерывного преобразования из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α не только на функциях из $L_2(\mathbb{R}_+)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Преобразование F_α и весовые производные обладают несколькими полезными свойствами.

Свойство 1. $\forall u(t) \in L_2(0,d), w(t) \in L_2(0,d) : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha[u](\eta)\overline{F_\alpha[w](\eta)}d\eta = 2\pi(u,w)$, (u,w) – скалярное произведение в $L_2(0,d)$.

Свойство 2. Если $u(t) \in C^s[0,d]$ и имеют место равенства

$$u(d) = \partial_t u(d) = ... = \partial_t^{s-1}u(d) = 0, \tag{9}$$

то выполняются:

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), j = 0, ..., s.$$

Свойство 3. Если $u(t) \in C^s[0,d]$, $w(t) \in C^s[0,d]$ и для них выполняются (9), то справедливо равенство:

$$(D^j_{\alpha,t}u(t), w(t)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta^j F_\alpha[u](\eta)\overline{F_\alpha[w](\eta)}d\eta = \frac{1}{2\pi}(\eta^j F_\alpha[u](\eta), F_\alpha[w](\eta)).$$

Отметим, что $C^\infty(0,d)$ плотно в $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}$.

Для весовых производных известны аналоги неравенства Эрлинга – Ниренберга. Сформулируем их в виде леммы и следствия из нее.

Лемма 3.1. *Пусть $u(t) \in C^\infty(0,d)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$, $j = 0, ..., s-1$ справедливо неравенство*

$$\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leq \varepsilon^{2(s-j}\left\|D^s_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left(c\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}\right)\|u\|^2, \quad c = const > 0. \tag{10}$$

Здесь и в дальнейшем через $\|\cdot\|$ обозначается норма в пространстве $L_2(0;d)$.

Следствие 3.1. *Пусть $u(t) \in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$, $j = 0, 1, ..., 2m-1$, $\xi \in R^{n-1}$ справедливо неравенство*

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leq \varepsilon^{2(2m-j)}\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \tag{11}$$

$$c(\varepsilon) = c(\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(2m-j)}), c = const > 0,$$

не зависит от u, ξ. В общем случае неравенство имеет вид:

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leq \varepsilon^{2(s-j)}\left\|D^s_{\alpha,t}u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^s\|u\|^2, j = 0, 1, ..., s-1,$$

$$c(\varepsilon) = c(\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}), c = const > 0.$$

Следующие леммы напрямую используются в доказательстве теоремы 3.1. Доказательства каждой из этих лемм громоздки, поэтому доказательство будет приведено только для теорем 2.1 и 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия 1 и 2, $m \geq 2k-1, k \geq 2$, тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2 \leq c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\left(t\right)\right\|^2+\right.\\ \left.+\left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\mathrm{Re}\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^{j}u\left(0\right)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t^{k-1}u\left(0\right)\right|^2\right)\right)\end{gathered} \tag{12}$$

с константой $c>0$, не зависящей от ξ, u.

Лемма 3.3. *При выполнении условий леммы 3.2 для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \leq \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2\right)+\\ +c\left(\varepsilon\right)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)\end{gathered} \tag{13}$$

при любом $\varepsilon>0$.

Лемма 3.4. *При выполнении условий леммы 3.2 для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка*

$$\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 \leq c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \tag{14}$$

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия леммы 3.2 и $2m$ кратно $2k-1$, тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, являющейся решением задачи (5) – (7), имеет место оценка:*

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m-qj}\partial_t^{j}u\right\|^2 \leq \varepsilon\sum_{l=0}^{2k-1}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-ql}\partial_t^{l}u\right\|^2+c\left(\varepsilon\right)\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right), \tag{15}$$

где $q=\frac{2m}{2k-1}$, $j \in \mathbb{N}$ такое, что $2m-qj>0$, $\varepsilon>0$ – любое число.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (5) скалярно на функцию $(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u$, получим

$$\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u+b(-1)^k\partial_t^{2k-1}u,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=\left(f,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right),$$

$$\begin{gathered}(-1)^j\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u,bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)+\left(b(-1)^k\partial_t^{2k-1}u,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=\\ =\left(f,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(-1)^j\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u,bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)+(-1)^{k+j}|b|^2\left(\partial_t^{2k-1}u,D_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=\\ =\left(f,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(-1)^j\mathrm{Re}\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u,bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)+\\ +(-1)^{k+j}|b|^2\mathrm{Re}\left(\partial_t^{2k-1}u,D_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=\mathrm{Re}\left(f,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right).\end{gathered} \tag{16}$$

С помощью неравенств Эрлинга – Ниренберга, Коши – Буняковского, теоремы «о следах», а также интегрирования по частям и коммутаторов операторов дифференцирования и весового дифференцирования, получим оценки для каждого из слагаемых в левой и правой частях (16):

$$\begin{gathered}(-1)^{k+j}|b|^2\mathrm{Re}\left(\partial_t^{2k-1}u,D_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=-|b|^2\mathrm{Re}A_{k+j-1}+(-1)^{k+j}|b|^2\mathrm{Re}\widetilde{B}=\\ =(-1)^{k+j}|b|^2\mathrm{Re}\widetilde{B}-\frac{|b|^2}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m-qj}\partial_t^{k+j-1}u(d)\right|^2,\end{gathered}$$

$$\mathrm{Re}A_{k+j-1}=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m-qj}\partial_t^{k+j-1}u(d)\right|^2,$$

$$\left|\widetilde{B}\right|=\left|\sum_{l=2}^{k+j-1}(-1)^l B_l\right| \leq \varepsilon\sum_{l=0}^{2k-1}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-ql}\partial_t^{l}u\right\|^2+c(\varepsilon)\|u\|^2,$$

$$\begin{gathered}(-1)^j\mathrm{Re}\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u,bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=\\ =(-1)^j\mathrm{Re}a_{0,2m}\overline{b}\left((-1)^j C_{j+1}+\sum_{l=2}^{j}(-1)^l\widehat{B}_l\right)+N_0=\\ =(-1)^{2j}\mathrm{Re}a_{0,2m}\overline{b}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-qj}\partial_t^{j}u\right\|^2+\mathrm{Re}a_{0,2m}\overline{b}\sum_{l=2}^{j}(-1)^{l+j}\widehat{B}_l+N_0,\end{gathered}$$

$$N_0 \le \varepsilon \left(\left\| D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right\|^2 + \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 \right) + c(\varepsilon) \left(1 + |\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2,$$

$$\left| \mathrm{Re} a_{0,2m} \overline{b} \sum_{l=2}^{j} (-1)^{l+j} \widehat{B_l} \right| \le \varepsilon \sum_{l=0}^{2k-1} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-ql} \partial_t^l u \right\|^2 + c(\varepsilon) \left(1 + |\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2,$$

$$Re \left(f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) \le \left| \left(f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) \right| \le \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right\|^2 + c(\varepsilon) \|u\|^2.$$

Применим оценки:

$$\begin{gathered} \mathrm{Re} a_{0,2m} \overline{b} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-qj} \partial_t^j u \right\|^2 + \mathrm{Re} a_{0,2m} \overline{b} \sum_{l=2}^{j} (-1)^{l+j} \widehat{B_l} + N_0 + (-1)^{k+j} |b|^2 \mathrm{Re} \widetilde{B} + \\ + \frac{|b|^2}{2} \left| D_{\alpha,t}^{m-qj} \partial_t^{k+j-1} u(d) \right|^2 = \mathrm{Re} \left(f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{Re} a_{0,2m} \overline{b} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-qj} \partial_t^j u \right\|^2 + \frac{|b|^2}{2} \left| D_{\alpha,t}^{m-qj} \partial_t^{k+j-1} u(d) \right|^2 \le \\ \le \varepsilon \sum_{l=0}^{2k-1} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-ql} \partial_t^l u \right\|^2 + c(\varepsilon) \left(\|f\|^2 + \left(1 + |\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2 \right). \end{gathered}$$

Лемма 3.5 доказана.

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия леммы 3.2 и* $q = \frac{2m}{2k-1} > 1, q \notin \mathbb{Z}$, *тогда для любой функции* $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,q}(0;d)$, *являющейся решением задачи (5) – (7), имеет место оценка:*

$$\begin{gathered} \left(1 + |\xi|^2\right)^{q_2 j} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-q_1 j} \partial_t^j u \right\|^2 \le \\ \le \varepsilon \sum_{l=0}^{2k-1} \left(1 + |\xi|^2\right)^{q_2 j} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-q_1 l} \partial_t^l u \right\|^2 + c(\varepsilon) \left(\|f\|^2 + \left(1 + |\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2 \right), \end{gathered} \tag{17}$$

$j = 1, 2, \ldots : 2m - qj > 0$, $\varepsilon > 0$ *– любое число,* q_1 *– целая часть* q, q_2 *– дробная часть* q.

Доказательство леммы 3.6 очень похоже на доказательство леммы 3.5 и заключается в поэтапной оценке слагаемых выражения, полученного путем применения скалярного произведения (5) на $(-1)^j b \left(1 + |\xi|^2\right)^{2q_2} D_{\alpha,t}^{2m-2q_1 j} \partial_t^{2j} u$.

Лемма 3.7. *При выполнении условий леммы 3.2 справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \le c \left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} + \left(1 + |\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \mathrm{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right). \tag{18}$$

Доказательство теоремы 3.1. В доказательстве потребуется

Утверждение 1. При $x, y \in \mathbb{R}, x \ge 0, y \ge 0$ и произвольном $\varepsilon > 0$ верно неравенство $xy \le \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Доказательство утверждения 1. $\left(\sqrt{\varepsilon} x - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} y\right)^2 \ge 0, \varepsilon x^2 - 2xy + \frac{1}{\varepsilon} y^2 \ge 0, \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2 \ge 2xy \ge xy$. Утверждение 1 доказано.

Оценим $\left| \left(1 + |\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \mathrm{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right|$. Применим утверждение 1 для оценки, получим:

$$\begin{gathered} \left| \left(1 + |\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \mathrm{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right| \le \\ \le \left(1 + |\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} \left| \partial_t^{2k-2-j} u(0) \right| \left| \partial_t^j u(0) \right| \le \\ \le \left(1 + |\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} \left(\varepsilon \left| \partial_t^{2k-2-j} u(\xi, 0) \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right) \end{gathered}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon = \varepsilon_1 \left(1 + |\xi|^2\right)^{-m+qj+\frac{1}{2}q}$, где $q = \frac{2m}{2k-1}$, получим оценку

$$\begin{gathered} \left| \left(1 + |\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \mathrm{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right| \le \\ \le \sum_{j=0}^{k-2} \left(\varepsilon_1 \left(1 + |\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}} \left| \partial_t^{2k-2-j} u(\xi, 0) \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \left(1 + |\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right), \end{gathered} \tag{19}$$

где ε_1 – любое число.

Рассмотрим $\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right)$. Будем производить интегрирование по частям, пользуясь краевыми условиями (7):

$$\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right) = \int_0^d \partial_t^{2k-1-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)}dt = |\text{интегрируем по частям}| =$$
$$\overline{= \partial_t^{2k-2-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)}\Big|_0^d} - \int_0^d \partial_t^{2k-2-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-1-j}u(t)}dt = \left|\partial_t^{2k-2-j}u(t)\right|^2\Big|_0^d -$$
$$\overline{-\int_0^d \partial_t^{2k-1-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)}dt} = -\left|\partial_t^{2k-2-j}u(0)\right|^2 - \overline{\int_0^d \partial_t^{2k-1-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)}dt} =$$
$$= -\left|\partial_t^{2k-2-j}u(0)\right|^2 - \overline{\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right)},$$

Отсюда:

$$\left|\partial_t^{2k-2-j}u(0)\right|^2 = -2\mathrm{Re}\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right) = 2\left|\mathrm{Re}\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right)\right|. \tag{20}$$

Подставим (20) в (19):

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\mathrm{Re}\partial_t^{2k-2-j}u\,(0)\,\overline{\partial_t^j u\,(0)}\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{k-2}\left(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}\left|\mathrm{Re}\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right)\right| + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right) \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{k-2}\left(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}\left|\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right)\right| + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right).$$

Применяем для оценки первого слагаемого в правой части этого неравенства утверждение 1 и неравенство Коши – Буняковского, получим оценку:

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\mathrm{Re}\partial_t^{2k-2-j}u\,(0)\,\overline{\partial_t^j u\,(0)}\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{k-2}\left(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}\left(\varepsilon_2\left\|\partial_t^{2k-1-j}u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\partial_t^{2k-2-j}u\right\|^2\right) + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right).$$

Выберем в этом неравенстве $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{q}{2}}$, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\mathrm{Re}\partial_t^{2k-2-j}u\,(0)\,\overline{\partial_t^j u\,(0)}\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{k-2}\left(\begin{array}{c} 2\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{qj}\left\|\partial_t^{2k-1-j}u\right\|^2 + 2\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+q}\left\|\partial_t^{2k-2-j}u\right\|^2 + \\ +\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2 \end{array}\right). \tag{21}$$

Применим (21) и неравенство Эрлинга – Ниренберга в правой части неравенства (18), получим:

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \le$$
$$\le c\left(\|Au\|^2 + \varepsilon_2\left(\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right) + c(\varepsilon_2)\sum_{j=0}^{k-2}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right).$$

Выбирая достаточно малое $\varepsilon_2 > 0$, получим:

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \le c_1\left(\|Au\|^2 + \sum_{j=0}^{k-2}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right). \tag{22}$$

Заметим теперь, что в силу условия 3

$$|u\,(\xi,0)| = \left|\frac{\sum\limits_{|\tau|\le m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \partial_t^{j-1}u|_{t=0}}{\sum\limits_{|\tau|\le m_j} b_{\tau j}\xi^\tau}\right| \le c(1+|\xi|)^{-m_j}\left|B_j\,(\xi)\,u|_{t=0}\right| \le c\left|g_j(\xi)\right|.$$

Применяя это неравенство в (22), получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \le c\left(\|f\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-m_j-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|g_j\,(\xi)\right|^2\right).$$

Таким образом, доказана оценка (8) при $s = 2m$. Справедливость оценки (8) при $s > 2m$ доказывается методами, аналогичными методам работы [1]. Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть решение $v(x,t)$ задачи (1) – (3) принадлежит следующему пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\left(\mathbb{R}^n_d\right)$. Тогда функция $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$ при почти всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ и является решением задачи (5) – (7). Следовательно, в силу теоремы 3.1 для функции $u(\xi,t)$ справедлива оценка (8). Интегрируя эту оценку по $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, получим неравенство

$$\int\limits_{R^{n-1}} \|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}\,d\xi \le c\int\limits_{R^{n-1}}\left(\left(\begin{array}{c}\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}+\\ +\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-m_j-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|g_j(\xi)\right|^2\end{array}\right)\right)d\xi, \tag{23}$$

где $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}[F(x,t)]$, $g(\xi) = F_{x\to\xi}[G(x)]$.

Из неравенства (23) с помощью равенства Парсеваля получим справедливость априорной оценки (4) в теореме 2.1.

4. Схема доказательства теоремы 2.2. Утверждение теоремы 2.2 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть* $s \ge \max\left\{2m, \max\limits_{1\le j\le k}\left(m_j+\frac{2m(j-1)}{2k-1}\right)+\frac{m}{2k-1}\right\}$ *– целое число,* $m \ge 2k-1$ *– целое число. Пусть* $f(\xi,t) \in \tilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ *и выполнены условия 1 – 3, тогда для любых* $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ *существует единственное решение задачи (1) – (3), принадлежащее пространству* $\tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$.

Доказательство этой теоремы проводится сведением задачи (1) – (3) к нелокальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром, применением априорной оценки (4) из теоремы 2.1 и метода продолжения по параметру.

Список литературы

1. Баев А. Д. 1982. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы. Доклады Академии наук. 265(5): 1044–1046.

2. Баев А. Д. 2008. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Воронеж, Воронеж. гос. ун-т. 240.

3. Баев А. Д. 2008. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Доклады Академии наук. 422(6): 727–728.

4. Баев А. Д., Бунеев С. С. 2012. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. (1): 81–92.

5. Баев А. Д., Бунеев С. С. 2013. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Доклады Академии Наук. 448(1): 7–8.

6. Баев А. Д., Панков В. В., Харченко В. Д. 2018. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика. (4): 162–172.

7. Вишик М. И., Грушин В. В. 1969. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. Математический сб. 80(112,4): 455–491.

8. Вишик М. И., Грушин В. В. 1970. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы. Успехи математических наук. 25(4): 29–56.

9. Глушко В. П. 1979. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. ВИНИТИ. 1048(79): 47.

10. Панков В. В. 2019. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения. Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (28 января - 2 февраля 2019 г.): 199–203.

11. Панков В. В. 2019. Об априорной оценке решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXX» (3-9 мая 2019 г.): 220–224.

12. Панков В. В., Баев А. Д. 2020. Об априорной оценке решений одной краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения. Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXXI» (3-9 мая 2020 г.): 161–165.

13. Панков В. В., Баев А. Д. 2020. О корректности одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения. Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXXI» (3-9 мая 2020 г.): 154–158.

14. Панков В. В., Баев А. Д. 2020. О существовании решения одной краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения. Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXXI» (3-9 мая 2020 г.): 158–161.

References

1. Baev A. D. 1982. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory. [Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators]. Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics. 265(5): 1044–1046.

2. Baev A. D. 2008. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj. [Qualitative methods of the theory of regional tasks for the degenerating elliptic equations]. Voronezh: 240.

3. Baev A. D. 2008. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka. [On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations]. Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics. 422 (6): 727–728.

4. Baev A. D., Buneev S. S. 2012. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka. [A priori estimate of solutions of a boundary value problem in strip fordegenerate elliptic equations of high order]. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. (1): 81–92.

5. Baev A. D., Buneev S. S. 2013. Ob odnom klasse kraevyx zadach v polosedlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka. [On a class of boundary value problems in the band for degenerate high-order elliptic equations]. Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics. 448(1): 7–8.

6. Baev A. D., Pankov V. V., Harchenko V. D. 2018. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka. [On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation]. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. (4): 162–172.

7. Vishik M. I., Grushin V. V. 1969. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti. [Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain]. Matematicheskij sbornik – Sbornik: Mathematics. 80(112, 4): 455–491.

8. Vishik M. I., Grushin V. V. 1970. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory. [Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators]. Uspexi matematicheskix nauk – Russian Mathematical Surveys. 25(4): 29–56.

9. Glushko V. P. 1979. Apriornye ocenki resheniyj kraevyxzadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka. [A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate high-order elliptic equations]. VINITI. 1048(79): 47.

10. Pankov V. V. 2019. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya [An a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate elliptic equation]. Sovremennye metody teorii funkciyj i smezhnye problemy: materialy Mezhdunarodnoyj konferencii Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola (28 yanvarya–2 fevralya 2019): 199-203.

11. Pankov V. V. 2019. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka. [On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation]. Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoyj konferencii Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya XXX» (3-9 maya 2019): 220–224.

12. Pankov V. V., Baev A. D. 2020. Ob apriornoyj ocenke resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya. [On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem for a degenerate elliptic equation]. Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoyj konferencii Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya XXXI» (3-9 maya 2020): 161–165.

13. Pankov V. V., Baev A. D. 2020. O korrektnosti odnoj kraevoj zadachi v polose dlja vyrozhdajushhegosja jellipticheskogo uravnenija. [On correctness of a boundary value problem for a degenerate elliptic equation]. Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoyj konferencii Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya XXXI» (3-9 maya 2020): 154-158.

14. Pankov V. V., Baev A. D. 2020. O sushhestvovanii reshenija odnoj kraevoj zadachi dlja vyrozhdajushhegosja jellipticheskogo uravnenija. [On existence of a solution to a boundary value problem for a degenerate elliptic equation]. Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoyj konferencii Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya XXXI» (3-9 maya 2020): 158–161.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 25.01.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Панков Владимир Владимирович – ассистент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета

http://orcid.org/0000-0002-9695-5148
Университетская площадь, 1, Воронеж, 394018, Россия
E-mail: pankovfam@mail.ru

Шабров Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета

http://orcid.org/0000-0001-8549-5062
Университетская площадь, 1, Воронеж, 394018, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir Pankov – teaching assistant of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sergey Shabrov – PhD, Associate Professor, Head of the Division of Mathematical Analysis of the Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia