Если взять саму науку в целом как СС, то ядром-катализатором здесь является философия, что и закреплено в ее методологическом статусе для частных наук, поскольку она изучает наиболее общие закономерности природы, общества и мышления, ищет универсальные принципы их взаимосвязи. Кстати, на наш взгляд, сегодня уже не актуально такое деление действительности. Чтобы выполнить свою задачу, философия должна устанавливать предельно широкие и глубокие связи между явлениями, а это и означает ее максимально полное отражение действительности, ее сродство с ней. Следовательно, философия имеет те же свойства ядра-катализатора, как и ядра-катализаторы других систем и естественно, что ими должны характеризоваться интеллектуальные способности ученого-философа.

Итак, краткий анализ показал не только наличие общих свойств у катализаторов СС различной природы, но и наличие генетической преемственности в передаче и развитии этих качеств от химических ядер-катализаторов к биологическим и далее к социальным, т.е. имеет место единая, сквозная эволюционная линия развития ядра-катализатора в эволюции материи.

АНАЛИТИЧНЫ ЛИ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА?

Т.В. Носова

Настоящая статья посвящена исследованию проблемы аналитического и синтетического знания в логике и математике, а также его информативности. Исходной идеей автора является причинная зависимость между методом, посредством которого осуществляется доказательство, и аналитическим или синтетическим характером получаемого знания и самого доказательства, в силу чего в центре внимания окажутся методы анализа и синтеза.

Под анализом и синтезом будем понимать методы доказательства – способы рассуждения при обосновании истинности, основываясь на следующих их традиционных для математической науки трактовках: «Анализ есть путь, которым мы приходим от искомого, допущенного как данное, посредством последовательного заключения к тому, что допускается в синтезе. Ибо при анализе мы допускаем, что искомое как бы уже дано, рассматриваем то, что предшествует этому положению, и продолжаем отступать подобным образом, пока не натолкнемся на нечто уже известное или содержащееся в числе принятых начал; такого рода рассуждения, представляющие как бы некоторое распутывание, мы называем разрешением (анализом). При синтезе же, наоборот, то, что при анализе мы сделали последним, то именно предпосылаем мы, как уже совершившееся, и, то, что ему предшествовало, мы располагаем в естественном порядке и, соединяя одно с другим, наконец, выполняем построение искомого – это и называем мы составлением («синтезом»)» (Кеджори Ф. История элементарной математики. – Одесса, 1910. – С.73). Данное определение было дано в III в. до н.э. и являло собой уточнение дефиниции Евклида. Оно может также использоваться и сейчас, так как успешно описывает два основных, взаимодействующих метода геометрического (и других) доказательства. Это определение интересно еще и тем, что позволяет показать, что понимается под синтетическим характером геометрических доказательств, а также выявить различный смысл, вкладываемый в понятия «анализ», «синтез», «аналитическое» и «синтетическое» в геометрии и современной логике.

В приведенном определении анализ интерпретируется как метод, посредством которого осуществляется регресс к условиям, основаниям истинности принимаемого положения. Синтез же выступает прогрессивным методом, который движется от системы аксиом (или доказанных положений) через выведение из них следствий к доказываемому. Такое толкование проясняет вопрос, почему именно с синтезом стали впоследствии (Кант и другие) связывать получение нового знания, почему именно его рассматривали как метод открытия, обеспечивающий синтетический характер знания: как бы «забегая вперед», он позволяет ответить на вопрос, какие истинные утверждения будут следствиями из некоторой исходной системы принципов, тем самым расширяя круг последних.

Что представляет собой доказательство геометрических теорем в рамках принятой трактовки? Ход рассуждения в них имеет отправной точкой бесспорные истины (аксиомы), затем из них выводят следствия, после чего через соотнесение их с другими аксиомами или ранее доказанными теоремами выводится то, что нужно доказать. Очевидно, что доказательство осуществляется методом синтеза и в этом смысле они синтетичны. Синтез выступает здесь как некоторое суммирование уже известных положений для получения (обоснования) нового утверждения. Таким образом, геометрические теоремы синтетичны – они «построены» из аксиом и доказанных теорем, являясь результатом синтезирования в строгое, последовательное доказательство этих «бесспорных истин».

Следует заметить, что в современной логике «аналитичность» и «синтетичность» – неоднозначно толкуемые понятия. Так, синтетичность какого-либо доказательства, например, связывают с приращением информации в ходе доказательства: если информация, полученная в заключении, больше информации, заключенной в посылках, то такое доказательство считают синтетическим. Здесь стоит уточнить понятие «новая информация», так как его часто смешивают с понятием «новое знание», поскольку в истории философии существовала точка зрения, соединявшая синтетичность с получением нового знания. Однако речь идет о разных вещах и понятия эти следует различать. Объясним на примере дедуктивного рассуждения.

Пусть у нас есть некоторая совокупность теорем Г. Используя аксиомы и доказанные теоремы из этой совокупности, мы дедуктивным путем устанавливаем, что некоторая теорема А доказуема. Получили ли мы новое знание? Да, поскольку выяснили доказуемость теоремы А из совокупности Г, так сказать, узнали то, чего не знали раньше: о самой теореме А (что она доказуема) и о совокупности Г (в ней доказуема теорема А). Но получили ли мы при этом новую информацию? Нет, так как мы только эксплицировали то, что имплицитно содержалось в множестве Г. Мы не устанавливали существование новых объектов, не вводили в рассмотрение новых индивидов, мы оперировали только аксиомами и теоремами из Г. Значит, ничего принципиально нового мы не добавили к информации о множестве Г, только выявили ту информацию, которая неявно содержалась в нем (потенциально). Таким образом, дедуктивное доказательство (и геометрическое в частности) с точки зрения получения нового знания синтетично, а с точки зрения информативности – аналитично.

В последние десятилетия в логико-философской литературе появилась тенденция оспаривать «чистую» аналитичность даже аксиоматических доказательств (как в геометрии, так и в логике). Так, финский логик Я. Хинтикка выдвигает утверждение, что даже в строгом дедуктивном геометрическом доказательстве возможно появление «синтетических моментов», связанных с необходимостью дополнительных построений при доказательстве большинства теорем (Hintikka k.j.j. and Remes U. Ine method of analysis – Dordrecht-Boston Reidel, 1974. – С.125).

Этому же автору принадлежит идея о том, что логические доказательства тоже могут быть не «чисто» аналитичными, только в этом случае появление синтетических шагов в аналитическом выводе он связывает с введением в рассмотрение новых индивидов.

Концепция Я. Хинтикки представляет интерес еще и в силу того, что сам он оценивает ее как реконструкцию кантовского понимания аналитичности и синтетичности.

В своей статье «Анализ аналитичности» он рассматривает следующее определение аналитичности, называя его наиболее близким Канту: «Шаг доказательства аналитичен, если и только если он не вводит в рассмотрение новых индивидов» (Hintikka k.j.j. Logic, Language-Gamesand Information. Oxford, 1973. – С148). Это определение, по утверждению Хинтикки, вытекает из дефиниции Канта, которое представлено в следующем видоизмененном виде:

«Аналитическое рассуждение не может вести от существования одного индивида к существованию другого индивида (Кант)» (там же).

Следует по этому поводу заметить, что финский логик дает определение аналитичности не истины или суждения (как у Канта), а всего хода доказательства этой истины и даже отдельных шагов такого доказательства, заведомо предполагая, что если доказательство ведется без использования синтетических шагов, то полученная истина с необходимостью будет носить аналитический характер.

В какой мере можно считать адекватной такую интерпретацию Канта? По мнению Хинтикки, кантовская теория математического метода основывается на образцах Евклидовой геометрии.

Что значит доказать геометрическую теорему? Для доказательства теоремы даже элементарной геометрии, во-первых, нужно, чтобы условие теоремы было проиллюстрировано (или продемонстрировано) на чертеже, то есть общее утверждение должно быть в какой-то степени конкретизировано посредством введения единичного представителя общего понятия. Эта идея выделения единичного представителя общего понятия действительно есть у Канта, и даже более того, она определяет у него цель априорного синтеза «схемы» понятия. В этом смысле Хинтикка уловил суть кантовского понимания синтетических априори, но, с другой стороны, он явно вкладывает отличный от кантовского смысл в понятие «демонстрация». Для Хинтикки демонстрация общего понятия означает не что иное, как введение в рассмотрение единичного представителя этого общего понятия без какого-либо его наглядного представления. Для Канта же этот процесс всегда заключается в построении «схемы» понятия, «изображении» этого представителя в априорном созерцании, предъявлении его особым образом.

Вместе с тем, фигура, которую чертят, чтобы прояснить условие теоремы, часто сама по себе не дает ключа к доказательству и нуждается в некоторых дополнительных построениях. Анализ, понимаемый здесь как доказательство, не может быть успешным, если мы, помимо допущения истинности теоремы, не произведем достаточного количества дополнительных построений в чертеже (например, вспомним дополнительные построения в доказательстве теоремы Пифагора о сумме квадратов катетов. Само построение прямоугольного треугольника АВС еще никак не наводит на способ доказательства). Что же представляют из себя эти вспомогательные построения? Какова их роль в доказательстве?

Очевидно, что доказательство геометрической теоремы следует начинать с построения чертежа, иллюстрирующего, что дано. Но только ли поясняющую, иллюстративную роль выполняет чертеж? Хинтикка говорит, что такие построения дают ключи к доказательству. Возможно, они – те «леса», которые применяют при постройке здания и разбирают, когда работа закончена? Анри Пуанкаре дал хороший пример такой их, чисто вспомогательной, функции:

Возьмем для примера идею неправильной функции. Сначала это не что иное, как чувственный образ, след, начертанный мелом на черной доске. Мало-помалу идея очищается. Ею пользуются для построения сложной системы неравенств, воспроизводящей все линии примитивного образа. Когда построение закончено, кружала снимаются, как это делается после построения свода: то грубое представление, которое стало отныне бесполезным, исчезает, – остается лишь само здание, безупречное в глазах логика» (Пуанкаре А. Наука и метод. – Одесса, 1910. – С.159).

Может быть, построения нужны для того, чтобы увидеть цель издалека, чтобы понять, зачем осуществляются именно такие шаги доказательства? Каждый шаг выводится из предыдущего по логическим правилам, поэтому каждый переход кажется естественным. Но ясен и понятен только каждый переход в отдельности, а связь через два-три шага уже не столь очевидна. Другими словами, «можно ли, изучая слона под микроскопом, думать, что... достаточно познакомился с этим животным?.. То же самое в области математики. Когда логик разложил всякое доказательство на множество элементарных операций, вполне правильных, он еще не уловил реальности в ее целом; то неизвестное мне, что составляет единство доказательства, совершенно от него ускользнуло» (там же). При таком понимании вспомогательных конструкций роль их сводится к составлению некоторого плана или схемы доказательства, которая ясно поставит цель и наметит пунктиром путь к ней.

Вполне возможно рассматривать анализ чертежа и проведение дополнительных построений как инструмент поиска доказательства, как средстве выделения тех аксиом, которые перспективны при доказательстве. В этом случае анализ чертежа – необходимая первая стадия доказательства, хотя в само доказательство может и не войти. Следовало бы, вероятно, различать геометрическое доказательство как процесс, являющийся аналитико-синтетической процедурой, и собственно доказательство как результат этого процесса, состоящее из синтетических шагов. Хотя интерес здесь представляет именно первый этап процедуры – анализ построений, в силу того, что даже он может трактоваться как содержащий синтетические шаги. Подобная идея не чужда и Я. Хинтикке. В его работах можно встретить еще одно интересное определение аналитичности: «Шаг вывода аналитичен, если и только если информация, содержащаяся в заключении, не превышает информацию, заключенную в посылках (Logic, Language-games… – С.148). Как нам представляется, именно эта дефиниция значительно в большей степени соответствует кантовской трактовке». Предикат В принадлежит субъекту А как нечто содержащееся (в скрытом виде) в этом понятии А... я называю суждение аналитическим» (Кант И. Критика чистого разума. – М., 1994. – С.37), – пишет Кант. Кроме того, данное определение целесообразно сопоставить с приведенным ранее, где аналитичность толкуется как невведение в рассмотрение новых индивидов. Вероятно, они некоторым образом связаны: увеличение информации в ходе доказательства («синтетичность» последнего) автор соотносит с введением в рассмотрение новых индивидов. Возникает вопрос: само ли введение таких индивидов дает приращение информации? Хинтикка прямо не дает ответа на этот вопрос, но склоняется к тому, что синтетичность доказательства (в смысле увеличения информации) обусловливается процессом поиска индивидов, которые нужно ввести в рассмотрение. Именно человеческая деятельность, акт творчества в процедуре поиска необходимых вспомогательных объектов, по Хинтикке, придают доказательству синтетический характер. Вводимые в рассмотрение индивиды – это «результаты деятельности сознания, без которой не может осуществляться познание объектов вне его мира... Эта деятельность есть деятельность поиска и нахождения» (там же. – С.98). Обращаясь к творческой деятельности познающего субъекта, финский философ наследует кантовскую традицию в гносеологии.

В целом можно согласиться и с концепцией Хинтикки, утверждающей возможную синтетичность логических доказательств. Аналитический метод тесно связан с синтетическим, тем более если под синтетичностью понимается творческая деятельность исследователя. Даже доказывая теоремы логики высказываний в аксиоматическом исчислении, мы часто сталкиваемся с необходимостью синтетического момента – выбором оптимальной подстановки. Более того, сам «отбор» нужных аксиом и аксиомных схем для доказательства теоремы может интерпретироваться как определенная синтетическая деятельность нашего сознания.

Рассмотренные концепты понятия «аналитичность» с необходимостью приводят к выводу: всякое обсуждение дихотомии аналитического и синтетического знания (в силу многозначности исходных терминов) должно предваряться строгими дефинициями употребляемых понятий, так как одно и то же рассуждение, доказательство, а в конечном счете полученное знание может быть в одном отношении аналитическим, а в другом – синтетическим. Так, доказательства логических теорем в секвенциальном исчислении с точки зрения используемого метода – безусловно аналитичны (ход рассуждения в них – образец евклидовского «распутывания»), а с точки зрения поиска доказательства – синтетичны, поскольку практически каждый шаг связан с поиском подстановки и творческими усилиями.

Как можно заметить, дихотомия аналитического и синтетического имеет достаточно широкую область определения: знание, истины, шаг доказательства, само доказательство в целом. Исследуя историю той или иной науки, можно прийти к выводу, что целые исторические эпохи преимущественно использовали один из названных методов, в силу чего носят синтетический или аналитический характер (классификация достаточна условна). В первую очередь имеется в виду период становления науки, в котором можно выделить два этапа: аналитический – процесс зарождения науки, первичное накопление фактического материала, когда важна не организация материала, а его фиксация и выяснение оснований, по которым фактические положения истинны; и синтетический этап – процесс систематизации знания, когда доминирует дедуктивное доказательство теоретических положений. Истинные положения, которые появляются благодаря анализу и принимаются за верные, на поздних этапах приобретают синтетический характер, будучи доказанными дедуктивно, посредством синтеза.

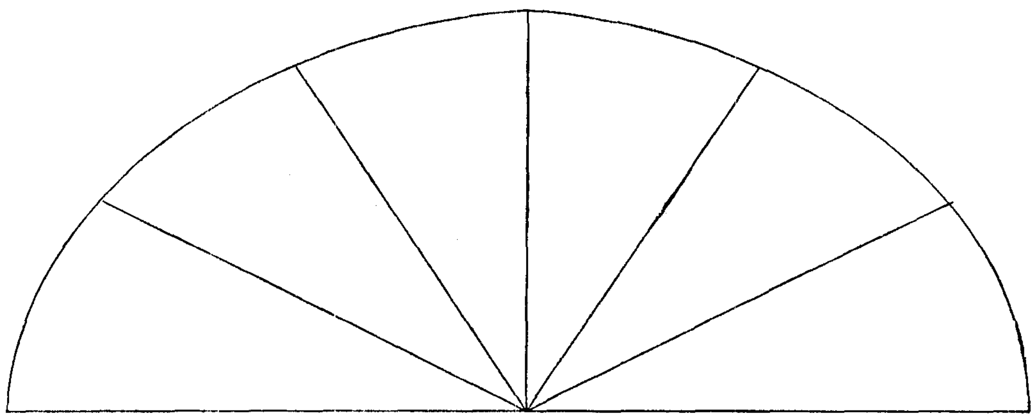
Рассмотрим характерные черты указанных этапов на примере становления геометрической науки.

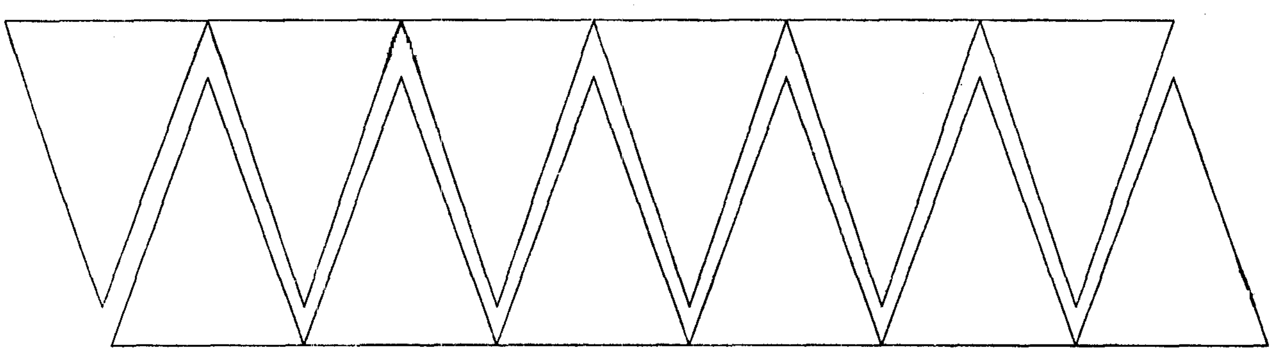
Первый этап, аналитический, был охарактеризован С.А. Богомоловым: «Каждая наука, даже самая отвлеченная, возникла под давлением известных жизненных потребностей, первые ее положения являются ответами на те вопросы, которые жизнь на каждом шагу ставит человеку; он отвечает на них как умеет, не особенно заботясь о строгости доказательства и о приведении своих знаний в систему» (Богомолов С.А. Эволюция геометрической мысли. – Л., 1928. – С.6). На этом этапе если и осуществляется какая-то классификация знаний, то она также является ответом на непосредственно практические запросы людей. По сути, данный период накопления фактов и знаний о явлениях окружающего мира с его примитивными экспериментами и явно выраженным практическим характером еще не является собственно наукой, это подготовительный этап создания научной системы, предыстория науки. Основные методы познания здесь – сравнение, измерение, индукция и анализ (только «бесспорными» истинами, к которым он восходит, часто оказываются фактические положения).

Второй этап, синтетический, отличается от первого тем, что в это время осуществляется систематизация накопленных знаний, посредством четких определений вводятся основные понятия науки (представляющие результат операций абстрагирования и идеализации), формируются основные законы, создается теоретическая часть науки. Теперь наука уже не является полностью подчиненной производственной деятельности людей, появляется потребность в развитии знания ради самого знания, в строгом обосновании принимаемых положений. Собственно говоря, именно на этой ступени рождается наука как система аксиом и постулатов и доказываемых следствий из них.

Геометрию иногда рассматривают как науку, включающую два смысла: геометрия как физика и геометрия как математика, причем отмечается, что сначала она сложилась в первом смысле, а позже приобрела характерные черты математики. Очевидно, что речь идет о периодизации, совпадающей с нашей и также отражающей процесс становления науки.

Период накопления первичных геометрических знаний, безусловно, имел место у всех народов, но особенно бурно он протекал на Древнем Востоке – в Вавилоне и Египте. Зарождение и развитие геометрии тесно связано с тем, что люди вынуждены были постоянно решать землемерные астрономические задачи, и т.д. Геометрические знания были просто механической суммой никак не связанных между собой фактов, являвшихся результатом наблюдений, простейших манипуляций с предметами природы в результате практики. Однако уже в ходе практических вычислений люди должны были научиться абстрагированию от ряда свойств реально существующих предметов: при измерении отрезков не учитывалась ширина измерительной палки, при распределении земельных участков нужно было отвлекаться вообще от всех свойств, кроме длины и ширины, и т.п. Так появляются первые абстракции – число, прямая, точка, поверхность и другие. Для обоснования истинности высказываний о фактах чаще всего прибегали к индукции, аналогии, в основе которых лежала интуиция, поскольку это были едва ли не единственные способы аргументации. Подтверждение такие высказывания получали на «интуитивно понятных» чертежах – иллюстрациях. Известен, например, такой факт, что индусский математик Ганеши, доказывая, что площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус, просто изобразил это доказательство на двух чертежах:





Ход его рассуждения, вероятно, был следующим: для параллелограмма вопрос о площади решен. Если бы удалось связать с ним круг, можно было бы установить площадь круга. Задача свелась к поиску промежуточного звена: выражению круга через параллелограмм, которая и была решена посредством рисунка. Таким образом, Ганеши показал наглядно, каким образом, в силу чего можно вычислить площадь круга.

По мере того, как происходило развитие градостроительства, мореплавания, возникает насущная необходимость в дальнейшем развитии геометрии, так как элементарные приемы непосредственного наблюдения и доказательства с обращением к интуиции не могли уже решить тех проблем, которые ставила перед геометрией жизнь. Центр математической культуры к тому времени переместился в Грецию. Изучая труды древнегреческих математиков, можно проследить, как постепенно изменялся характер геометрической науки – из чисто прикладной геометрия становится все более отвлеченной, абстрактной. Изменяется содержание доказываемых положений, вместе с тем, появляются и новые методы доказательства – все еще наряду с интуитивным обоснованием видную роль начинают играть полная индукция и дедуктивные рассуждения (принципы которых позже и сформулировал Аристотель). В трудах геометров школы Фалеса, пифагорейцев, софистов осуществляется первая попытка систематизации накопленных геометрических знаний, уже известные (и новые) положения формулируются в более общем виде. Так, например, доказательство положения о равенстве углов треугольника 180 градусам первоначально проводилось отдельно для равносторонних, равнобедренных и разносторонних треугольников, теперь посредством проведения в любом треугольнике линии, параллельной его основанию, это положение стали доказывать для всех видов треугольников. Большим достижением геометрической мысли было также открытие Пифагором иррациональных чисел, ибо оно явилось едва ли не первым результатом чисто отвлеченной мысли.

В это время развиваются и собственные конкретные методы геометрии как математики: Антифону принадлежит честь открытия и разработки метода истощения, посредством которого пытались решить задачу о квадратуре круга; Зенон разрабатывает метод сведения к абсурду, Платон ставит задачу о строго логическом обосновании геометрии (и вводит определение метода анализа). Это уже фактически переходный этап к синтетическому периоду становления геометрии. Аристотелем, наконец, формулируются принципы построения математической науки. Требования, предъявляемые им к науке, состояли в следующем: наука должна представлять собой совокупность предложений, расположенных в определенном порядке; среди этих предложений выделяются два вида – основные (исходные) положения и выводимые из них (теоремы); понятия, которые входят в эти положения, также должны составлять два класса – исходные (не требующие определений) и производные. Как можно видеть, к III веку до н. э. геометрическая наука в Греции достигла достаточно высокого уровня абстракции и разработанности методов, что и обеспечило наступление синтетического, то есть дедуктивно оформленного этапа ее развития: появление системного и научного изложения геометрии в «Началах» Евклида.

Евклидом был теоретически переработан и приведен в систему весь накопленный к IV веку до н.э. материал по геометрии. В своих «Началах» он стремился построить науку геометрию так, как того требовали принципы Аристотеля – как науку умозрительную, не апеллирующую в доказательствах к интуиции и фактическим аргументам. Это ему не удалось выполнить в полном объеме, но его труд – это первое изложение геометрии, построенной на логических требованиях создания науки. Евклид стремился строить геометрию только геометрическими средствами, полностью исключая из нее «чужеродные элементы» – числовые соотношения. Все положения, доказываемые в «Началах», разделены на два вида – первоначальные или основные (постулаты и аксиомы, которые не требуют доказательства) и производные (доказываемые на основе первых – теоремы, задачи). Понятия также делятся на основные и производные. Каждая из 13 книг «Начал» начинается с определений понятий. Доказательства предложений (теорем и конструктивных задач) даются по единой схеме; аргументами доказательства (его посылками) служат аксиомы, постулаты, определения, ранее доказанные предложения.

Отметим, что в формулировке и доказательстве постулатов и теорем Евклид использует уже не только понятия, являющиеся результатом абстракции, такие как точка, прямая, окружность и т.д., но и понятия, являющиеся результатом процесса идеализации для определения параллельности. Он, например, прибегает к понятию бесконечного продления прямых, бесконечность хотя и не определяется в книгах Евклида, но активно используется в аксиомах и при доказательстве.

Нужно сказать, что несмотря на все значение и огромную роль евклидовских «Начал» для развития геометрии, в этой работе были и определенные недостатки, как-то: многие определения настолько туманны и бессодержательны, что даже в самих «Началах» они только формулируются, но нигде не используются; в то же время используются такие понятия, которые не были определены (например, «лежать на»), не выполняется иногда и логическое требование к доказательству, чтобы в доказательстве использовались только аксиомы или доказанные ранее теоремы. В доказательстве положения о возможности построить на ограниченной прямой равносторонний треугольник не обосновывается факт пересечения двух окружностей (ведь для этого нужна аксиома непрерывности). Таким образом, система аксиом и постулатов у Евклида не была полной, что вполне объясняется уровнем развития науки, в силу чего в ряде доказательств обоснование положений является не строгим, а представляет собой смесь логики и интуиции.

Итак, на примере геометрической науки было прослежено, как осуществляется становление науки посредством перехода от аналитического этапа к синтетической стадии. Относительно дальнейшего развития науки можно сказать, что оно осуществляется благодаря обоим методам – анализу и синтезу. Причем процесс доказательства какого-либо положения (в частности, тех же геометрических теорем) складывается, во-первых, из анализа условий (что возможно назвать и поиском доказательства) и, во-вторых, собственно синтезирования «бесспорных» аргументов в строгое дедуктивное доказательство. В некоторых, достаточно редких, случаях эти два момента могут сливаться в один (доказательства в секвенциальном исчислении, например).

На основе проанализированного материала можно сделать следующий вывод: если процесс поиска доказательства рассматривать как предварительную, самостоятельную процедуру, не включаемую в доказательство, то собственно логико-математические доказательства являются синтетическими, так же как на настоящий момент те теоремы геометрии, доказательство которых предъявлено и сами они включены в дедуктивную основу науки как следствия ее основных положений.

Таким образом, идея зависимости характера истины от аналитического или синтетического метода ее получения эффективна и при рассмотрении геометрических и логических доказательств в целом, кроме того, она позволяет выявить и объяснить превращение аналитического знания в синтетическое в истории науки.