Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, №1. С. 33–39.

УДК 517.946
MSC 35K65

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-33-39

ПРОСТРАНСТВО H_p РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Т. В. Капицына

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым*)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
Москва, 111250, Россия

E-mail: KapitsynaTV@mpei.ru

Аннотация. В цилиндре Q, основание которого ограничено ляпуновской поверхностью, рассматривается параболическое уравнение второго порядка, вырождающееся по касательным направлениям к границе основания. Для решений этого уравнения по аналогии с эллиптическим случаем вводится класс H_p. Установлен критерий принадлежности функций этому классу. Приводятся условия однозначной разрешимости задачи с граничными и начальными условиями, понимаемыми в смысле L_p.

Ключевые слова: вырождающиеся параболические уравнения, второй порядок, граничные значения в смысле L_2, ляпуновская граница, начальные и краевые условия

Для цитирования: Капицына Т. В. 2022. Пространство H_p решений вырождающихся параболических уравнений. Прикладная математика & Физика. 54(1): 33–39. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-33-39

THE SPACE H_p OF SOLUTIONS OF DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS

Tatyana Kapitsyna

(*Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov*)

National Research University «Moscow Power Engineering Institute»,
Moscow, 111250, Russia
E-mail: KapitsynaTV@mpei.ru

Received February, 26, 2021

Abstract. Considered a second-order parabolic equation in the cylinder Q whose base is bounded by the Lyapunov surface. It is assumed that this equation is degenerated with respect to tangential directions to $\partial\Omega$. The class H_p is introduced for solutions of the equation analogously to elliptic case. The criterion of belonging of functions to this class is established. The conditions of unique solvability of the problem with boundary and initial conditions, understood in the sense of L_p, are given.

Key words: degenerate parabolic equations, second order, boundary values in the sense of L_2, Lyapunov boundary, initial and boundary conditions

For citation: Kapitsyna T. V. 2022. The space H_p of solutions of degenerate parabolic equations. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 33–39. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-33-39

Пусть Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^n$, граница которой принадлежит классу $C^{1+\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. Рассмотрим в цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ параболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u = f \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами $a_{ij}, a_i \in C^1(\overline{Q})$ и $a_0 \in C(\overline{Q})$. Условие параболичности заключается в том, что квадратичная форма

$$\langle a(x,t)\xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j$$

положительно определена во всех точках цилиндра, т. е.

$$\langle a(x,t)\xi, \xi \rangle \geq \gamma(x,t)$$

с некоторой положительной непрерывной функцией $\gamma(x,t)$. Эта квадратичная форма может вырождаться, т. е. $\gamma(x,t) \to 0$ при $(x,t) \to \partial\Omega \times (0,T)$. Однако, будем предполагать, что существует такая постоянная $\gamma_0 > 0$, что

$$\langle a(x,t)\nu(x), \nu(x)\rangle \geq \gamma_0,$$

где $\nu(x)$ означает единичную внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω. Таким образом, на боковой поверхности цилиндра допускается вырождение трикомовского типа.

Как известно [2], под обобщенным решением уравнения (1) понимается функция $u \in W^{1,0}_{p,loc}(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \left[-u\eta_t + \langle a\nabla u, \nabla\eta\rangle + \left(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\right)\eta + a_0\eta \right] dxdt = \int\limits_Q f\eta dxdt. \tag{2}$$

В дальнейшем удобнее вместо расстояния $r(x)$ от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ пользоваться специальной функцией $\rho(x)$, которая определяется как решение задачи Дирихле

$$\Delta\rho = -1, \quad \rho\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

в области. Хорошо известно [3], что эта функция принадлежит классу $C^{1+\lambda}(\overline{\Omega})$ и эквивалентна расстоянию $r(x)$, т. е. существует такая постоянная $\gamma_1 > 0$, что для всех $x \in \Omega$ выполняются неравенства

$$\gamma_1^{-1} r(x) \leq \rho(x) \leq \gamma_1 r(x).$$

При этом для ее вторых производных справедлива оценка

$$\left|\rho_{x_i x_j}\right| \leq \frac{C(\lambda')}{[r(x)]^{1-\lambda'}}, \quad 0 < \lambda' < \lambda,$$

с некоторой постоянной $C = C(\lambda')$. Кроме того, в силу леммы Жиро [4]

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} < 0. \tag{3}$$

В дальнейшем удобно предполагать, что функция ρ продолжена нечетным образом за границу области $\partial\Omega$ на все пространство $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса C^1.

Для достаточно малых $\delta > 0$ рассмотрим семейство подобластей $\Omega_\delta = \{x \in \Omega,\ \rho(x) > \delta\}$, которые в силу эквивалентности $\rho(x) \sim r(x)$ сходятся к Ω при $\delta \to 0$. При этом граница $\partial\Omega_\delta$ совпадает с поверхностью уровня $\rho = \delta$. Зафиксируем точку $x^0 \in \partial\Omega$ с нормалью $\nu^0 = \nu(x^0)$ и рассмотрим в окрестности этой точки замкнутой области $\overline{\Omega}$ локальную систему координат $y = (y_1, \dots, y_n) = (y', y_n)$ с началом в точке x^0, в которой ось y_n направлена вдоль нормали ν^0. Функцию $(\rho(x) - \delta)$ в этих локальных координатах обозначим $R(\delta, y', y_n)$. Поскольку

$$\left.\frac{\partial}{\partial\nu^0}[\rho(x) - \delta]\right|_{x^0} = \left.\frac{\partial R}{\partial y_n}\right|_{(\delta,0,0)},$$

на основании (3) не ограничивая общности можно считать, что

$$\frac{\partial R}{\partial y_n} < 0$$

всюду в рассматриваемой окрестности точки x^0.

Поэтому по теореме о неявной функции существуют такие положительные числа δ_0, r_0, s_0 и функция $\varphi(\delta, y') \in C^{1+\lambda}([0,\delta_0] \times \{|y'| \leq r_0\})$, по модулю не превосходящая s_0, что

$$B(x^0) = \overline{\Omega} \cap (\{|y'| \leq r_0\} \times \{|y_n| \leq s_0\})$$

является замкнутой областью, в которой при $0 \leq \delta \leq \delta_0$ уравнение $R(\delta, y', y_n) = 0$ запишется в форме $y_n = \varphi(\delta, y')$. Уменьшая при необходимости параметры r_0 и δ_0, можем таким образом считать, что при $0 \leq \delta \leq \delta_0$ пересечение $B(x^0) \cap \partial\Omega_\delta$ представляет собой поверхность $\Gamma_\delta(x^0)$, которая описывается уравнением $y_n = \varphi(\delta, y')$, $|y'| \leq r_0$. При $\delta = 0$ символ нуль в обозначениях опускаем: $\Omega_0 = \Omega$ и $\Gamma_0(\delta) = \Gamma(\delta)$.

В локальной системе координат отображение $(y', \varphi(0, y')) \to (y', \varphi(\delta, y'))$ осуществляет диффеоморфизм $\Gamma(x^0) \to \Gamma_\delta(x^0)$ класса $C^{1+\lambda}$. В исходной системе координат его обозначим $x \to x_\delta$, геометрически это отображение представляет собой проектирование вдоль направления ν^0 поверхности $\Gamma(x^0)$ на $\Gamma_\delta(x^0)$.

Обратимся к уравнению (1) и опишем условия, накладываемые на его правую часть f. С этой целью введем пространство $L_{p,1}$, полученное замыканием класса $C^\infty(\overline{Q})$ по норме

$$|f| = |f|_{L_2(\Omega_{\delta_0}\times[\delta_0,T])} + \int_0^{\delta_0} t|f|_{L_p(\partial\Omega_t\times[t,T])}dt + \int_0^{\delta_0}\left[\int_Q |f[x,t]|^p r(x)dx\right]^{1/2} dt,$$

где предполагается $\delta_0 < T$. Введем еще пространство $L_p(Q,\rho)$, полученное замыканием класса $C^\infty(\overline{Q})$ по норме

$$|f| = \left(\int_Q |f(x)|^2\rho(x)dx\right)^{1/2}.$$

Функцию f в правой части уравнения (1) и тождества (2) будем предполагать принадлежащей пространству $L_{p,1}$.

Обозначим $H_p(Q)$ класс всех функций $u \in W^{1,0}_{p,loc}(Q)$, для которых величины

$$M_\delta(u) = \int_\delta^{T'}\int_{\partial\Omega_\delta} |u|^p dxdt + \int_{\Omega_\delta} |u(x,\delta)\rho(x)dx, \quad 0 < \delta \le \delta_0 \tag{4}$$

равномерно ограничены при любом фиксированном $T' \in (\delta_0, T)$.

Введенное понятие класса H_p применительно к эллиптическим уравнением обобщает классическое определение для аналитических и гармонических функций. В работах В. П. Михайлова и А. К. Гущина ([4] при $p = 2$) и [1] в общем случае $p > 1$) для областей класса C^2 было получено необходимое и достаточное условие принадлежности функции u классу H^p. Оно заключается в конечности интеграла

$$\int_\Omega \rho(x)|u|^{p-2}|\nabla u|^2 dx. \tag{5}$$

Позднее этот факт был распространен И. М. Петрушко [5, 6] на случай областей с ляпуновской границей. Применительно к параболическим уравнениям в работе [7] это условие сводится к конечности интеграла

$$\int_0^{T'}\int_\Omega \rho(x)(|u|^{p-2}|\nabla u|^2)(x,t)dxdt$$

для любого $T' < T$. Некоторые специальные случаи вырождающихся эллиптических и параболических уравнений также охвачены в работах И. М. Петрушко [8] и И. М. Петрушко, Т. В. Капицыной [9].

В данной работе указанные результаты распространим на более общий случай вырождающегося уравнения (1). Отметим, прежде всего, что в силу параболичности уравнения (1) в цилиндре Q имеет место следующее предложение.

Лемма 1. *Пусть $u(x,t) \in W^{1,0}_{p,loc}(Q)$ является обобщенным решением уравнения* (1) *с правой частью $f \in L_{p,loc}(Q)$. Тогда для любых $0 \le \delta \le \delta_0 < T' < T$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} |u(x,T')|^p(\rho(x)-\delta)dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega_\delta} |u(x,\delta)|^p(\rho(x)-\delta)dx + \\
&\quad + (p-1)\int_\delta^{T'}\int_{\Omega_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}|u|^{p-2}(\rho(x)-\delta)dxdt - \delta|u|^p\sum_{i=1}^n a_i(a_i(\rho-\delta))_{x_i}dxdt - \\
&\quad - \frac{1}{p}\int_\delta^{T'}\int_{\partial\Omega_\delta}\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}\right)|u|^p dsdt - \frac{1}{p}\int_\delta^{T'}\int_{\Omega_\delta}\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}|u|^p dxdt + \\
&\quad + \int_\delta^{T'}\int_{\Omega_\delta} a|u|^p(\rho-\delta)dxdt = \int_{\theta(\delta)}^{T'}\int_{\Omega_\delta} fu|u|^{p-1}\operatorname{sgn}u(\rho-\delta)dxdt.
\end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство этой леммы с некоторыми незначительными изменениями осуществляется аналогично лемме 1 из [7] и потому опускается.

Теорема 1. *Пусть функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{p,loc}(Q)$ является обобщенным решением уравнения (1) с правой частью $f \in L_{p,1}(Q)$. Тогда и принадлежит классу H_p тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{\Omega} |u(x,T')|^p \rho(x)dx + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} r(x) dxdt < \infty.$$

Доказательство. Обозначим через

$$M_\delta(u) = \max_{0\le\mu\le\delta_0} \left[\int\limits_{\delta}^{T'} \int_{\partial\Omega_\mu} |u|^p dsdt + \int\limits_{\Omega_\mu} |u(x,\mu)|^p (\rho-\mu)dx \right] \tag{7}$$

$$N_\delta(u) = \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} (\rho-\delta) dxdt + \int\limits_{\Omega_\delta} |u(x,T')|^p (\rho-\delta)dx. \tag{8}$$

Утверждается, что для любого $\delta, \in (0,\delta_0]$ и для любого $T' \in (T/2, T)$ справедливы оценки

$$\max_{0\le\mu\le\delta_0} M_\delta(u) + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} |u|^p (\rho-\delta) dxdt \le C_2 \left\{ ||f||^p_{L_{1,loc}(Q)} + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} \frac{|u|^p}{(\rho-\delta)^{1-\lambda'}} dxdt + N_\delta(u) \right\}; \tag{9}$$

$$N_\delta(u) + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} |u|^p (\rho-\delta) dxdt \le C_3 \left\{ ||f||^p_{L_{1,loc}(Q)} + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} \frac{|u|^p}{(\rho-\delta)^{1-\lambda'}} dxdt + M_\delta(u) \right\} +$$
$$+ ||f||^p_{L_{1,loc}(Q)} \left[N_\delta^{(p-1)/p}(u) + \left(\int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} |u|^p (\rho-\delta) dxdt \right)^{(p-1)/p} \right]. \tag{10}$$

В самом деле, введем обозначение

$$M^+_\delta(u) = \max_{0\le\mu\le\delta_0} M_\mu(u).$$

Так как

$$\int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} |f||u|^p (\rho-\delta) dxdt \le \left[(M_\delta(u))^{(p-1)/p} + \|u\|^{(p-1)/p} L_p(\Omega_{\delta_0} \times (\delta_0, T')) \right] \|f\|_{L_{p,1}(Q)}, \tag{11}$$

то из (9) имеем

$$M^+_\delta(u) \le C_1 \{ \left[(M_\delta(u))^{(p-1)/p} + \|u\|^{(p-1)/p} L_p(\Omega_{\delta_0} \times (\delta_0), T') \right] ||f||_{L_{p,1}(Q)} +$$
$$+ N_\delta(u) + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} \frac{|u|^p}{(\rho-\delta)^{1-\lambda'}} dxdt \}.$$

Следовательно,

$$M^+_\delta(u) \le C_4 \left\{ ||f||^p_{L_{p,1}(Q)} + N_\delta(u) + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} \frac{|u|^p}{(\rho-\delta)^{1-\lambda'}} dxdt \right\}, \tag{12}$$

что и требовалось доказать.

Покажем далее, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ_2, зависящее от ε, что

$$\int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta / \Omega_{\delta_2}} \frac{|u|^p}{\rho^{1-\lambda'}(x)} dxdt \le \varepsilon \left[\|f\|^p_{L_{p,1}(Q)} + N_\delta(u) + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_{\delta_2}} \frac{u^p}{\rho^{1-\lambda'}(x)} dxdt \right]. \tag{13}$$

Действительно, воспользуемся неравенством

$$\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta/\Omega_{\delta_2}}\frac{|u|^p}{\rho^{1-\lambda'}(x)}\,dxdt\le C_0\left[\int\limits_{\Omega_\delta}^{\delta_0}\frac{d\mu}{\mu^{1-\lambda'}}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial\Omega_\mu}|u|^p dsdt+\int\limits_{\delta}^{\delta_0}\frac{d\mu}{\mu^{1-\lambda'}}|u(x,\mu)|^p dx\right]\le$$

$$\le\frac{C_0\delta_2^{\lambda'}}{\lambda'}\sup_{\delta<\mu<\delta_2}M(\mu)\le C_0\delta_2^{\lambda'}\left(\|f\|^p_{L_{p,1}(Q)}+N_\delta(u)+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_{\delta_2}}\frac{|u|^p}{\rho^{1-\lambda'}(x)}\,dxdt\right).$$

Выбирая $\delta_2=\varepsilon$ (и уменьшая ее, если нужно, чтобы $\delta_2<\delta_0$), в результате получим оценку (13). Очевидно, достаточность теоремы сводится к следующей оценке

$$M_\delta(u)+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}|u|^p(\rho-\delta)dxdt\le C_8\left(\|f\|^p_{L_{p,1}(Q)}+N_\delta(u)\right). \tag{14}$$

Для ее доказательства рассмотрим функцию $v(x,t)=u(x,t)e^{\lambda t}$, $\lambda>0$. Функция $v(x,t)$ является обобщенным из $W^{1,0}_{p,loc}(Q)$ решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}v_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i v_{x_i}+(a-\lambda)v=fe^{\lambda t}=f_1,$$

и, следовательно, для него справедливо равенство (см. лемму 1)

$$\frac{1}{p}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial\Omega_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}\right)|v|^p dsdt+\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_\delta}|v(x,\delta)|^p(\rho-\delta)dxdt+\lambda\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}|v|^p(\rho-\delta)dxdt=$$

$$=(p-1)\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}|v|^{p-2}(\rho(x)-\delta)dxdt+\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_\delta}|v(x,T')|^p(\rho-\delta)dx+$$

$$+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}\sum_{i=1}^{n}a_i v_{x_i}v_{x_j}|v|^{p-1}(\rho-\delta)dxdt+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}a|v|^p(\rho-\delta)dxdt-$$

$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}|v|^p dxdt+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}f|v|^{p-1}\operatorname{sgn}v(\rho-\delta)dxdt. \tag{15}$$

Из (14) легко следует неравенство

$$\frac{1}{p}M_\mu(v)+\lambda\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}|v|^p(\rho-\delta)dxdt\le C_9\left(\|f\|^p_{L_{p,1}(Q)}+N_\delta(v)+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_{\delta_2}}\frac{|v|^p}{\rho^{1-\lambda'}(x)}\,dxdt\right), \tag{16}$$

из которого, с учетом (11) – (13), вытекает

$$\frac{1}{p}M_\mu(v)+\lambda\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}|v|^p(\rho-\delta)dxdt\le C_9\left(\|f\|^p_{L_{p,1}(Q)}+N_\delta(v)+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_{\delta_2}}\frac{|v|^p}{\rho^{1-\lambda'}(x)}\,dxdt\right)\le$$

$$\le C_{10}\left(\|f\|^p_{L_{p,1}(Q)}+N_\delta(v)+C_{11}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_{\delta_2}}|v|^p(\rho-\delta)dxdt\right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p}M_\mu(v)+(\lambda-C_{12})\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Omega_\delta}|v|^p(\rho-\delta)dxdt\le C_{13}(\|f_1\|^p_{L_{p,1}(Q)}+N_\delta(v)).$$

Выбирая λ настолько малым, чтобы $\lambda - C_{12} > 1/2$ и, учитывая, что $u(x,t) = v(x,t)e^{-\lambda,t}$, получаем (14).

Что касается необходимости условия теоремы, то она легко получается из оценки

$$N_\delta(u) + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Omega_\delta} |u|^p (\rho - \delta) dxdt \le C(\|f\|^p_{L_{p,1}(Q)} + \|u\|^p_{L_p(\partial\Omega_\delta \times (\delta, T')} + \|u(x,\delta\|^p_{L_p(Q)}).$$

Заметим, что ограниченность первого слагаемого в правой части (4) можем выразить в следующей эквивалентной форме: для любой точки $x^0 \in \partial\Omega$ интегралы

$$\int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\Gamma(x^0)} |u(x_\delta, t)|^p dxdt$$

равномерно ограничены. Последнее обстоятельство позволяет ввести понятие обобщенных граничных значений.

По определению для заданной функции $\varphi \in L_p(\partial\Omega) \times [0,T]$ функция $u \in W^{1,0}_{p,loc}(Q)$ принимает обобщенное граничное значение φ (в смысле L_p) на боковой границе цилиндра Q, если для любой точки $x^0 \in \partial\Omega$ и для любого $T' < T$ имеет место предел

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\delta}^{T'} \left[\int\limits_{\Gamma(x^0)} |u(x_\delta, t) - \varphi(x,t)|^p dx \right] dt = 0.$$

Этот факт записываем в форме

$$u\big|_{\partial\Omega \times [0,T]} = \varphi. \tag{17}$$

Аналогично вводится и принятие начального условия

$$u\big|_{t=0} = u_0 \tag{18}$$

в смысле L_p с весом ρ. По отношению к заданной функции $u_0(x) \in L_p(\Omega, \rho)$ оно определяется условием

$$\lim_{\delta \to 0} |u(x,\delta) - u_0(x)|^p dx = 0.$$

Пользуясь теоремой 1, аналогично [7] можно установить однозначную обобщенную разрешимость рассматриваемой задачи.

Теорема 2. *При любых $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0,T))$, $u_0(x) \in L_p(Q,r)$ и любой $f(x,t) \in L_{p,1}(Q) \cap L_{p,loc}(Q)$ первая смешанная задача* (1), (17), (18) *имеет обобщенное из $W^{1,0}_{p,loc}(Q)$ решение. Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\max_{\delta \in (0,\delta_0]} [\|u\|^p_{L_p(\partial\Omega_\delta \times (\delta)} + \|u(x,\delta\|^p_{L_p(Q,r)}] + \int\limits_{\delta)}^{T'} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-r} r(x) dxdt +$$
$$+ \int\limits_{0}^{T'} \int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^p r(x) dxdt \le C[\|f\|^p_{L_{p,1}(Q)} + \|\varphi\|^p_{L_p(\partial\Omega_\delta \times (0,T))} + \|u_0\|^p_{L_p(Q,r)}].$$

Список литературы

1. Гущин А. К., Михайлов В. П. 1979. О граничных значениях в L_p, > 1, решений эллиптических уравнений. Математический сборник, 108(150): 3–21.

2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева П. И. 1967. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., Наука, 736.

3. Миранда К. 1957. Уравнения с частными производными из эллиптического типа. М., Изд-во иностранной литературы, 255.

4. Михайлов В. П. 1976. О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей. Математический сборник, 101(2): 163–188.

5. Петрушко И. М. 1982. О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей. Математический сборник, 119(161): 48–77.

6. Петрушко И. М. 1983. О граничных значениях в L_p, $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей. Математический сборник, 120(162): 569–588.

7. Петрушко И. М. 1984. О граничных и начальных условиях в L_p, $p > 1$, решений параболических уравнений. Математический сборник, 125(4), 489–521.

8. Петрушко И. М. 1999. О существовании граничных значений решений вырождающихся эллиптических уравнений. Математический сборник, 190(7): 41–72.

9. Петрушко И. М., Капицына Т. В. 2005. О первой смешанной задаче для вырождающихся параболических уравнений. Сборник «Неклассические уравнения математической физики», Новосибирск: 207–218.

References

1. Gushchin A. K., Mikhaylov V. P. 1979. O granichnykh znacheniyakh v L_p, $p > 1$, resheniy ellipticheskikh uravneniy [On the boundary values in L_p, $p > 1$, solutions of elliptic equations]. Matematicheskiy sbornik, 108(150): 3–21.

2. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva P. I. 1967. Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasi-linear equations of parabolic type]. M., Nauka, 736.

3. Miranda K. 1957. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi iz ellipticheskogo tipa [Partial differential equations of elliptic type]. M., Izd-vo inostrannoy literatury, 255.

4. Mikhaylov V. P. 1976. O granichnykh znacheniyakh resheniy ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s gladkoy granitsey [On the boundary values of solutions of elliptic equations in regions with a smooth boundary]. Matematicheskiy sbornik, 101(2): 163–188.

5. Petrushko I. M. 1982. O granichnykh znacheniyakh resheniy ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s lyapunovskoy granitsey [On the boundary values of solutions of elliptic equations in areas with a Lyapunov boundary]. Matematicheskiy sbornik, 119(161): 48–77.

6. Petrushko I. M. 1983. O granichnykh znacheniyakh v L_p, $p > 1$, resheniy ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s lyapunovskoy granitsey [On the boundary values in L_p, $p > 1$, of solutions of elliptic equations in domains with a Lyapunov boundary]. Matematicheskiy sbornik, 120(162): 569–588.

7. Petrushko I. M. 1984. O granichnykh i nachal'nykh usloviyakh v L_p, $p > 1$, resheniy parabolicheskikh uravneniy [On boundary and initial conditions in L_p, $p > 1$, solutions of parabolic equations]. Matematicheskiy sbornik, 125(4), 489–521.

8. Petrushko I. M. 1999. O sushchestvovanii granichnykh znacheniy resheniy vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy [On the existence of boundary values of solutions of degenerate elliptic equations]. Matematicheskiy sbornik, 190(7): 41–72.

9. Petrushko I. M., Kapitsyna T. V. 2005. O pervoy smeshannoy zadache dlya vyrozhdayushchikhsya parabolicheskikh uravneniy [On the first mixed problem for degenerate parabolic equations]. Sbornik «Neklassicheskiye uravneniya matematicheskoy fiziki», Novosibirsk: 207–218.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 26.02.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Капицына Татьяна Владимировна — старший преподаватель Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт»

http://orcid.org/0000-0002-7040-7370
ул. Красноказарменная, 14, Москва, 111250, Россия
E-mail: KapitsynaTV@mpei.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Tatyana Kapitsyna — senior lecturer, National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Moscow, Russia