Н. Г. КУЛАКОВ

СТРОЕНИЕ КЛАССА ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ

В настоящей заметке мы покажем, что множество всех функций с ограниченным изменением можно представить в виде суммы трех множеств. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ числовой прямой. Неотрицательное число $|f(b)-f(a)|$ называют изменением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через D разбиение отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$ с помощью произвольной системы точек

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Изменением $S_D(f)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ относительно разбиения D называют сумму ее изменений на всех частичных отрезках этого разбиения:

$$S_D(f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

Полной вариацией $V_a^b(f)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называют верхнюю грань изменений функции $S_D(f)$ относительно всевозможных разбиений D отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки:

$$V_a^b(f)=\sup_{(D)} S_D(f).$$

Функцию $f(x)$ называют функцией с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$, если ее полная вариация на этом отрезке конечна:

$$V_a^b(f)<+\infty.$$

Обозначим через R множество всех функций с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ и решим вопрос о строении этого множества.

Всякая постоянная функция на отрезке $[a, b]$ есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$. Обозначим через A_1 множество всех постоянных функций на отрезке $[a, b]$.

Всякая функция $f(x)$, монотонная на отрезке $[a, b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$ (см. [1], стр. 194). Через A_2 обозначим множество всех монотонных функций на отрезке $[a, b]$. Очевидно, что $A_1 \subset A_2$, но $A_1 \neq A_2$, т. е. A_1 есть правильная часть множества A_2.

Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле на отрезке $[a, b]$, если его можно разложить точками

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1} < c_k < \cdots < c_{m-1} < c_m = b$$

на конечное число частей

$$[a, b] = \sum_{k=1}^{m} [c_{k-1}, c_k]$$

так, чтобы на каждом частичном отрезке $[c_{k-1}, c^k]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ функция $f(x)$ была монотонна.

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Дирихле на отрезке $[a, b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$ (см. [1], стр. 197). Обозначим через A_3 множество всех функций, удовлетворяющих условию Дирихле на отрезке $[a, b]$. Легко видеть, что $A_2 \subset A_3$, но $A_2 \neq A_3$, т. е. A_2 образует правильную часть множества A_3.

Функция $f(x)$ называется кусочно-постоянной на отрезке $[a, b]$, если его можно разложить точками

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1} < c_k < \cdots < c_{m-1} < c_m = b$$

на конечное число частей

$$[a, b] = \sum_{k=1}^{m} [c_{k-1}, c_k]$$

так, чтобы на каждом интервале (c_{k-1}, c_k) $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$ функция $f(x)$ была постоянна.

Всякая функция $f(x)$, кусочно-постоянная на отрезке $[a, b]$ есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$. Обозначим через A_4 множество всех кусочно-постоянных функций на отрезке $[a, b]$. Легко видеть, что

$$A_1 \subset A_4, \text{ но } A_1 \neq A_4;$$
$$A_4 \subset A_3, \text{ но } A_4 \neq A_3,$$

и множества A_2 и A_4 пересекаются, причем разности $A_2 - A_4$ и $A_4 - A_2$ не пусты.

Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a, b]$, если его можно разложить точками

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1} < c_k < \cdots < c_{m-1} < c_m = b$$

на конечное число частей

$$[a, b] = \sum_{k=1}^{m} [c_{k-1}, c_k]$$

так, чтобы на каждом интервале (c_{k-1}, c_k) $(k = 1, 2, \ldots, m)$ функция $f(x)$ была монотонна.

Всякая функция $f(x)$, кусочно-монотонная ограниченная на отрезке $[a, b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$ (см. [1], стр. 198). Обозначим через A множество всех кусочно-монотонных ограниченных функций на отрезке $[a, b]$. Очевидно, что

$$A_3 \subset A, \text{ но } A_3 \neq A,$$

т. е. A_3 есть правильная часть множества A.

Итак, множество A, т. е. множество всех кусочно-монотонных ограниченных функций на отрезке $[a, b]$, имеет следующее строение:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A;$$
$$A_1 \subset A_2,\ A_1 \neq A_2;\ A_2 \subset A_3,\ A_2 \neq A_3;$$
$$A_1 \subset A_4,\ A_1 \neq A_4;\ A_4 \subset A_3,\ A_4 \neq A_3;$$
$$A_2 - A_4 \neq \Theta,\ A_4 - A_2 \neq \Theta;\ A_3 \subset A,\ A_3 \neq A.$$

Всякая функция $f(x)$, имеющая непрерывную производную на отрезке $[a, b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$. Обозначим через B_1 множество всех функций на отрезке $[a, b]$, имеющих непрерывную производную на $[a, b]$.

Всякая функция $f(x)$, имеющая ограниченную производную на отрезке $[a, b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$. Обозначим через B_2 множество всех функций на отрезке $[a, b]$, имеющих ограниченную производную на $[a, b]$. Легко видеть, что $B_1 \subset B_2$, но $B_1 \neq B_2$, т. е. B_1 есть правильная часть множества B_2.

Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию (α) на отрезке $[a, b]$, если она на $[a, b]$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt,$$

где функция $\varphi(t)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ в собственном смысле.

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (α) на отрезке $[a, b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$. Обозначим через B_3 множество всех функций, удовлетворяющих условию (α) на отрезке $[a, b]$. Нетрудно убедиться в том, что $B_1 \subset B_3$, но $B_1 \neq B_3$, т. е. B_1 есть правильная часть множества B_3 и разности $B_2 - B_3$ и $B_3 - B_2$ не пусты.

Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a, b]$, если существует такая константа $N>0$, что для любых двух точек $x', x'' \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')| \leqslant N|x''-x'|.$$

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица на отрезке $[a, b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$ (см. [2], стр. 94). Обозначим через B_4 множество всех функций, удовлетворяющих условию Липшица на отрезке $[a, b]$. Очевидно, что $B_2 \subset B_4$, но $B_2 \neq B_4$ и $B_3 \subset B_4$, но $B_3 \neq B_4$, т. е. B_2 и B_3 являются правильными частями множества B_4.

Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию (β) на отрезке $[a, b]$, если она на $[a, b]$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$f(x)=c+\int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема по Риману на $[a, b]$ в несобственном смысле.

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (β) на отрезке $[a, b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a, b]$ (см. [2], стр. 95). Обозначим через B_5 множество всех функций, удовлетворяющих условию (β) на отрезке $[a, b]$.

Если функция имеет неограниченную производную, то она не удовлетворяет условию Липшица (см. [3], стр. 251). Отсюда следует, что всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (β) на отрезке $[a, b]$, не удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$. Это означает, что множества B_4 и B_5 не пересекаются. Итак,

$$B_1 \subset B_2,\quad B_1 \neq B_2;\quad B_1 \subset B_3,\quad B_1 \neq B_3;$$
$$B_2 - B_3 \neq \Theta,\quad B_3 - B_2 \neq \Theta;$$
$$B_2 \subset B_4,\quad B_2 \neq B_4;\quad B_3 \subset B_4,\quad B_3 \neq B_4;$$
$$B_4 B_5 = \Theta.$$

Обозначим через B сумму множеств B_1, B_2, B_3, B_4, B_5:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5.$$

Множество A содержит непрерывные и разрывные функции, а множество B — только непрерывные функции. Нетрудно убедиться в том, что множества A и B пересекаются, причем разности $A - B$ и $B - A$ не пусты. Сумма $A + B$ представляет весьма обширный класс функций с ограниченным изменением. Обозначим через C множество всех функций с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$, не входящих в сумму $A + B$. Покажем, что множество C не пусто. С этой целью все рациональные числа r из интервала (a, b) представим в форме последовательности

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots,$$

и на отрезке $[a, b]$ рассмотрим следующую функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = a \text{ и } x = b, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{если } x = r_n \end{cases}$$

Применяя неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < M,$$

где M есть сумма сходящегося обобщенного гармонического ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, находим оценку:

$$S_D(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum \left| \frac{1}{p^2} - \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \text{или} \\ \frac{1}{q^2} \end{matrix} \right\} \right| \leqslant \sum \frac{1}{m^2} < M,$$

где

$$\frac{1}{m^2} = \max\left\{\frac{1}{p^2}, \frac{1}{q^2}\right\}.$$

Отсюда, переходя к верхней грани, получим:

$$\sup_{(D)} S_D(f) = V_a^b(f) \leqslant M,$$

т. е. $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$. Так как функция $f(x)$ разрывна и не кусочно-монотонна, то $f(x)$ не входит в сумму $A + B$. Следовательно, функция $f(x)$ принадлежит множеству C.

Таким образом, множество R всех функций с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ представимо в виде суммы трех множеств A, B и C:

$$R = A + B + C.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

[1]. П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Огиз — Гостехиздат, 1948.

[2]. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Гостехиздат, 1949.

[3]. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, Гостехиздат, 1933.