С. В. ДАНОВ

О ЗАКОНАХ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ВЕЩЕСТВА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В данной статье рассматриваются уравнения движения заряженной частицы вещества, движущейся во внешнем электромагнитном поле и доказывается, что если в этом случае не задавать начальных условий, тогда движение заряженной частицы превращается в движение ее континуума, который ведет себя подобно электромагнитным волнам, обладая волновыми свойствами, присущими частицам вещества в волновой механике де-Бройля-Шредингера. Для упрощения все расчеты в статье проведены в векторной или тензорной формах.

1. Классическая теория

Движение заряженной частицы в электромагнитном поле можно описать уравнениями движения Ньютона:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}], \tag{1,1}$$

каноническими уравнениями Гамильтона:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}\ \text{(a)},\quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}\ \text{(b)}, \tag{1,2}$$

сопряженными с ними уравнениями Гамильтона—Якоби:

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}\ \text{(a)},\quad \vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} = \nabla S\ \text{(b)}, \tag{1,3}$$

или уравнениями Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0. \tag{1,4}$$

Величины, входящие в уравнения Гамильтона и Лагранжа, определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi \ \text{(a)}, \quad H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi \ \text{(b)} \\ \vec{p} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} \ \text{(c)}, \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \ \text{(d)}. \end{aligned}\right\} \quad (1,5)$$

Внешнее электромагнитное поле, в котором движется заряженная частица, описывается уравнениями Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \ \text{(a)}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \ \text{(c)} \\ \operatorname{div}\vec{H} &= 0 \ \text{(b)}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \ \text{(d)}. \end{aligned}\right\} \quad (1,6)$$

Вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$, напряженности электромагнитного поля, через потенциалы $\vec{A}$ и φ выражаются по формулам:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi \ \text{(a)}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \ \text{(b)}. \qquad (1,7)$$

Потенциалы электромагнитного поля $\vec{A}$ и φ уравнениями Максвелла (1,6) и формулами (1,7) определены неоднозначно, т. к. замена $\vec{A}$ на $\vec{A}'$ и φ на φ' по формулам:

$$\vec{A} = \vec{A}' - \nabla f \ \text{(a)}, \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \ \text{(b)}, \qquad (1,8)$$

оставляет неизменными не только векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, но и уравнения Максвелла (1,6). Это свойство уравнений Максвелла называют градиентной инвариантностью. Чтобы избавиться от неоднозначности потенциалов $\vec{A}$ и φ, на них обычно накладывают условие Лорентца:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0 \qquad (1,9)$$

Подставляя сюда $\vec{A}$ и φ из градиентного преобразования (1,8), получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}' = \Box f = 0 \qquad (1,9a)$$

Условие $\Box f = 0$ всегда выполняется, т. к. $f(x, y, z, t)$ есть произвольная функция координат и времени, которая всегда может быть подобрана таким образом, чтобы это условие выполнялось. Из уравнений Максвелла (1,6) для плотности зарядов ρ, находящихся в рассматриваемом объеме пространства, вытекает уравнение неразрывности, или закон сохранения зарядов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \qquad (1,10)$$

Другие законы сохранения (энергии, импульса и др.), связанные с законами электродинамики, здесь рассматриваться не будут. Записанные выше основные уравнения электродирамики, описывающие движение заряженной частицы вещества во внешнем электромагнитном поле, будут подвергнуты исследованию с той целью, чтобы с их помощью установить, откуда появляются волновые свойства у частиц вещества. Задача ставится следующим образом. Воспользовавшись уравнением движения заряда (1,1) и не задавая начальных условий, установим, какие движения в этом случае будет описывать уравнение (1,1). Ясно, что решая уравнение движения (1,1), без заданных начальных условий, получим бесчисленное множество решений этого уравнения (для различных значений констант интегрирования), каждое из которых описывает движение данной заряженной частицы по вполне определенной траектории. Все эти решения, вместе взятые, описывают движение континуума экземпляров данной заряженной частицы вещества. Нас будет интересовать, по каким законам происходит движение этого континуума? Для того, чтобы решить данный вопрос, обратимся к уравнению движения Ньютона (1,1) и, не задавая для него начальных условий, преобразуем это уравнение следующим образом:

Воспользовавшись известными формулами из векторного анализа:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} \ \text{(a)}, \quad \operatorname{grad}\frac{\vec{v}^2}{2} = (\vec{v}\nabla)\vec{v} + [\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{v}] \ \text{(b)}, \qquad (1,11)$$

и введя следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = -mc^2 \ \text{(a)}, \quad \phi = \frac{\vec{v}^2}{2c^2} \ \text{(b)}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c} \ \text{(c)}, \\ &\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi \ \text{(d)}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \ \text{(e)}, \end{aligned}\right\} \qquad (1,12)$$

можем уравнения движения (1,1) записать так:

$$e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}] = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \varepsilon\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}, \vec{H}]. \qquad (1,13)$$

Отсюда видно, что между векторами $\varepsilon\vec{E}$ и $e\vec{E}$, а также между векторами $\varepsilon\vec{H}$ и $e\vec{H}$, наблюдается огромное сходство и это сходство не является чем-то внешним, т. к. эти векторы попарно совпадают между собой, в чем нетрудно убедиться следующим образом. При помощи уравнений (1,3в) и (1,5с) находим:

$$e\vec{H} = \varepsilon\vec{\boldsymbol{H}}. \tag{1,14}$$

Учитывая (1,14) и (1,13), находим:

$$e\vec{E} = \varepsilon\vec{\boldsymbol{E}}. \tag{1,15}$$

Если уравнения Максвелла (1,6) умножить на e, а затем в этих уравнениях заменить векторы $e\vec{E}$ и $e\vec{H}$ на векторы $\varepsilon\vec{\boldsymbol{E}}$ и $\varepsilon\vec{\boldsymbol{H}}$, в соответствии с (1,14) и (1,15), тогда получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} \text{ (a)}, \quad \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\gamma\vec{v} \text{ (c)} \\ \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{H}} &= 0 \text{ (b)}, \quad \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}} = 4\pi\gamma \text{ (d)}, \end{aligned}\right\} \tag{1,16}$$

в которых через γ обозначена скалярная величина:

$$\gamma = \frac{e}{\varepsilon}\,\rho. \tag{1,17}$$

Из (1,16) для скалярной величины γ получим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \operatorname{div}\gamma\vec{v} = 0. \tag{1,18}$$

Уравнения (1,16) подобны уравнениям Максвелла (1,6), но в отличие от этих последних уравнений, уравнения (1,16) описывают поле скоростей частиц континуума, т. к. векторы $\vec{\boldsymbol{E}}$ и $\vec{\boldsymbol{H}}$, входящие в эти уравнения, согласно формул (1,12д) и (1,12е) зависят только от скоростей $\vec{v}$ частиц континуума. Что касается величин $\vec{\boldsymbol{A}}$ и ϕ, введенных по формулам (1,12в) и (1,12с), то они для поля скоростей частиц континуума играют точно такую роль, как потенциалы $\vec{A}$ и φ для электромагнитного поля, а величина ε, введенная по формуле (1,12а), для скоростного поля континуума выполняет такую же роль, как заряд частицы e в электромагнитном поле.

Потенциалы $\vec{\boldsymbol{A}}$ и ϕ, скоростного поля частиц континуума, формулами (1,12д), а также уравнениями (1,16) определены неоднозначно, а с точностью до градиентного преобразования: замена $\vec{\boldsymbol{A}}$ на $\vec{\boldsymbol{A}}'$ и ϕ на ϕ', по формулам:

$$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} - \nabla\psi \text{ (a)}, \quad \phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \text{ (b)} \tag{1,19}$$

не меняет векторов $\vec{\boldsymbol{E}}$ и $\vec{\boldsymbol{H}}$ и оставляет инвариантными уравнения (1,16). Функция $\psi(x, y, z, t)$, входящая в градиентное преобразование (1,19), является произвольной функцией координат и времени. Ее всегда можно подобрать таким образом, что будет выполняться условие:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{A}=0, \qquad (1{,}20)$$

которое для скоростного поля частиц континуума играет роль аналогичную условию Лорентца (1,9) в электромагнитном поле. Подставляя в (1,20) значения величин $\vec{A}$ и ϕ из (1,19), получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{A}'=\Box\psi=0. \qquad (1{,}20a)$$

Условие (1,20a), как и условие (1,20), всегда выполняется в силу произвольности функции ψ, которую всегда можно подобрать таким образом, что она будет удовлетворять уравнению $\Box\psi=0$. Условию (1,20) можно дать совершенно иное обоснование. Учитывая, что в градиентном преобразовании (1,8) функция $f(x, y, z, t)$ является совершенно произвольной, положим ее равной:

$$f=\frac{c}{e}S. \qquad (1{,}21)$$

Подставляя этот результат в (1,8) получим:

$$\vec{A}'=\vec{A}-\nabla\left(\frac{c}{e}S\right)\ (a),\quad \varphi'=\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{e}S\right)\ (b). \qquad (1{,}22)$$

Условие Лорентца (1,9a) при помощи (1,22) запишется так:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{e}S\right)\right\}+\operatorname{div}\left\{\vec{A}-\nabla\left(\frac{c}{e}S\right)\right\}=0. \qquad (1{,}23)$$

Если учесть, что:

$$\left.\begin{aligned} H&=-\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{mv^2}{2}+e\varphi=-\varepsilon\phi+e\varphi\ (a),\\ \vec{p}&=\nabla S=m\vec{v}+\frac{e}{c}\vec{A}=-\frac{\varepsilon}{c}\vec{A}+\frac{e}{c}\vec{A}\ (b),\end{aligned}\right\} \qquad (1{,}24)$$

а затем умножить уравнение (1,23) на $\frac{e}{c}$, тогда получим условие (1.20).

Воспользовавшись формулой (1,24) и, учитывая (1,9) и (1,20), найдем:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{p}=0. \qquad (1{,}25)$$

Подставляя сюда $H=-\frac{\partial S}{\partial t}$ и $\vec{p}=\nabla S$, получим:

$$\Box S=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+\nabla^2 S=0. \qquad (1{,}26)$$

Применяя к этому уравению операции $\frac{\partial}{\partial t}$ и grad, получим уравнения:

$$\Box H = 0 \text{ (a)} \quad \Box \vec{p} = 0 \text{ (b)}. \tag{1.27}$$

Волновые уравнения для потенциалов $\vec{A}$ и ϕ получим из уравнений (1,16) обычным методом, что дает:

$$\Box \phi = -4\pi\gamma \text{ (a)}, \quad \Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\gamma\vec{v} \text{ (b)} \tag{1,28}$$

Учитывая, что $\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}$ из уравнения (1,28в), получим:

$$\Box \vec{v} = -4\pi\gamma\vec{v}. \tag{1,29}$$

Для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ волновые уравнения имеют следующий вид:

$$\Box \vec{E} = 4\pi\left(\nabla\gamma + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\gamma\vec{v})}{\partial t}\right)(a), \quad \Box \vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\gamma\vec{v}(b). \tag{1,30}$$

Если частицы континуума, двигавшиеся во внешнем электромагнитном поле, покидают пределы области, в которой действует внешнее поле, и продолжают далее двигаться в отсутствии этого поля, тогда в полученных выше уравнениях необходимо положить $\rho = 0$, а следовательно и $\gamma = 0$. В этом случае уравнения (1,30) для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ принимают следующий вид:

$$\Box \vec{E} = 0 \ (a), \quad \Box \vec{H} = 0 \ (b). \tag{1,31}$$

Это значит, что покинув пределы внешнего электромагнитного поля и продолжая двигаться в отсутствии его, частицы континуума не потеряют своих волновых свойств, т. к. все величины, при помощи которых описывается движение частиц континуума, такие как H, S, $\vec{p}$, $\vec{v}$, $\vec{A}$, ϕ, также будут удовлетворять однородным волновым уравнениям.

2. Релятивистская теория (трехмерный случай)

Здесь доказывается то же самое, что и в классической теории. Рассматриваются трехмерные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле и доказывается, что при заданных начальных условиях они описывают движение отдельного заряда, а при отсутствии начальных условий — движение континуума экземпляров заряженной частицы. Устанавливается, что континуум ведет себя подобно электромагнитным волнам и выводятся волновые уравнения для частиц континуума.

Движение любой из частиц континуума описывается уравнениями движения заданными в ньютоновой форме:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}], \tag{2,1}$$

в форме канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \ (a), \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \ (b) \tag{2,2}$$

и сопряженных с ними уравнений Гамильтона — Якоби:

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t} \ (a), \quad \vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} = \nabla S \ (b), \tag{2,3}$$

или в форме уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0. \tag{2,4}$$

Входящие в эти уравнения релятивистские величины определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{array}{l} L = -m_0 c^1 \sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi \ (a), \ \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} \ (c) \\ H = mc^2 + e\varphi = c\sqrt{m_0 c^2 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\varphi \ (b), \ S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt \ (d) \end{array}\right\} \tag{2,5}$$

Релятивистская масса m частицы определяется по формуле:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right), \tag{2,6}$$

а m_0 есть инвариантная масса покоя заряда. Движение заряженных частиц континуума происходит во внешнем электромагнитном поле, для которого имеют место уравнения Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ (a), \ \mathrm{div}\vec{H} = 0 \ (b), \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} \ (c),$$
$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \ (d) \tag{2,7}$$

здесь ρ — релятивная плотность зарядов, равная:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2,8}$$

а ρ_0 — инвариантная плотность зарядов. Из уравнений Максвелла (2,7) следует, что релятивистская плотность зарядов удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v} = 0. \tag{2,9}$$

Остальные законы сохранения нас не интересуют. Из уравнений Максвелла (2,7) для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вытекают следующие соотношения:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \ (a), \quad \vec{H} = \operatorname{rot} A \ (b). \tag{2,10}$$

Уравнениями Максвелла (2,7) и формулами (2,10) потенциалы $\vec{A}$ и φ определены неоднозначно: градиентное преобразование:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \nabla f \ (a), \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \ (b) \tag{2,11}$$

оставляет инвариантными не только векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, но и уравнения Максвелла (2,7). В силу произвольности функции $f(x, y, z, t')$, входящей в градиентное преобразование (2,11), ее всегда можно подобрать таким образом, что будет выполняться условие Лорентца:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{dt} + \operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{2,12}$$

Подставляя сюда $\vec{A}$ и φ из градиентного преобразования (2,11) и подчинив произвольную функцию f условию:

$$\Box f = 0 \tag{2,13}$$

получим уравнение:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}' = 0. \tag{2,14}$$

Для установления волнового характера движения частиц континуума обратимся к уравнению движения Ньютона (2,1), и умножив его на $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, получим следующее уравнение:

$$m_0\frac{d\vec{u}}{d\tau} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{e\vec{E}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}[\vec{u}, \vec{H}]. \tag{2,15}$$

Здесь $d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,dt$ — элемент собственного времени движущейся заряженной частицы континуума, а $\vec{u}$ — ее релятивистская трехмерная скорость, равная

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2,16}$$

Наряду с релятивистским трехмерным вектором скорости $\vec{u}$ будем пользоваться скалярной величиной u_0 равной:

$$u_0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2,17}$$

которая является временной компонентной релятивистской скорости. Обе величины $\vec{u}$ и u_0 связаны между собой условием:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{c} u_0, \qquad (2,18)$$

что непосредственно следует из формул (2,16) и (2,17). В дальнейшем мы также будем пользоваться вектором $\vec{a}$ и скаляром a_0, которые получаются из $\vec{u}$ и u_0 путем их деления на скорость света в вакууме с:

$$\vec{a} = \frac{\vec{u}}{c} = \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \text{ (a)}, \quad a_0 = \frac{u_0}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ (b)},$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}}{c} u_0 \text{ (c)} \qquad (2,19)$$

Непосредственные вычисления дают:

$$u_0^2 - \vec{u}^2 = c^2 \text{ (a)}, \quad a_0^2 - \vec{a}^2 = 1 \text{ } (b). \qquad (2,20)$$

Применяя к формулам (2,20) операцию grad, получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}\frac{u_0^2}{2} &= u_0 \operatorname{grad} u_0 = \operatorname{grad}\frac{\vec{u}^2}{2} = (\vec{u}\nabla)\vec{u} + [\vec{u}, \operatorname{rot}\vec{u}] \text{ (a)} \\ \operatorname{grad}\frac{a_0^2}{2} &= a_0 \operatorname{grad} a_0 = \operatorname{grad}\frac{\vec{a}^2}{2} = (\vec{a}\nabla)\vec{a} + [\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{a}] \text{ (b)} \end{aligned}\right\} \qquad (2,21)$$

Вычисляя производную от $\vec{u}$ по t получим:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{u} = c^2\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + \left(\frac{\vec{v}}{c}\nabla\right)\vec{a}\right\}. \qquad (2,22)$$

Умножая полученное выражениа на $m = m_0 a_0$, найдем:

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = m_0 c^2 a_0 \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + m_0 c^2 (\vec{a}\nabla)\vec{a}. \qquad (2,23)$$

Подставляя сюда из (2,21в) $(\vec{a}\nabla)\vec{a} = a_0 \operatorname{grad} a_0 - [\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{a}]$, получим:

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = -m_0 c^2 a_0 \left\{\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} - \operatorname{grad} a_0\right) + [\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{a}]\right\} \qquad (2,24)$$

Подставляя этот результат в уравнение движения (2,15), а затем сократив все на a_0, получим:

$$e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}] = m_0\frac{d\vec{u}}{dt} = -m_0 c^2\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} - \nabla a_0\right) -$$

$$- \frac{m_0 c^2}{c}[\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{a}]. \qquad (2,25)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = -m_0 c^2 \text{ (a)}, \quad \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - \nabla a_0 \text{ (b)}, \quad \vec{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \vec{a} \text{ (c)}, \tag{2,26}$$

тогда уравнения движения (2,25) запишутся так:

$$e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}] = m_0 \frac{d\vec{u}}{dt} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}} + \frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}, \mathbf{H}]. \tag{2,27}$$

Связь между векторами $\vec{H}$ и $\vec{H}$ найдем из формулы (2,5с), если применим к ней операцию rot и учтем при этом, что по (2,3в) $\operatorname{rot} \vec{p} = 0$, тогда получим:

$$e\vec{H} = \varepsilon \vec{\mathbf{H}}. \tag{2,28}$$

Связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{E}$ найдем из уравнений движения (2,27), если учтем при этом (2,28), тогда получим:

$$e\vec{E} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}. \tag{2,29}$$

Умножая уравнения Максвелла (2,7) на заряд частицы e и заменяя $e\vec{E}$ и $e\vec{H}$ на векторы $\varepsilon\vec{E}$ и $\varepsilon\vec{\mathbf{H}}$, получим уравнения для поля скоростей частиц континуума:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \text{ (a)}, \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{H}} = 0 \text{ (b)}, \quad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\gamma\vec{v} \text{ (c)},$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\gamma \text{ (d)} \tag{2,30}$$

где через γ обозначена скалярная величина равная:

$$\gamma = \frac{e}{\varepsilon}\rho = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \left(\gamma_0 = \frac{e}{\varepsilon}\rho_0\right) \tag{2,31}$$

Из уравнений (2,30) следует уравнение неразрывности для γ:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \operatorname{div} \gamma\vec{v} = 0. \tag{2,32}$$

Из уравнений скоростного поля (2,30) и формул (2,26b) и (2,26c) следует, что «потенциалы» $\vec{a} = \frac{\vec{u}}{c}$ и $a_0 = \frac{u_0}{c}$, описывающие это поле, являются неоднозначными величинами, поэтому на них можно наложить дополнительное условие типа условия Лорентца для электромагнитного поля:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial a_0}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{a} = 0. \tag{2,33}$$

Т. к. по (2,19с) $\vec{a} = \frac{\vec{v}}{c} a_0$, то условие (2,33) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} + \operatorname{div} a_0 \vec{v} = 0. \qquad (2{,}33а)$$

Это значит, что при движении частиц континуума скалярная величина a_0 сохраняется в пространстве и времени. Физический смысл условия (2,33), легко установить при помощи уравнения неразрывности (2,9), если его умножить на $\frac{1}{c}$ и записать следующим образом:

$$\rho_0 \left(\frac{1}{c} \frac{\partial a_0}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{a} \right) + \frac{a_0}{c} \frac{d\rho_0}{dt} = 0. \qquad (2{,}34)$$

Если для уравнения (2,34) выполняется условие:

$$\frac{d\rho_0}{dt} = 0, \qquad (2{,}35)$$

тогда уравнение (2,34) переходит в условие (2,33). Т. о., если выполняется условие (2,33), тогда будет одновременно выполняться и условие (2,35), а это значит, что на мировых линиях движения частиц континуума инвариантная плотность зарядов ρ_0 (создающих внешнее электромагнитное поле, в котором движутся частицы континуума), будет сохраняться, хотя эта величина может изменяться при переходе от одной мировой линии к другой. Учитывая, что:

$$H = mc^2 + e\varphi \text{ и } \vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A},$$

находим:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{p} = \frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div} m\vec{v} = m_0 \left(\frac{\partial a_0}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{a} \right) c. \qquad (2{,}36)$$

Принимая во внимание (2,33а) можем (2,36) записать в виде двух уравнений:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div} m\vec{v} = 0 \qquad (2{,}37)$$

и

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{p} = 0. \qquad (2{,}38)$$

Уравнение (2,37) показывает, что релятивистская масса m частиц континуума сохраняется в пространстве и времени, а уравнение (2,38) показывает, что для частиц континуума имеет место закон сохранения энергии — импульса. Т. о. условие (2,33) означает, что на мировых линиях движения частиц континуума сохраняется инвариантная плотность зарядов ρ_0, создающих внешнее электромагнитное поле, помимо этого сохраняются релятивистская масса m частиц континуума и их энергия — импульс. Подставляя в (2,38) $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$ и $p = \nabla S$, получим:

$$\Box S = 0. \tag{2,39}$$

Применяя к (2,39) операции $\frac{\partial}{\partial t}$ и grad получим:

$$\Box H = 0 \text{ (a)}, \quad \Box \vec{p} = 0 \text{ (b)}. \tag{2,40}$$

Для «потенциалов» $\bar{a}$ и a_0 из уравнений поля (2,30) и условия (2,33) вытекают следующие волновые уравнения:

$$\Box a_0 = -4\pi\gamma \text{ (a)}, \quad \Box \vec{a} = -\frac{4\pi}{c}\gamma\vec{v} \text{ (b)}. \tag{2,41}$$

Волновые уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеют следующий вид:

$$\Box \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\left(c\nabla\gamma + \frac{\partial(\gamma\vec{v})}{\partial t}\right) \text{ (a)}, \quad \Box \vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\gamma\vec{v} \text{ (b)}. \tag{2,42}$$

Если частицы континуума выходят из внешнего электромагнитного поля и продолжают свое движение в среде, лишенной зарядов и полей ($\rho = 0$, $\gamma = 0$), тогда волновые уравнения для величин $\vec{a}$, a_0, $\vec{E}$, $\vec{H}$ имеют следующий вид:

$$\Box \vec{a} = 0 \text{ (a)}, \quad \Box a_0 = 0 \text{ (b)}, \quad \Box \vec{E} = 0 \text{ (c)}, \quad \Box \vec{H} = 0 \text{ (d)}. \tag{2,43}$$

Точно таким волновым уравнениям удовлетворяют и другие величины, описывающие состояние частиц континуума. Из полученных результатов релятивистской теории следуют выводы, аналогичные тем, которые были сделаны в классической теории.

Релятивистская теория (четырехмерное пространство)

Для четырехмерного пространства получается то же самое, что и в трехмерном пространстве, но результаты имеют более наглядный вид.

Четырехмерные уравнения движения заряженной частицы вещества можно записать в ньютоновской форме:

$$m_0\frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k, \quad t, k = 1.\ 2, 3, 4, \tag{3,1}$$

в форме конических уравнений Гамильтона:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \text{ (a)}, \quad \frac{dx_i}{d\tau} = u_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} \text{ (b)}, \tag{3,2}$$

и сопряженных с ними уравнений Гамильтона — Якоби:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}, \tag{3,3}$$

или в форме уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{3,4}$$

Функции L, H, S и импульсы p_i определяются по формулам:

$$L = \frac{m_0 u_i^2}{2} + \frac{e}{c} A_i u^i \text{ (a)}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = m_0 u_i + \frac{e}{c} A_i \text{ (b)},$$

$$H = \frac{\left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right)^2}{2m_0} \text{ (c)}, \quad S = \int L\,dt \text{ (d)}. \tag{3,5}$$

Внешнее электромагнитное поле, в котором движется заряженная частица вещества, характеризуется тензором электромагнитного поля F_{ik}, а уравнения Максвелла для поля имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^e} + \frac{\partial F_{ke}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ei}}{\partial x^k} = 0 \text{ (a)}, \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} \rho_0 u_i \text{ (b)}. \tag{3,6}$$

Из уравнений поля (3,6) вытекает закон сохранения зарядов:

$$\frac{\partial (\rho_0 u_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{3,7}$$

Следствием неоднозначности в определении четырехмерных потенциалов A_i является условие Лорентца:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0. \tag{3,8}$$

Действительно, тензор электромагнитного поля F_{ik} определяется по формуле:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{3,9}$$

из которой очевидно, что потенциалы A_i задаются с точностью до четырехмерного градиента, произвольной скалярной функции $f(x, y, z, t)$. Замена A_i на A_i' по формуле:

$$A_i' = A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{3,10}$$

не изменяет ни тензора F_{ik}, ни уравнений поля (3,6), ни условия Лорентца (3,8). Подбирая произвольную функцию f (x, y, z, t) таким образом, чтобы она удовлетворяла уравнению Даламбера:

$$\Box f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0, \tag{3,11}$$

мы можем путем дифференцирования по x_i формулы (3,10), получить следующее соотношение для вектора A_i':

$$\frac{\partial A_i'}{\partial x_i} = 0. \tag{3,12}$$

Установим связь между тензором F_{ik} и вектором u_i. С этой целью вычислим четырехмерный вихрь вектора p_i и учтем при этом уравнение (3,3), тогда получим:

$$\frac{\partial p_k}{\partial x^i} - \frac{\partial p_i}{\partial x^k} = m_0\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) = 0. \tag{3,13}$$

Если ввести обозначения:

$$\varepsilon = -m_0c^2 \text{ a)}, \quad a_i = \frac{u_i}{c} \text{ b)}, \quad F_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \text{ c)}, \tag{3,14}$$

тогда (3,13) запишется следующим образом:

$$eF_{ik} = \varepsilon F_{ik}. \tag{3,15}$$

Уравнение движения Ньютона (3,1) в этом случае запишется так:

$$\frac{e}{c} F_{ik}u^k = m_0\frac{du_i}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{c} F_{ik}u^k. \tag{3,16}$$

Этот результат может быть получен, совершенно независимо от приведенных выше соображений, следующим образом:

$$\frac{e}{c} F_{ik}u^k = m_0\frac{du_i}{d\tau} = m_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\right)u^k = \frac{\varepsilon}{c} F_{ik}u^k,$$

что полностью совпадает с (3,15).

Умножая уравнение Максвелла (3,6) на заряд частицы e, а затем по формуле (3,15), заменяя eF_{ik} на εF_{ik} получим уравнения:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^e} + \frac{\partial F_{ke}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ei}}{\partial x^k} = 0 \text{ (a)}, \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c}\gamma_0 u_i \text{ (b)} \tag{3,17}$$

где через γ_0 обозначена следующая скалярная величина:

$$\gamma_0 = \frac{e}{\varepsilon}\rho_0. \tag{3,18}$$

Из (3,17в) для величин γ_0 вытекает уравнение:

$$\frac{\partial(\gamma_0 u_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{3,19}$$

В силу градиентной инвариантности уравнений скоростного поля (3,17), для потенциалов a_i этого поля будет иметь место условие типа Лорентца:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = 0. \tag{3,20}$$

Это условие независимо от ссылок на градиентную инвариантность уравнений скоростного поля (3,17) может быть обосновано так:

$$\frac{\partial p_l}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right)=\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{dp_l}{d\tau}\right)=\frac{e}{c}\,\frac{\partial A_l}{\partial x^i}=0. \qquad (3,21)$$

Но $p_l=m_0u_l+\frac{e}{c}A_l$, поэтому из (3,21) следует (3,20).

То же самое можно получить и другим способом:

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\right)=\frac{\partial}{\partial p^i}\left(\frac{\partial H}{\partial x_l}\right)=-\frac{\partial}{\partial p^i}\left(\frac{\partial p^i}{\partial t}\right)=0. \qquad (3,22)$$

Здесь были учтены уравнения $H=-\frac{\partial S}{\partial t}$ и $p^i=\frac{\partial S}{\partial x_i}$, из которых следует:

$$\frac{\partial H}{\partial x_l}=-\frac{\partial p^i}{\partial t}. \qquad (3,23)$$

Умножая (3,22) на $\frac{1}{c}$ и учитывая, что $a_l=\frac{u_l}{c}$, получим (3,20). Уравнение (3,21) в развернутом виде запишется так:

$$\frac{\partial p_l}{\partial x_l}=-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial H}{\partial t}+\mathrm{d\dot{w}}\,\vec{p}=0. \qquad (3,24)$$

Это есть закон сохранения энергии-импульса, рассматриваемого здесь континуума.

Подставляя в (3,21) $p_l=\frac{\partial S}{\partial x^i}$ получим волновое уравнение для релятивистской функции действия S:

$$\Box S=\frac{\partial^2 S}{\partial x_l^2}=0. \qquad (3,25)$$

Применяя к (3,25) операции $\frac{\partial}{\partial t}$ и grad получим:

$$\Box H=0\ (a),\qquad \Box\vec{p}=0\ (b). \qquad (3,26)$$

Волновые уравнения для «потенциалов» a_l имеют следующий вид:

$$\Box a_l=\frac{\partial^2 a_l}{\partial x_k^2}=-4\pi\gamma_0 a_l. \qquad (3,27)$$

Отсюда для четырехмерной скорости u_l получается следующее волновое уравнение:

$$\Box u_l=\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}=-4\pi\gamma_0 u_l. \qquad (3,28)$$

При выходе из электромагнитного поля ($\rho=0$, $\gamma=0$) частицы континуума будут продолжать двигаться по волновым законам:

$$\Box a_l=0\ (a),\qquad \Box u_l=0\ (b). \qquad (3,29)$$

Аналогичным волновым уравнениям будут удовлетворять и другие физические величины, характеризующие континуум.

Все изложенное в этом разделе свидетельствует о том, что в данном случае результаты аналогичны полученным в классической теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм. «Основы теории электричества», 1954 г.
2. Р. Беккер. «Теория электричества», том 2, 1941 г.
3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. «Теория поля», 1960 г.