КУЛАКОВ Н. Г., ФРЫНТОВ Е. А. (Белгород)

О РЕШЕНИИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО НЕИЗВЕСТНОЕ ПОД ЗНАКОМ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ

Целой частью E (l) данного вещественного числа l называют наибольшее целое число, не превосходящее l.

Если E (l) = к, где к — целое число, то из определения целой части следует, что

$$к \leqslant l < к + 1 \qquad (1).$$

Рассмотрим уравнение

$$E(Ay + B) = Cy + D \qquad (2),$$

где y — неизвестное, A, B. C и D — параметры из множества вещественных чисел. Подстановкой

$$E(x) = Ay + B \qquad (3)$$

уравнение (2) приводится к виду

$$E(x) = \alpha x + \beta \qquad (4),$$

$$\text{где } \alpha = \frac{C}{A} \text{ и } \beta = \frac{A \cdot D - B \cdot C}{A} \cdot (A \neq 0).$$

Если уравнение (4) имеет решение, то будет иметь решение и данное уравнение (2). Для этого достаточно из подстановки (3) найти y.

Поэтому в дальнейшем мы выясним, при каких условиях уравнение (4) имеет решение.

Рассмотрим семь случаев:

I. Пусть в уравнении (4) $\alpha = 0$. Тогда оно будет иметь вид:

$$E(x) = \beta.$$

Легко видеть, что это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда β — целое число.

В этом случае, пользуясь двойным неравенством (1), устанавливаем, что

$$\beta \leqslant x < \beta + 1.$$

Итак, если $\alpha = 0$, то:

1) при β — целом, имеем множество решений, определяемое двойным неравенством

$$\beta \leqslant x < \beta + 1;$$

2) при β — не целом, уравнение (4) решений не имеет

Исследуя дальнейшие случаи, мы будем предполагать, что в уравнении (4) β — любое вещественное число.

II. Пусть $\alpha < 0$.

Неизвестное x уравнения (4) должно быть таким, чтобы $\alpha x + \beta$ было целым.

Обозначим $\alpha x + \beta = к$ (к — целое число), тогда $x = \frac{к - \beta}{\alpha}$.

Уравнение (4) после подстановки в него $к = \alpha x + \beta$

и $x = \frac{к - \beta}{\alpha}$ примет вид: $E\left(\frac{к - \beta}{\alpha}\right) = к$.

На основании (1) последнее уравнение может быть заменено двойным неравенством

$$к \leqslant \frac{к - \beta}{\alpha} < к + 1 \qquad (6).$$

Заметим, что двойное неравенство верно для всех значений $\alpha \neq 0$.

Для $\alpha < 0$ (6) запишется так: $\alpha(к + 1) < к - \beta \leqslant \alpha к$ или $\alpha + \beta < к(1 - \alpha) \leqslant \beta$.

Учитывая, что при $\alpha < 0$ $1 - \alpha > 0$, имеем двойное неравенство для определения к: $\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} < к \leqslant \frac{\beta}{1 - \alpha}$.

Промежуток $\left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha}; \frac{\beta}{1 - \alpha}\right]$ может содержать, а может и не содержать целые числа. Так как в нашем случае этот промежуток имеет длину

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} - \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

а при $\alpha < 0$ $0 < \frac{\alpha}{\alpha - 1} < 1$, то в рассматриваемом промежутке может содержаться не более одного целого числа.

Следовательно, при $\alpha < 0$ уравнение (4) может иметь не более одного решения.

III. Пусть в уравнении (4) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Из неравенства (6) следует $\frac{\beta}{1 - \alpha} \leqslant к < \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha}$.

Учитывая, что промежуток $\left[\frac{\beta}{1-\alpha};\ \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha}\right)$ имеет длину, равную $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, где $0 < \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$ при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, заключаем, что в этом промежутке может содержаться, как и в случае II, не более одного целого числа, а потому уравнение (4) имеет не более одного решения.

IV. В уравнении (4) $\alpha = \frac{1}{2}$.

Из неравенства (6) сразу имеем

$$2\beta \leqslant x < 2\beta + 1.$$

Так как длина промежутка $(2\beta;\ 2\beta + 1)$ равна единице, то в нем всегда имеется единственное целое число к.

Отсюда следует, что уравнение (4) имеет единственное решение при $\alpha = \frac{1}{2}$.

V. Пусть в уравнении (4) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Из неравенства (6) находим

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \leqslant к < \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha}.$$

Длина промежутка, содержащего к, равна $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, но $\frac{\alpha}{1-\alpha} > 1$ при $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Поэтому в промежутке $\left[\frac{\beta}{1-\alpha};\ \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha}\right)$ всегда содержится не менее одного целого числа. Значит, уравнение (4) всегда имеет не менее одного решения.

VI. Пусть в уравнении (4) $\alpha = 1$. Тогда неравенство (6) приводится к неравенству $\beta \leqslant 0 < \beta + 1$, которое не зависит от к и выполняется для значений $-1 < \beta \leqslant 0$.

Таким образом, при $\alpha = 1$ уравнение (4) имеет счетное множество решений, если $-1 < \beta \leqslant 0$, в противном случае решений нет.

VII. Наконец, пусть в уравнении (4) $\alpha > 1$. Тогда из неравенства (6) получаем $\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha} < к \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha}$, но так как длина промежутка $\left(\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha};\ \frac{\beta}{1-\alpha}\right]$ равна $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ и $\frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$, то в этом промежутке найдется по крайней мере одно целое число.

Следовательно, при $\alpha > 1$ уравнение (4) имеет не менее одного решения.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Решить уравнение $E(x) = -3x + 5$. Так как $\alpha = -3$, мы имеем дело со случаем II $x = \frac{5-к}{3}$, а $\frac{1}{2} < к \leqslant \frac{5}{4}$. В промежутке $\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\right]$ содержится целое число $к = 1$, значит, $x = \frac{4}{3}$.

2. $E(x) = \frac{3}{4}x + 2$.

Имеем случай V. Уравнение имеет не менее одного решения. Пользуясь результатами этого случая, имеем

$$\frac{2}{1-\frac{3}{4}} \leqslant к < \frac{\frac{3}{4}+2}{1-\frac{3}{4}} \text{ или } 8 \leqslant к < 11.$$

Следовательно, $к = 8, 9, 10$, а $x_1 = 8$; $x_2 = 9\frac{1}{3}$; $x_3 = 10\frac{2}{3}$.

3. $E(x) = 1{,}01x + 1$.

Имеем случай VII.

Уравнение имеет не менее одного решения:

$$x = \frac{к-1}{1{,}01} \text{ и } к \leqslant \frac{к-1}{1{,}01} < к+1.$$

После преобразований $-201 < к \leqslant -100$.

Отсюда видно, что к может принимать значения:

-200; -199; -198;... -100.

Находя x по формуле $x = \frac{к-1}{1{,}01}$, получим двести одно решение.

Из последнего примера видно, что уравнение (4) может иметь достаточно большое конечное число решений. Выясним, при каких условиях это возможно.

Справедлива следующая

теорема: Для любого наперед заданного натурального числа N можно всегда указать такое $\varepsilon > 0$, что как только будет выполняться неравенство $|1-\alpha| < \varepsilon$ $(\alpha \neq 1)$, число решений уравнения (4) будет больше, чем N.

Примечание. При $\alpha = 1$ уравнение (4) имеет либо счетное число решений, либо не имеет их вовсе (случай VI), поэтому в теореме $\alpha \neq 1$.

Доказательство:

а) пусть $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Именно тогда уравнение (4) имеет не менее одного решения (случай V). Из неравенства (6) имеем $\frac{\beta}{1-\alpha} \leqslant к < \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha}$.

Потребуем, чтобы длина промежутка $\left[\frac{\beta}{1-\alpha};\quad \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha}\right)$, равная $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, была больше N, т. е. $\frac{\alpha}{1-\alpha} > N$.

Это возможно, так как длина этого промежутка больше единицы. Итак,

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} > N \text{ или } -1+\frac{1}{1-\alpha} > N, \text{ отсюда } \frac{1}{1-\alpha} > N+1$$

$$\text{и } 1-\alpha < \frac{1}{N+1} = \varepsilon.$$

Следовательно, для заданного N, $\varepsilon = \frac{1}{N+1}$;

б) если же $\alpha > 1$, уравнение (4) имеет также не менее одного решения (случай VII).

Из неравенства (6) получим

$$\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha} < к \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Длина промежутка, содержащего к, $\frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$.

Потребуем, чтобы $\frac{\alpha}{\alpha-1} > N$, откуда $\frac{1}{\alpha-1} > N+1$ или $\alpha-1 < \frac{1}{N+1} = \varepsilon$.

Так как $\varepsilon = \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N-1}$, то, объединяя а) и б), имеем $\alpha-1| < \varepsilon = \frac{1}{N+1}$, т. е. по данному натуральному N можно найти $\varepsilon > 0$, так что число решений превзойдет данное N.

Пример. Установить, при каких α уравнение $E(x) = \alpha x+6$ имеет число решений, превосходящее $N=2000$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{N+1} = \frac{1}{2001}$, тогда $|\alpha-1| < \frac{1}{2001}$, откуда $-\frac{1}{2001} < \alpha-1 < \frac{1}{2001}$ или $\frac{2000}{2001} < \alpha < \frac{2002}{2001}$.

Пусть $\alpha = 0{,}9996$, где $\frac{2000}{2001} < 0{,}9996 < \frac{2002}{2001}$.

Тогда уравнение примет вид: $E(x) = 0{,}9996x+6$ (7).

Имеем случай V: $\alpha = 0{,}9996$, $\beta = 6$; $\frac{6}{1-0{,}0004} \leqslant к < \frac{0{,}9996+6}{1-0{,}0004}$.

После вычислений получим

$$15000 \leqslant к < 17499.$$

В этом промежутке заключено 2498 целых чисел, а значит, рассматриваемое уравнение (7) имеет 2498 решений, которые вычисляются по формуле

$$x = \frac{к - 6}{0,9996} \qquad (к = 15000;\ 15001; \ldots 17499)$$

Из-за недостатка места мы не смогли проиллюстрировать геометрически различные случаи решения уравнения (4). При желании читатель может это сделать сам, рассматривая пересечение графиков $y = E(x)$ и $y = \alpha x + \beta$ при указанных в статье возможных значениях α и β.