УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
БЕЛГОРОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Том III 1961

Б. Л. Панферов, доцент,
А. М. Степанчук, М. И. Заверткин

О РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

(В помощь учителю)

Учителям математики хорошо известно, с какими большими трудностями сопряжено изучение раздела «Решение геометрических задач с применением тригонометрии» в X классах средней школы. Можно было бы указать немало причин такого положения. Главная из них состоит в том, что при решении стереометрических задач с применением тригонометрии учащемуся приходится преодолевать, помимо общих трудностей, с которыми сопряжено решение всякой стереометрической задачи (выполнение чертежа пространственной фигуры, выбор теорем), специфические трудности, связанные с установлением соответствующих соотношений между угловыми и линейными элементами, а также трудности приведения к виду, удобному для вычислений, и трудности исследования полученного решения, если последнее условием задачи предусмотрено В то же время образовательное и практическое значение решения задач геометрии с применением тригонометрии настолько велико, что мириться с какими-то недоработками при изучении данного раздела никак нельзя.

Было бы неверно утверждать, что составители программ Министерства просвещения РСФСР по математике недооценивают значимость этого раздела. Из года в год, каким бы изменениям ни подвергалась программа по математике, в ней всегда указывалось, что учащиеся X классов должны решать геометрические задачи с применением тригонометрии. Более того, в течение ряда лет выпускники, сдавая экзамены на аттестат зрелости, выполняли единственную письменную работу по математике, характер которой был заранее предопределен: это была задача по геометрии с применением тригонометрии. Между тем, программа в течение многих лет не давала ясного ответа на вопрос о том, когда именно следует начинать решать с учащимися эти задачи.

Малоопытные, начинающие преподаватели, как правило, приступали к изучению этого раздела только после того, когда весь программный материал по тригонометрии был изучен, т. е. в X классе, в конце учебного года, как это и было отражено в программе. Несколько лет назад раздел «Решение задач геометрии с применением тригонометрии» был включен в заключительную часть программы по тригонометрии X класса. И только убедившись, что таким образом учащиеся X класса решать эти трудные задачи не научатся, учителя вынуждены были сами искать выход из создавшегося положения, так как объяснительная записка программы ответа на этот вопрос не давала.

В настоящее время дело обстоит несколько лучше. Так, например, в программе по геометрии на 1959—1960 учебный год для X класса указывается на необходимость решения геометрических задач с применением тригонометрии в течение всего учебного года (разделы: «Многогранники», пункт 5; «Тела вращения», пункт 8). Теперь решение геометрических задач с применением тригонометрии, вопреки многолетней порочной практике, отнесено, наконец, не к тригонометрии, как было ранее, а к геометрии, и тем самым устанавливается, что геометрические задачи на вычисление должны решаться с помощью тригонометрического метода параллельно с изучением теоретического материала курса геометрии. К сожалению, в программе по математике 1959 года отсутствуют указания, столь же ясные, как и по X классу, в отношении использования тригонометрии при решении задач планиметрии в VIII—IX классах и при решении задач из начальных разделов стереометрии в IX классе. Правда, в объяснительной записке к программе по математике кое-что об этом говорится, но несколько в зашифрованном виде: «Решение прямоугольных треугольников должно найти применение при решении задач в курсе геометрии VIII и IX классов» (Программа по математике, 1959, стр. 21). Было бы значительно лучше, если бы эта мысль была выражена более определенно, как это сделал, например, С. И. Новоселов в «Руководстве по преподаванию тригонометрии»: «В курсе планиметрии, а также в начальных главах стереометрии возможно и целесообразно решать вычислительные задачи с применением тригонометрии» (1958, стр. 120).

Мы глубоко убеждены, что путь к значительному улучшению решения геометрических задач с применением тригонометрии в средней школе может быть проложен прежде всего через реализацию этого полезного совета. Следует указать, что эта мысль С. И. Новоселова и другие аналогичные высказывания, появившиеся в последние годы в нашей методической литературе, не являются каким-то откровением. К этому выводу уже давно пришли некоторые учителя-практики. Так, например, одним из авторов настоящей статьи эта мысль была реализована в его практической работе с учащимися VIII—X классов Брацлавской средней школы Винницкой области. Так как результаты этого опыта могут служить в какой-то мере обоснованием правильности наших выводов, то позволим себе остановиться на нем несколько подробнее

В 1936 году выпускники средней школы должны были впервые выполнять письменные работы, в том числе и по геометрии с применением тригонометрии, по заданиям облоно. Учителя математики названной школы весьма огорчило то обстоятельство, что несложные задачи по геометрии с применением тригонометрии решались выпускниками с большим напряжением. Стало ясно, что в работе с учащимися было что-то упущено, что-то недоделано. Пришлось уделить большее внимание решению задач по геометрии с применением тригонометрии. В новом учебном году было решено большинство задач из «Сборника задач по тригонометрии» Н. Рыбкина. Казалось, что на этот раз выпускники хорошо подготовились к письменной работе и легко с ней справятся. Но получилось не совсем так. Из двух задач по геометрии, предложенных на экзамене, одна из них, более сложная, была решена учащимися довольно быстро. Другая же, казалось, совсем простая, заняла у учащихся все оставшееся время и была решена даже наиболее одаренными учениками только после многих попыток.

В этой задаче речь шла о том, чтобы вычислить боковую поверхность усеченного конуса, зная объем V вписанного в него шара и угол наклона образующей к плоскости основания A. Что же затруднило учащихся в решении этой простой задачи? Оказалось, что учащиеся никак не могли сообразить, что $l=R+r$, т. е., что образующая конуса равна сумме радиусов его нижнего и верхнего оснований. Анализ представленных черновиков показал, что многие учащиеся тщетно пытались найти вначале каждый из радиусов оснований, R и r, в отдельности, а затем и их сумму, причем исходя из того только, что в равнобочной трапеции задана высота, равная диаметру вписанного шара, и угол A при ее нижнем основании, т. е. пытались решить задачу явно неразрешимую.

И только впоследствии, после многих безуспешных попыток, ими было, наконец, замечено неиспользованное ранее обстоятельство, а именно, что эта трапеция описана около круга, вследствие чего появилось равенство $2l=2R+2r$, выражающее свойства сторон описанного четырехугольника. Если бы этот случай оказался объектом исследования, например, инспектора школ, то последний, конечно, мог бы сделать вывод, что учащиеся не были достаточно подготовлены для решения этой задачи и тем самым могла бы быть исчерпана вся проблема. Но учителю, проработавшему с учениками этого класса два года, решившему с ними большинство задач сборника Н. Рыбкина и знавшему, что они легко справлялись с решением более сложных задач, ограничиться только этим выводом нельзя было. Он должен был обязательно выяснить, почему же все-таки его ученики оказались неподготовленными к решению этой простой задачи.

Пришлось пересмотреть все задачи, решенные с учениками этого класса за весь год как по планиметрии, так и по стереометрии с применением тригонометрии. Оказалось, что за год было решено задач немало, но среди решенных планиметрических задач подобных не оказалось совсем, а при решении задач №№ 15, 16, 17 из § 22, единственных, в которых речь шла о шаре, вписанном в усеченный конус, если и было обращено внимание учащихся на условие, при котором круг может быть вписан в равнобедренную трапецию, то оно оказалось вскоре забытым, так как при решении этих задач внимание учащихся могло быть отвлечено поисками путей их решения, поскольку необходимо было решить задач побольше.

Стало очевидным, что учащиеся этого класса оказались бы в совершенно ином, более выгодном положении, если бы, во-первых, их учитель, изучая с ними геометрию в VII классе, не ограничился только доказательством равенства сумм противоположных сторон описанного четырехугольника, содержащимся в учебнике Киселева, но и разъяснил им условие, при котором равнобочная трапеция может быть описана около окружности (боковая сторона трапеции должна быть равной полусумме оснований или ее средней линии). Между прочим, еще не было зафиксировано случая, чтобы хотя бы один из абитуриентов физмата Белгородского пединститута, к которому обращались на экзамене с вопросом, всегда ли можно в равнобочную трапецию вписать окружность, ответил бы на него удовлетворительно. Во-вторых, указанная стереометрическая задача оказалась бы для учащихся совершенно простой и они справились бы с ней легко, если бы с ними предварительно была решена, например, такая планиметрическая задача:

Около круга радиуса R описана равнобочная трапеция с углом А при большем основании. Найти ее среднюю линию и площадь.

Однако мы рассмотрели вопрос о том, что должен сделать учитель с целью подготовки учащихся к решению всего лишь одной конкретной задачи. Число же стереометрических задач, которые должны быть решены в X классе с применением тригонометрии, весьма велико. Решение большинства из них, как известно, сводится к установлению искомой зависимости между линейными и угловыми элементами одной или нескольких плоских фигур, т. е. к решению задачи (или задач) планиметрической.

В связи с этим возникает вопрос: имеются ли в X классе условия для решения достаточного числа стереометрических задач и, наряду с этим, задач планиметрических с применением тригонометрии? На наш взгляд, таких возможностей нет. Если бы даже кому-то из учителей математики X класса и удалось осуществить это в какой-то мере, то эффективность такого решения была бы значительно меньшей, чем в том случае, если бы какая-то часть геометрических задач на вычисление решалась им с применением тригонометрии в VIII и IX классах. Нам могут на это возразить: конечно, если какой-то из разделов программы поставить в привилегированное положение и вместо полугода решать с учащимися задачи по этому разделу в течение двух или почти трех лет, то немудрено чему-то и научить, но в каком положении окажутся при этом другие разделы программы, например, решение геометрических задач на вычисление без применения тригонометрии или решение задач на построение? Хочется сказать сразу, что подобные опасения лишены всяких оснований.

В самом деле, ведь речь идет о том, чтобы с учащимися VIII класса после ознакомления их с тригонометрическими функциями острого угла и основными случаями решения прямоугольных треугольников, решить до конца учебного года некоторое число планиметрических задач с применением тригонометрии, сводящихся к решению прямоугольных треугольников. Этих задач не так уж много. Если не считать, например, тех полезных задач из области физики и техники, решаемых с помощью тригонометрии, которые содержатся в § 1 «Сборника задач по тригонометрии» П. В. Стратилатова, а взять только те планиметрические задачи, к решению которых может быть сведено решение задач стереометрических, содержащихся в стабильном сборнике, то их окажется немногим более 30. Точно также в IX классе при изучении разделов «Правильные многоугольники» и «Длина окружности и площадь круга» следует решить, на наш взгляд, всего лишь 16 задач с применением тригонометрии.

Само собой разумеется, что и при изучении начальных глав стереометрии в IX классе какая-то часть задач должна быть решена с применением тригонометрии. К сожалению, в новом стабильном «Сборнике задач по тригонометрии» П. В. Стратилатова эти задачи отсутствуют (они были, например, в «Сборнике задач по тригонометрии» Н. Рыбкина в §§ 17—18). В этом сборнике помещены стереометрические задачи, начиная с раздела «Многогранники» (§ 19, изд. 1957 г.), который изучается только в X классе. П. В. Стратилатов, видимо, полагает, что ученики IX классов должны ограничиться решением стереометрических задач без применения тригонометрии, с чем нельзя согласиться.

Мы указываем ниже 25 задач, которые могут и должны быть решены в IX классе при изучении начальных глав стереометрии. Таким образом, речь идет о решении в VIII—IX классах небольшого количества геометрических задач с применением тригонометрии, и, как это показал опыт работы по математике в названной ранее Брацлавской средней школе, их решение может быть проведено без ущерба для изучения других разделов программы. Что же касается утверждения, будто бы этим один из разделов ставится в привилегированное положение по отношению к другим, то это явно недоразумение. Наоборот, мы только освобождаем геометрические задачи из той зависимости, в которую они попали по отношению к тригонометрии. В самом деле, до настоящего времени геометрические задачи, решаемые с помощью тригонометрии, отнесены в сборники задач по тригонометрии и их решение является как бы иллюстрацией применения тригонометрического метода к геометрии и только. Между тем, тригонометрия находит себе многочисленные применения в алгебре (например, извлечения корня n-ой степени из числа), в физике, в матанализе, однако никому еще не приходило в голову исключить эти задачи из сборников по алгебре или физике на этом основании.

Совершенно прав С. И. Новоселов, когда он в своем «Руководстве по преподаванию тригонометрии» (изд. 1952 г., стр. 120) пишет: «В «Сборнике задач по тригонометрии» Н. Рыбкина вычислительные задачи с применением тригонометрии приведены с указанием разделов геометрии, к которым они относятся, но этих задач нет совершенно в сборниках задач по геометрии. Такая установка в геометрии дает (хотя и в неявном виде) рекомендацию решать задачи, в которых применяется тригонометрия, только лишь в тригонометрии и избегать их в геометрии. На практике обычно так и поступают, исключение составляют лишь стереометрические задачи на многогранники и круглые тела. Такой искусственно создаваемый разрыв между геометрией и тригонометрией является совершенно ненормальным. Значительная часть геометрических задач, требующих применения тригонометрии, на самом деле «требует» лишь умения решать прямоугольные треугольники, и, таким образом, необходимый тригонометрический аппарат доступен учащимся VIII класса, прошедшим начальный курс тригонометрии».

Желая выяснить, как обстоит дело с изучением раздела «Решение геометрических задач с применением тригонометрии» в VIII—X классах школ Белгородской области, авторами настоящей работы были составлены анкеты-вопросники, которые в течение последних двух лет вручались студентам V курса перед их выездом на педагогическую практику.

Собранные нами многочисленные материалы с полной убедительностью показывают, что в школах Белгородской области геометрические задачи с применением тригонометрии решаются учителями только в X классе, причем во многих школах это имеет место только в 3-й и 4-й четвертях, т. е. в конце учебного года. В VIII—IX классах эти задачи не решаются совсем. По сведениям, полученным нами от студентов-практикантов, учащиеся X классов большинства школ области испытывают значительные затруднения при решении стереометрических задач с применением тригонометрии, слабо в них разбираются. Домашние задания, содержащие указанные задачи, во многих школах учащимися самостоятельно не выполняются, и вследствие этого учителя оказываются вынужденными решать предложенные задачи на дом в классе, что является крайне ненормальным и свидетельствует о наличии серьезных недостатков в постановке изучения этого важного раздела программы в школах области.

Все это говорит о том, что проблема изучения в школе раздела «Решение геометрических задач с применением тригонометрии» является в настоящее время весьма актуальной и она может быть успешно разрешена только при условии решения указанных задач в VIII—X классах параллельно с изучением курса геометрии.

Мы надеемся, что в недалеком будущем стабильные сборники по планиметрии и стереометрии будут дополнены также задачами на вычисление, требующими применения тригонометрии. А пока что мы предлагаем учителям воспользоваться в своей практической работе в VIII—IX классах задачами, которые приводятся ниже. Заметим попутно, что мы не ставим своей целью дать перечень всех задач по исследуемой теме, а, наоборот, стремимся ограничиться только некоторым рекомендуемым минимумом. Поэтому включаем только планиметрические задачи, которые являются составными частями стереометрических задач, решаемых учащимися в X классе.

Что же касается задач для X класса, то они содержатся в сборнике П. В. Стратилатова в достаточном количестве, и мы не считаем целесообразным навязывать учителям какой-то рекомендуемый минимум.

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИИ В VIII КЛАССЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Равнобедренный треугольник

Обозначения: $a=c$ — боковые стороны; $в$ — основание; $A=C$—углы при основании; B—угол при вершине; h_a —высота, опущенная на сторону a; S — площадь треугольника, r — радиус вписанной окружности, R—радиус описанной окружности.

В равнобедренном треугольнике:

1. Даны: a и A. Найти $в$ и s ($a=12{,}6$; $A=37°43'$)
2. Даны: $в$ и A. Найти a и s ($в=18{,}4$; $A=19°51'$)
3. Даны: a и B. Найти $в$ и s ($a=14{,}8$; $B=63°13'$)
4. Даны: $в$ и B. Найти a и s ($в=13{,}24$; $B=39°53'$)
5. Даны: $h_a=m$ и B. Найти a и $в$ ($m=16{,}7$; $B=43°27'$)
6. Даны: $h_в=l$ и B. Найти a и $в$ ($l=18{,}2$; $B=56°13'$)
7. Даны: A и s. Найти a и $в$ ($A=49°23'$; $s=112{,}4$)
8. Даны: r и A. Найти a и $в$ ($r=18{,}3$; $A=27°46'$)
9. Даны: R и B. Найти a и $в$ ($R=12{,}3$; $B=37°29'$)
10. Даны: a и B. Найти R и r ($a=18{,}3$; $B=39°16'$)

Предполагается, что с учащимися до этого решено достаточное количество примеров на решение прямоугольных треугольников, притом с вычислением искомых элементов с помощью таблицы натуральных тригонометрических величин.

Четырехугольники

1. В параллелограмме даны две смежные стороны a и $в$ и острый угол между ними A. Найти площадь параллелограмма ($a=14{,}8$; $в=12{,}6$; $A=43°14'$).

2. Вычислить площадь ромба по его стороне a и острому углу A ($a=8{,}5$; $A=24°36'$).

3. Диагонали ромба $l_1=36$ см и $l_2=42$ см. Вычислить углы ромба.

4. В равнобочную трапецию с острым углом A вписана окружность радиуса r. Найти площадь этой трапеции.

5. Основания трапеции a и $в$, одна из боковых сторон c,

острый угол, прилежащий к ней, A. Найти площадь этой трапеции.

6. В параллелограмме даны острый угол A и расстояния p и q от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Найти стороны и площадь параллелограмма ($p=12$; $q=18$, $A=42°36'$).

7. Около круга описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большей из параллельных сторон острые углы A и B. Найти радиус круга, если площадь трапеции равна S.

8. Диагональ равнобочной трапеции равна a и образует с основанием угол A. Найти площадь трапеции ($a=18,6$; $A=48°14'$).

9. Сторона ромба есть средняя пропорциональная между его диагоналями.

Найти острый угол ромба.

Круг

1. В круге радиуса R хорда стягивает дугу 2A. Найти длину этой хорды и ее расстояние от центра круга ($R=12,6$; $A=18°36'$).

2. В круге радиуса R одна из хорд стягивает дугу A, а другая—B. Найти длину каждой из этих хорд и расстояние между ними (рассмотреть случаи, когда хорды расположены по обе и по одну сторону от центра) ($R=18,28$; $A=42°18'$; $B=56°48'$).

3. Хорда длиной 2m стягивает дугу 2A. Найти радиус и расстояние хорды от центра круга ($m=36,2$; $A=43°18'$).

4. Из точки, расположенной вне круга проведены касательные, образующие между собой угол A. Расстояние точки от центра круга равно a. Найти радиус круга и длину касательных.

5. Из точки M вне круга проведены касательные, образующие между собой угол A. Длина касательных равна a. Найти кратчайшее расстояние точки M от окружности ($a=42$, $A=36°28'$).

6. Из точки M, расположенной на окружности радиуса R, проведены хорда и диаметр под углом A друг к другу. Найти кратчайшее расстояние второго конца хорды от диаметра ($R=18,6$; $A=28°19'$).

7. Около окружности радиуса r описан ромб с острым углом A. Найти площадь ромба ($r=18,6$; $A=46°12'$).

8. В круг радиуса R вписан равнобедренный треугольник с углом A при вершине. Найти стороны этого треугольника ($R=14,8$; $A=48°12'$).

9. Круг радиуса r вписан в равнобедренный треугольник

с углом A при вершине. Найти стороны этого треугольника ($r=12{,}4$; $A=62°18'$).

10. В круг радиуса R вписан треугольник с острым углом A. Найти сторону треугольника, расположенную против этого угла ($R=18{,}2$; $A=63°12'$).

11. В круг радиуса R вписана равнобочная трапеция с углом A при большем основании. Найти диагонали этой трапеции ($R=18{,}6$; $A=42°16'$).

12. Около круга радиуса R описана равнобочная трапеция с углом A при большем основании. Найти среднюю линию этой трапеции и ее площадь. ($R=16{,}2$; $A=63°12'$).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИИ В IX КЛАССЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Планиметрические задачи

1. Доказать, что площадь всякого треугольника равна половине произведения двух сторон треугольника на синус угла между ними.

2. Доказать, что площадь всякого параллелограмма равна произведению двух смежных сторон на синус угла между ними.

3. Доказать, что площадь всякого выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

4. Угол A, вписанный в окружность, опирается на хорду, длина которой a. Найти радиус круга ($A=29°18'$; $a=12{,}6$).

5. Доказать, что во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\operatorname{Sin} A}=\frac{b}{\operatorname{Sin} B}=\frac{c}{\operatorname{Sin} C}=2R,$$

где a, b и c — стороны треугольника, A, B и C — углы треугольника, а R — радиус описанного круга (теорема синусов).

6. Доказать, что во всяком треугольнике квадрат одной его стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного их произведения на Cos угла между ними:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}A,$$

где a, b и c — стороны, A, B, C — углы треугольника (теорема косинусов).

7. По заданной стороне a правильного вписанного n-угольника вычислить сторону b правильного описанного n-угольника ($a=18$; $n=24$).

8. Сторона правильного n-угольника равна a. Найти его наименьшую диагональ ($a=12$; $n=18$).

9. Сторона правильного n-угольника равна a. Найти длину наибольшей его диагонали в двух случаях: 1) когда n — число четное, 2) когда n — число нечетное.

10. Сторона правильного n-угольника равна a. Найти его площадь ($a=24$; $n=20$).

11. В круг радиуса R вписан правильный n-угольник. Найти его площадь ($R=28,4$; $n=18$).

12. Около круга радиуса R описан правильный n-угольник. Найти его площадь ($R=18,6$; $n=24$).

13. В круге радиуса R дан сегмент, дуга которого равна A. Найти площадь сегмента ($R=12,4$; $A=42°36'$).

14. В круге радиуса R дана хорда a. Найти площадь меньшего из двух сегментов ($R=28,6$; $a=24,2$).

15. В круге радиуса R даны две параллельные хорды, каждая из которых стягивает дугу A. Найти ту часть площади круга, которая заключена между хордами ($R=18,2$; $A=48°36'$).

16. В параллелограмме дан острый угол A и расстояния a и b от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Найти диагонали и площадь параллелограмма ($A=48°31'$; $a=18$; $b=20$).

Стереометрические задачи

Перпендикуляр и наклонные к плоскости, угол прямой линии с плоскостью

1. Из центра O квадрата со стороной a восставлен перпендикуляр $OM=h$ к его плоскости. Найти углы, образуемые с плоскостью квадрата наклонными, соединяющими точку M:
1) с вершиной квадрата,
2) с серединой стороны ($a=12$; $h=10$).

2. Из центра O правильного треугольника со стороной a восставлен перпендикуляр $OM=h$ к его плоскости. Найти углы, образуемые с плоскостью треугольника наклонными, соединяющими точку M:

1) с вершиной треугольника,

2) с серединой его стороны ($a=18$; $h=15$).

3. Из центра O круга радиуса R восставлен перпендикуляр $OM=h$ к его плоскости. Найти угол между перпендикуляром и наклонной, соединяющей точку M с любой точкой окружности ($h=6,8$; $R=13,4$).

4. Найти угол, образуемый диагональю куба с плоскостью его грани.

5. Из некоторой точки проведены к плоскости P перпендикуляр, равный a, и наклонная. Угол между ними A. Найти

длину наклонной и ее проекции на плоскость P ($a=14{,}6$; $A=42°39'$).

6. Над квадратной силосной ямой нужно сделать крышу в виде правильной 4-угольной пирамиды. Сторона основания равна 6,5 м. Высота крыши должна быть равной 2,5 м. Найти длину стропил и угол наклона их к плоскости основания.

7. Наклонная образует с плоскостью угол A; через вершину этого угла проведена в данной плоскости вторая прямая под углом B к проекции наклонной на плоскость. Найти угол между этими прямыми ($A=43°53'$; $B=11°10'$).

8. Прямая, расположенная вне плоскости, пересекаясь с прямой, лежащей в плоскости, образует с этой прямой угол A, а эта последняя образует угол B с проекцией первой прямой на плоскость. Найти угол первой прямой с плоскостью ($A=8°26'$; $B=5°40'$).

9. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол A. Найти площадь сечения, проведенного через сторону основания и середину бокового ребра.

Параллельные прямые и плоскости

10. Из двух точек плоскости, удаленных друг от друга на расстоянии a, проведены две параллельные наклонные под углом A к плоскости. Найти расстояние между наклонными, если расстояние между их проекциями на плоскость равно b.

11. Отрезок AB параллелен плоскости. Из его концов проведены к плоскости две наклонные $AC=c$ и $ВД=d$. Наклонная AC составляет с плоскостью угол A. Найти угол наклонной ВД с этой плоскостью ($c=6$; $d=3$; $A=60°$).

12. Из концов отрезка, параллельного плоскости, восставлены к нему перпендикуляры под углами A и B к плоскости ($A>B$). Длина отрезка равна a, расстояние между точками пересечения плоскости с восставленными перпендикулярами равно b. Найти расстояние от плоскости до отрезка (рассмотреть два случая).

13. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами A и B. Найти угол между этими диагоналями.

14. Даны две скрещивающиеся прямые, наклоненные друг к другу под углом C и имеющие общий пересекающий их перпендикуляр $PQ=h$. На этих прямых даны две точки M и N, из которых отрезок PQ виден под углами A и B. Найти длину отрезка MN.

15. На двух взаимно перпендикулярных скрещивающих-

ся прямых, кратчайшее расстояние между которыми PQ=h, даны две точки M и N, из которых отрезок PQ виден под углами A и B. Найти угол наклона отрезка MN к отрезку PQ.

Двугранные и многогранные углы

16. Дан двугранный угол A. Из точки, лежащей на одной грани этого угла на расстоянии a от ребра, восставлен перпендикуляр до пересечения с другой гранью. Найти длину этого перпендикуляра (a=6,06; A=41°55′).

17. Прямоугольный треугольник ABC расположен так, что гипотенуза его AB лежит на плоскости P, а катеты образуют с плоскостью P углы m и n. Найти угол между плоскостью треугольника и плоскостью P.

18. Сторона AB треугольника ABC лежит на плоскости P, две другие стороны, CA и CB, составляют с плоскостью P углы m и n, тангенсы которых соответственно равны $1/3$ и $1/4$, а проекции этих сторон на ту же плоскость взаимно перпендикулярны. Найти угол наклона треугольника ABC к плоскости P.

19. Из точки A плоскости M проведена наклонная АД под углом m к плоскости; через АД проведена плоскость P под углом ДВС=n к плоскости M. Найти угол между АД и линией пересечения плоскостей M и P.

20. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза a и острый угол A. Найти расстояния от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол m с плоскостью треугольника.

21. Прямая AB параллельна плоскости P. Прямая СД пересекает AB под углом m и образует с плоскостью P угол n. Найти угол, образованный плоскостью P с плоскостью, в которой лежат прямые AB и СД.

22. Даны три плоских угла трехгранного угла SABC: $\angle BSC=m$, $\angle CSA=n$; $\angle ASB=p$. Найти двугранные углы этого трехгранного угла.

23. Один из двугранных углов трехгранного угла равен A; прилежащие к данному двугранному углу плоские углы соответственно равны m и n. Найти третий плоский угол.

24. В трехгранном угле даны три плоских угла в 45°, 60° и 45°. Найти двугранный угол, заключенный между теми двумя гранями, которые содержат плоские углы по 45°.

25. На ребре двугранного угла дан отрезок AB. В одной из граней дана точка M, в которой прямая, проведенная из точки A под углом m к AB, пересекает прямую, проведенную из B перпендикулярно к AB. Найти величину двугранного угла, если прямая AM наклонна ко второй грани двугранного угла под углом n.