Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №4. С. 284–292.

УДК 517.956
MSC 35R12

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-284-292

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОГОМЕРНЫХ СМЕШАННО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым*)

Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан,
Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация. Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая,то получаем вырождающихся многомерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к вырождающимся многомерным параболическим уравнениям. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к вырождающимся многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями. Изучение процесса распространения тепла в среде, заполненной массой, приводит к вырождающимся многомерным параболическим уравнениям. Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к вырождающимся многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены, а их многомерные аналоги исследованы мало. Задача Трикоми для указанных уравнений ранее исследована. Насколько известно, эта задача в пространстве не изучена. В данной работе показано, что для некоторых классов многомерных смешанно гиперболо-параболических уравнений задача Трикоми разрешима неоднозначно.

Ключевые слова: задача Трикоми, многомерное, уравнение, разрешимость, сферические функций.

Для цитирования: Алдашев С. А. 2021. Задача Трикоми для некоторых классов многомерных смешанно гиперболо-параболических уравнений & Физика. 53(4): 284–292. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-284-292.

THE TRICOMI PROBLEM FOR SOME CLASSES OF MULTIDIMENSIONAL MIXED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATIONS

Serik Aldashev

(*Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov*)

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan,
Almaty, 050010, Kazakhstan
E-mail: aldash51@mail.ru
Received December, 1, 2021

Abstract. It is known that in the mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is non-conducting, we obtain degenerate multidimensional hyperbolic equations. If the medium has a high conductivity, then we come to degenerate multidimensional parabolic equations. Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the conductivity of the medium changes) is reduced to degenerate multidimensional hyperbolic - parabolic equations. It is also known that the oscillations of elastic membranes in space can be modeled according to the Hamilton principle by degenerate multidimensional hyperbolic equations. The study of the process of heat propagation in a medium filled with mass leads to degenerate multidimensional parabolic equations. Therefore, by studying the mathematical modeling of the heat propagation process in oscillating elastic membranes, we also arrive at degenerate multidimensional hyperbolic - parabolic equations. When studying these applications, it becomes necessary to obtain an explicit representation of the solutions to the problems under study. Boundary value problems for hyperbolic - parabolic equations on the plane are well studied, and their multidimensional analogues are little studied. The Tricomi problem for these equations was previously investigated. As far as we know, this problem has not been studied in space. In this paper, we show that for some classes of multidimensional mixed hyperbolic-parabolic equations, the Tricomi problem is ambiguously solvable.

Key words: Tricomi problem, multidimensional, equation, solvability, spherical functions.

For citation: Aldashev S. A. 2021. The Tricomi problem for some classes of multidimensional mixed Hyperbolic-parabolic equations . Applied Mathematics & Physics. 53(4): 284–292. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-284-292.

1. Введение. Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена ([1]), а их многомерные аналоги исследованы мало [6], Задача Трикоми для указанных уравнений ранее исследована в [10]. Насколько известно, эта задача в пространстве не изучена.

2. Постановка задачи и результат. Пусть D_ε– конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная в полупространстве $t>0$ конусами $K_\varepsilon : |x| = t+\varepsilon$, $K_1 : |x| = 1-t$, $0 \le t \le \frac{(1-\varepsilon)}{2}$, а при $t<0$– цилиндрической поверхностью $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, и плоскостью $t = t_0 = const$, где $|x|$– длина вектора $x = (x_1,...,x_m)$, а $0<\varepsilon<1$. Обозначим через D_ε^+ и D^- части области D_ε, лежащие соответственно в полупространствах $t>0$ и $t<0$. Части конусов K_ε, K_1, ограничивающих области D_ε^+, обозначим через S^ε и S^1 соответственно. Пусть $S_\varepsilon = \{(x,t) : t = 0,\ \varepsilon < |x| < 1\}$.

В области D_ε рассмотрим смешанно гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u,\ t>0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u,\ t<0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x– оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m \ge 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,\ t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\ge 0$, $0 \le \theta_1 < 2\pi$, $0 \le \theta_i \le \pi$, $i = 2,3,...,m-1$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_{m-1})$. Следуя [10] в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую

Задача T. Найти решения уравнения (1) в области D_ε при $t \ne 0$ из класса $C(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon} = \varphi(r,\theta),\ \ u|_\Gamma = \psi(t,\theta). \tag{2}$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$– система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S_\varepsilon)$, $l = 0,1,...$ - пространства Соболева, а $\tilde{S} = \{(r,\theta) \in S_\varepsilon,\ \varepsilon < r < \frac{(1+\varepsilon)}{2}\}$.

Имеет место [9]

Лемма. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_\varepsilon)$. Если $l \ge m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_{in}^k(r,t)$,$d_{in}^k(r,t)$, $\tilde{e}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$,$d_i\frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$,$i = 1,...,m$, $\rho(\theta)$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(t,\theta) = u(r,\theta,0)$, $\nu(t,\theta) = u_t(r,\theta,0)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H– единичная сфера в E_m. Введем множество функций $B^l(\tilde{S}_\varepsilon) = \{f(r,\theta) : f \in W_2^l(\tilde{S}_\varepsilon),\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}(||f_n^k(r)||^2_{C^2((\varepsilon,\frac{(1+\varepsilon)}{2}))} + ||f_n^k(r)||^2_{C([\varepsilon,\frac{(1+\varepsilon)}{2}])})\exp 2(n^2+n(m-2)) < \infty,\ l \ge m-1.\}$

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\varepsilon^+)$, $d_i(r,\theta,t), e(r,\theta,t) \in W_2^l(D^-) \subset C(\bar{D}^-)$, $l \ge m+1$, при этом $d_i(r,\theta,0) = e(r,\theta,0) = 0$, $0<r<1$, $i = 1,...,m$. Тогда справедлива

Теорема. *Если $\varphi(r,\theta) \in B^l(\tilde{S}_\varepsilon)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma)$, $l \ge m+1$, то задача T разрешима неоднозначно.*

Отметим, что неединственность решения задачи T для модельного гиперболо-параболического уравнения доказана в [1].

Доказательство. В сферических координатах уравнения (1) в области D_ε^+ имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \tag{4}$$

где $\delta \equiv -\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$, $g_1 = 1$, $g_j = (\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2$, $j>1$.

Известно [9], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,...$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$. При $t \to -0$ на S_ε получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau = \nu(r,\theta). \tag{5}$$

Искомое решение задачи T в области D_ε^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta),\quad \text{где}\quad \bar{u}_n^k(r,t)-\text{функции, подлежащие определению.} \tag{6}$$

Подставив (6) в (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$, и проинтегрировав по единичной сфере H в E_m для $\bar{u}_n^k$ получим [1], [3]

$$\begin{gathered}\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1+\sum_{i=0}^{m}a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1+\\+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\widetilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k+\right.\\\left.+\left[\widetilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-1}^k-na_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\}=0.\end{gathered}\tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar{u}_1^k=\\=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right),\quad n=1,\quad k=\overline{1,k_1},\end{gathered}\tag{9}$$

$$\begin{gathered}\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k=\\=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\widetilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k+[\widetilde{c}_{n-1}^k+\right.\\\left.+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k)]\bar{u}_{n-1}^k\right\},\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=2,3,\ldots.\end{gathered}\tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$.– решение системы (8)–(10), то оно является и решением уравнения (7). Заметим, что каждое уравнение системы (8)-(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k-\bar{u}_{ntt}^k+\frac{(m-1)}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{11}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t)\equiv 0$.

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [9], из (5) и из первого краевого условия (2) в силу (6) будем иметь

$$\bar{\tau}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\tau}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}_n^k=\bar{\nu}_n^k(r),\ \varepsilon<r<1, \tag{12}$$

$$\bar{u}_n^k(r,r-\varepsilon)=\bar{\varphi}_n^k(r),\ \varepsilon\le r\le\frac{(1+\varepsilon)}{2},\ k=\overline{1,\,k_n},\ n=0,1,\ldots. \tag{13}$$

В (11)-(13) произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi=\frac{r+t}{2}$, $\eta=\frac{r-t}{2}$ соответственно получим

$$Lu_n^k\equiv u_{n\xi\eta}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u_n^k=f_n^k(\xi,\eta), \tag{14}$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau_n^k=\nu_n^k(\xi),\ \frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$u_n^k(\xi,\frac{\varepsilon}{2})=\varphi_n^k(\xi),\ \frac{\varepsilon}{2}\le\xi\le\frac{1}{2}, \tag{16}$$

$$f_n^k(\xi,\eta)=(\xi+\eta)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(\xi+\eta,\,\xi-\eta),\ \tau_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(2\xi),\ \nu_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi),$$

$$\varphi_n^k(\xi)=(\xi+\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\varphi}_n^k(\xi+\frac{\varepsilon}{2}),\ \bar{\lambda}_n=((m-1)(3-m)-4\lambda_n)/4,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots.$$

Используя общее решение уравнения (14) (см. [5]) в [2] показано, что решение задачи Коши для уравнения (14) имеет вид

$$\begin{gathered}u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi,;\xi,\eta)+\\+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}]d\xi_1+\\+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\xi}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\eta}f_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\xi_1d\eta_1,\end{gathered}\tag{17}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения $Lu_n^k=0$ [12], а $P_\mu(z)$– функция Лежандра, $\mu=n+\frac{(m-3)}{2}$, $\frac{\partial}{\partial N}|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)|_{\xi_1=\eta_1}$, $N^\perp$– нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в стороны полуплоскости $\eta\le\xi$. Далее, из (2), (16) имеем

$$\tau_n^k(\frac{\varepsilon}{2})=\varphi_n^k(\frac{\varepsilon}{2}),\ \tau_n^k(\frac{1}{2})=\psi_n^k(0),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots.\tag{18}$$

Решение уравнение (15) записывается в виде [7]

$$\tau_n^k(\xi)=\frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2}-\xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+c_{1n}^k\xi^{s_1}+c_{2n}^k\xi^{s_2},\tag{19}$$

$\frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2}$, $s_1=n+\frac{(m-1)}{2}$, $s_2=-n-\frac{(m-3)}{2}$, c_{1n}^k, c_{2n}^k– произвольные независимые постоянные.

Подставляя (18) в (19) для c_{1n}^k, c_{2n}^k получим систему уравнений

$$\begin{cases}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_1}c_{1n}^k+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_2}c_{2n}^k=\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}c_{1n}^k+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}c_{2n}^k=\psi_n^k(0)-\frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1,\end{cases}$$

из которого найдем

$$\begin{gathered}c_{1n}^k=[2^{s_1}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+\varepsilon^{s_2}2^{s_1}(A_n^k-\psi_n^k(0))]/(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2}),\\ c_{2n}^k=[\varepsilon^{s_1}2^{s_2}(\psi_n^k(0)-A_n^k)-2^{s_2}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)]/(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2}),\\ \frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1=A_n^k=const.\end{gathered}\tag{20}$$

Из (17), (19), учитывая условие (16) будем иметь

$$\begin{gathered}f_n^k(\xi)=\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2}-\xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+\sqrt{2}(s_2-s_1)\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1-\\-\frac{(2\xi-\varepsilon)}{2\xi+\varepsilon}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\left\{\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi_1^{s_2-1}\xi_2^{3-s_2}-\xi_1^{s_1-1}\xi_2^{3-s_1})P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1\right\}\nu_n^k(\xi_2)d\xi_2,\end{gathered}\tag{21}$$

где

$$\begin{gathered}f_n^k(\xi)=(s_2-s_1)\{2\varphi_n^k(\xi)-\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-c_{1n}^k\xi^{s_1}-c_{2n}^k\xi^{s_2}+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}c_{1n}^k\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1+\\+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}c_{2n}^k\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1\right\}.\end{gathered}$$

Продифференцировав уравнение (21) по ξ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\chi_n^k(\xi)=\nu_n^k(\xi)+\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}G_n(\xi,\xi_1)\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1,\ \frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)\chi_n^k(\xi)=\frac{df_n^k}{d\xi},\ \sqrt{2}(s_2-s_1)G_n(\xi,\xi_1)=s_2\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-s_1\xi^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1}+$$
$$+\sqrt{2}(s_2-s_1)\frac{(\varepsilon^2-4\xi_1^2)}{\xi_1(2\xi+\varepsilon)^2}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]-\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}(\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-\xi_1^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1})-$$
$$-\int_{\xi_1}^{\xi}(\xi_2^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-\xi_2^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1})\left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)+\frac{(2\xi-\varepsilon)(\varepsilon^2-4\xi_2^2)}{\xi_2(2\xi+\varepsilon)^2}P''_\mu\left(\frac{\xi_2^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)\right]d\xi_2,$$

из которого найдем

$$\nu_n^k(\xi)=\chi_n^k(\xi)-\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}R_n(\xi,\xi_1;-1)\chi_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{22}$$

где $R_n(\xi,\xi_1;-1)$– резольвента ядра $G_n(\xi,\xi_1)$.

Далее из (20)–(22) имеем

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)^2A_n^k=\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\left[\frac{df_n^k}{d\xi_1}-\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi_1}R_n(\xi_1,\xi_2;-1)\frac{df_n^k}{d\xi_2}d\xi_2\right]d\xi_1, \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\frac{(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2})}{(s_2-s_1)}\frac{df_n^k}{d\xi}=\left\{\varepsilon^{s_2}2^{s_1}\left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_1\right)\xi^{s_1-1}+\right.\right.\\
\left.+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_1-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\right]-\varepsilon^{s_1}2^{s_2}\left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\right.\\
\left.+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_2\right)\xi^{s_2-1}+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_2-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\right]A_n^k+2\frac{d\varphi_n^k}{d\xi}+\\
+\left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_1\right)\xi^{s_1-1}+\right.\\
\left.+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_1-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\right]\left[2^{s_1}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-\varepsilon^{s_2}2^{s_1}\psi_n^k(0)\right]+\\
+\left[-\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_2\right)\xi^{s_2-1}+\right.\\
\left.+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_2-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\right]\left[\varepsilon^{s_1}2^{s_2}\psi_n^k(0)-2^{s_2}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right].\end{gathered} \tag{24}$$

Из (23), (24) однозначно определяется A_n^k, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$, при этом, если $\varphi_n^k(\xi)\equiv 0$, $\psi_n^k(0)\equiv 0$, то $A_n^k=0$. Таким образом, из (22), (19) единственным образом найдем $\tau_n^k(\xi)$, $\forall\xi\in[\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}]$. Следовательно, сначала решив задачу (8), (13) ($n=0$), а затем (9), (13)($n=1$) и т.д. найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)$ из (22), (19), (17),$k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$.

Итак, в области D_ε^+, показано, что

$$\int_H \rho(\theta)LudH=0. \tag{25}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0, V_0$– плотна в $L_2((t+\varepsilon,1-t))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$– плотна в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1, V_1$– плотна в $L_2((0,\frac{(1-\varepsilon)}{2}))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V=V_0\otimes H\otimes V_1$– плотна в $L_2(D_\varepsilon^+)$ [8]. Отсюда и из (25), следует, что $\int_{D_\varepsilon^+}f(r,\theta,t)LudD_\varepsilon^+=0$ и $Lu=0$, $\forall(r,\theta,t)\in D_\varepsilon^+$.

Учитывая оценки [9]

$$|k_n|\le c,\ n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\le cn^{\frac{m}{2}-p+1},\ c=const, \tag{26}$$

$j=\overline{1,m-1}$, $p=0,1,\ldots$, а также ограничения на заданные функций $\varphi(r,\theta),\psi(t,\theta)$, аналогично [2], можно показать, что ряд

$$\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta) \tag{27}$$

сходятся абсолютно и равномерно.

Следовательно, функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta) \tag{28}$$

является решением задачи (4), (2), (27) в области D_ε^+, где функций $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$, находятся по формуле (17), в которой $\nu_n^k(\xi)$, $\tau_n^k(\xi)$ определяются из (22), (19).

Теперь задачу T будем изучать в области D^-. Для этого сначала функцию $\tau_n^k(r)$ продолжим гладким образом на отрезок $[0,1]$ в виде

$$g_n^k(r)=\begin{cases}\tau_n^k(r),\ \varepsilon\le r\le 1\\ \tilde\tau_0^1(r),\ 0\le r\le\varepsilon,\\ n^{-l}\tilde\tau_n^k(r),\ 0\le r\le\varepsilon,\ k=\overline{1,k_n},\ n=1,2,\dots,\end{cases} \tag{29}$$

где $\tilde\tau_n^k(r)\in C([0,\varepsilon])$, причем $\tilde\tau_n^k(\varepsilon)=\tau_n^k(\varepsilon)$, $\tilde\tau_n^k(r)=r^\alpha\hat\tau_n^k(r)$, $\alpha\ge\frac{(m-1)}{2}$.

В силу оценок (26) ряд $u(r,\theta,0)=g(r,\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}g_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)$, сходятся абсолютно и равномерно, если $l>\frac{3m}{2}$.

В области D^- рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$L_1u\equiv u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_t+\sum_{i=1}^m d_i(r,\theta,t)u_{x_i}+e(r,\theta,t)u=0, \tag{30}$$

с условием

$$u|_{S_0}=g(r,\theta),\ u|_\Gamma=\psi(r,\theta). \tag{31}$$

Решение задачи (30), (31) будем искать в виде (6). Подставляя (6) в (30) будем иметь

$$\begin{gathered}\rho_0^1\bar u_{0rr}^1-\rho_0^1\bar u_{0t}^1+\left(\frac{(m-1)}{r}\rho_0^1+\sum_{i=0}^m d_{i0}^1\right)\bar u_{0r}^1+\widetilde{e}_0^1\bar u_0^1+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar u_{nrr}^k-\rho_n^k\bar u_{nt}^k+\left(\frac{(m-1)}{r}\rho_n^k+\sum_{i=1}^m d_{in}^k\right)\bar u_{nr}^k+\right.\\ \left.+\left[\widetilde{e}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^m(\widetilde{d}_{in-1}^k-nd_{in}^k)\right]\bar u_n^k\right\}=0.\end{gathered} \tag{32}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar u_{0rr}^1-\rho_0^1\bar u_{0t}^1+\frac{(m-1)}{r}\rho_0^1\bar u_{0r}^1=0, \tag{33}$$

$$\rho_1^k\bar u_{1rr}^k-\rho_1^k\bar u_{1t}^k+\frac{(m-1)}{r}\rho_1^k\bar u_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar u_1^k=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1\bar u_{0r}^1+\widetilde{e}_0^1\bar u_0^1\right),n=1,k=\overline{1,k_1}, \tag{34}$$

$$\begin{gathered}\rho_n^k\bar u_{nrr}^k-\rho_n^k\bar u_{nt}^k+\frac{(m-1)}{r}\rho_n^k\bar u_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar u_n^k=\\ =-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m d_{in-1}^k\bar u_{n-1r}^k+[\widetilde{e}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^m(\widetilde{d}_{in-2}^k-(n-1)d_{in-1}^k)]\bar u_{n-1}^k\right\},\\ k=\overline{1,k_n},\quad n=2,3,\dots.\end{gathered} \tag{35}$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar u_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$.– решение системы (33)–(35), то оно является и решением уравнения (32).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (33)–(35) можно представить в виде

$$\bar u_{nrr}^k-\bar u_{nt}^k+\frac{(m-1)}{r}\bar u_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar u_n^k=\bar f_n^k(r,t), \tag{36}$$

где $\bar f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar f_0^1(r,t)\equiv\equiv 0$.

В (36) произведя замену переменных $\bar u_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ получим

$$Lu_n^k\equiv u_{nrr}^k-u_{nt}^k+\frac{\bar\lambda_n}{r^2}u_n^k=f_n^k(r,t),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots, \tag{37}$$

при этом краевое условие (31) запишется в виде

$$u_n^k(r,0) = g_n^k(r),\ u_n^k(1,t) = \psi_n^k(t),\ k = \overline{1,\ k_n},\ n = 0,1,\dots, \tag{38}$$

$$f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r,t).$$

Произведя замену $v_n^k(r,t) = u_n^k(r,t) - \psi_n^k(t)$ задачу (37), (38) приведем к следующей задаче

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{39}$$

$$v_n^k(r,0) = \tilde{g}_n^k(r),\ v_n^k(1,t) = 0,\ 0 < r < 1, \tag{40}$$

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = f_n^k(r,t) + \psi_{nt}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi_n^k(t),\ \tilde{g}_n^k(r) = g_n^k(r) - \psi_n^k(0).$$

Решение задачи (39), (40) ищем в виде

$$v_n^k(r,t) = v_{1n}^k + v_{2n}^k, \tag{41}$$

где $v_{1n}^k(r,t)$– решение задачи

$$Lv_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{42}$$

$$v_{1n}^k(r,0) = 0,\ v_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{43}$$

а $v_{2n}^k(r,t)$– решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \tag{44}$$

$$v_{2n}^k(r,0) = \tilde{g}_n^k(r),\ v_{2n}^k(1,t) = 0,\ 0 < r < 1. \tag{45}$$

Решение вышеуказанных задач, аналогично [11], рассмотрим в виде

$$v_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{46}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) R_s(r),\ \tilde{g}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r). \tag{47}$$

Подставляя (46) в (42),(43), с учетом (47), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0,\ \ 0 < r < 1, \tag{48}$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{49}$$

$$T_{st} + \mu T = -a_{s,n}^k(t), \tag{50}$$

$$T_s(0) = 0. \tag{51}$$

Ограниченное решение задачи (48), (49) имеет вид [7]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r), \tag{52}$$

$\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $J_\nu(z)$– функция Бесселя первого рода, $\gamma_{s,n}$– ее нули, $\mu = \gamma_{s,n}^2$.

Решение задачи (50), (51) записывается в виде

$$T_s(t) = -\int_0^t a_{s,n}^k(\xi) \exp[-\gamma_{s,n}^2(t-\xi)] d\xi. \tag{53}$$

Подставляя (52) в (47) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ \ 0 < r < 1, \tag{54}$$

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{g}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ \ 0 < r < 1. \tag{55}$$

Ряды (54), (55)- разложения в ряды Фурье-Бесселя ([12]), если

$$a_{s,n}^k(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \tag{56}$$

$$b_{s,n}^k = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}_n^k(\xi) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \tag{57}$$

где $\gamma_{s,n}, s = 1, 2, \ldots -$ положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (52), (53) получим решение задачи (42), (43) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r, t) = -\sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r) \{ \int_0^t a_{s,n}^k(\xi) \exp[-\gamma_{s,n}^2 (t - \xi)] d\xi \}, \tag{58}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (56).

Далее, подставляя (46) в (44), (45) будем иметь

$$T_{st} + \gamma_{s,n}^2 T = 0,$$

решением которого является

$$T_s(t) = \exp(-\gamma_{s,n}^2 t). \tag{59}$$

Из (52), (59), с учетом (47), получим

$$\upsilon_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} b_{s,n}^k J_\nu(\gamma_{s,n} r) \exp(-\gamma_{s,n}^2 t), \tag{60}$$

где $b_{s,n}^k$ находится из (57).

Следовательно, сначала решив задачу (33), (38) ($n = 0$), а затем (34), (38)($n = 1$) и т.д. найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r, t)$ из (41), где $\upsilon_{1n}^k(r, t)$, $\upsilon_{2n}^k(r, t)$ определяются из (58), (60), $k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$.

Итак, в области D^- имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L_1 u dH = 0. \tag{61}$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0, V_0-$ плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)-$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1, V_1-$ плотна в $L_2((t_0, 0))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1-$ плотна в $L_2(D^-)$. Отсюда и из (61) следует, что $\int_{D^-} f(r, \theta, t) L_1 u dD^- = 0$ и $L_1 u = 0, \ \forall (r, \theta, t) \in D^-$.

Таким образом, функция (28) есть решение задачи (30), (31) в области D^-, где функций $u_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$, находятся из (41), которая в силу (29) является неоднозначным.

Учитывая ограничения на заданные функций $\varphi(r, \theta), \psi(t, \theta)$, а также оценки (26), аналогично [6, 11], можно показать, что полученные неоднозначные решения вида (28) принадлежит искомому классу. Теорема доказана.

Список литературы

1. Алдашев С. А. 1994. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы. Гылым, 170.

2. Алдашев С. А. 2015. Неединственность решения многомерной задачи Трикоми для гиперболо-параболического уравнения. Украинский математический вестник, 12 (1): 1–10.

3. Алдашев С. А. 1998. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений. Дифференц. уравнения, 34 (1): 64–68.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1974. Высшие трансцендентные функции. М. Наука, 295.

5. Бицадзе А. В. 1959. Уравнения смешанного типа. М. Изд. АН СССР, 164.

6. Врагов В. Н. 1983. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. НГУ, 84.

7. Камке Э. 1965. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. Наука, 703.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа. М. Наука, 543.
9. Михлин С. Г. 1962. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. Физматгиз, 254.
10. Нахушев А. М. 2006. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М. Наука, 287.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1977. Уравнения математической физики. М. Наука, 659.
12. Copson E. T. 1958. On the Riemann-Green function. J.Rath Meeh and Anal., 1: 324–348.

References

1. Aldashev S. A. 1994. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations, Almaty., Gylym, 170 (in Russian).
2. Aldashev S. A. 2015. Nonuniqueness of a solution of the multidimensional Tricomi problem for a hyperbolic-parabolic equation. Ukrainian Mathematical Bulletin, 12 (1): 1–10 (in Russian).
3. Aldashev S. A. 1998. On Darboux problems for a class of multidimensional hyperbolic equations, 34 (1): 65-–69 (in Russian).
4. Bateman H., Erdelyi A. 1974. Vysshie transtsendentnye funktsii., [Higher Transcendental Functions]. M. Nauka, 295 (in Russian).
5. Bitsadze A. V. 1959. The equations of mixed type. M., Academy of Science USSR Publishing house, 164 (in Russian).
6. Vragov V. N. 1983. Kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki., [Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics] Novosibirsk. NSU, 84 (in Russian).
7. Kamke E. 1965. Handbook on ordinary differential equations. M., Nauka, 703 (in Russian).
8. Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. 1976. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. M. Nauka, 542 (in Russian).
9. Mikhlin S. G. 1962. Multidimensional singular integrals and integral equations, M., Fizmatgiz, 254 (in Russian).
10. Nakhushev A. M. 2006. Problems with displacement for partial differential equations, M., Nauka, 287 (in Russian).
11. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. 1977. Uravneniya matematicheskoy fiziki., [Equations of Mathematical Physics]. M. Nauka, 659 (in Russian).
12. Copson E. T. 1958. On the Riemann-Green function. J. Rath Meeh and Anal., 1: 324–348 (in Russian).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 01.12.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Алдашев Серик Аймурзаевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан

Ул. Пушкина, 125, Аматы, 050010, Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Roytenberg – PhD in Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan