Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №3. С. 230–234.

УДК 517.55
MSC 32A05.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-230-234

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛЫ ДЕКАРТА – ЭЙЛЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Е. Н. Михалкин

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Сибирский федеральный университет,
Красноярск, 660041, Россия

E-mail: mikhalkin@bk.ru

Аннотация. В настоящее время развитие алгоритмических и компьютерных методов приводит к уточнению формул для решения полиноминальных уравнений. Рассматривается алгебраическое уравнение степени четыре с одним параметром. Такое уравнение принято называть триноминальным. Для него известны методы решения, известные как методы Феррари и Декарта – Эйлера. Используется подход, основанный на интегральном представлении Меллина и Белардинелли, а также использовании обратного преобразования Меллина. Доказывается формула Декарта – Эйлера для решения рассматриваемого уравнения с использованием аппарата гипергеометрических функций.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, гипергеометрический ряд, интеграл Меллина – Барнса.

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Для цитирования: Михалкин Е. Н. 2021. Гипергеометрическая интерпретация формулы Декарта – Эйлера. Прикладная математика & Физика. 53(3): 230–234. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-230-234.

HYPERGEOMETRIC INTERPRETATION OF THE DESCARTES-EULER FORMULA TO SOLVE THE FOURTH DEGREE EQUATION

Evgeniy Mikhalkin

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail: mikhalkin@bk.ru
Received September, 4, 2020

Abstract. In modern mathematics by development of algorithmic and computer methods formulas for solving polynomial equations are considered in more details. In the paper a polynomial equation of fourth power with one parameter is considered. Such equations are called trinomial. For it such methods of solution are known as methods of Ferrari, Descartes and Euler. An approach is used based on Mellin and Belardinelli integral representations, and also usage of the inverse Mellin transform. As a main result the formula is proved for solutions obtained by Euler – Descartes method with representations of series for hypergeometric functions.

Key words: Algebraic equation. Hypergeometric series. Mellin-Barnes integral.

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2020-1534/1).

For citation: Mikhalkin E. 2021. Hypergeometric interpretation of the Descartes – Euler formula. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 230–234. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-230-234.

1. Введение. В настоящее время известны несколько формул для решения алгебраического уравнения четвертой степени. В литературе наиболее известной из них является формула Феррари [3]. Менее известной из таких формул осталась формула (метод) Декарта – Эйлера.

Напомним суть метода Декарта – Эйлера [2]. Как известно, алгебраическое уравнение четвертой степени с помощью линейной замены сводится к уравнению

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0, \tag{1}$$

т. е. к уравнению, в котором отсутствует моном при третьей степени. Далее находятся корни z_0, z_1 z_2 кубического уравнения $z^3 + \dfrac{a}{2}z^2 + \dfrac{a^2-4c}{16}z - \dfrac{b^2}{64} = 0$. В итоге корни уравнения (1) выражаются через z_0, z_1 z_2 по формуле $\sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}$.

Формула Декарта – Эйлера была доказана с применением алгебраических методов. В частности, Эйлер для ее доказательства использовал свойства симметрических функций.

В настоящей статье выявляется происхождение радикалов $\sqrt{z_0}$, $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$ в формуле Декарта – Эйлера на языке обобщенных гипергеометрических рядов для уравнения с одним параметром. Как следствие, дается альтернативное доказательство этой формулы с использованием аппарата гипергеометрических рядов.

2. Интегральные представления Меллина и Белардинелли. Любое алгебраическое уравнение степени n с помощью элементарных преобразований сводится к следующему приведенному виду

$$y^n + x_s y^{n_s} + \ldots + x_1 y^{n_1} - 1 = 0, \tag{2}$$

где $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_s < n_{s+1} = n$. В 1921 г. Меллином [6] было найдено интегральное представление, а также разложение в гипергеометрический ряд для решения $y(x) = y(x_1, \ldots, x_s)$ этого уравнения с условием $y(0) = 1$. Такое решение Меллин назвал *главным* решением уравнения (2), мы будем его обозначать $y_0(x)$. Все остальные решения находятся из главного по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon^j y(x_1\varepsilon^{jn_1}, \ldots, x_s\varepsilon^{jn_s}), \ j = 1, \ldots, n-1,$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень из 1 степени n. Отметим, что главное решение соответствует значению $j = 0$.

Меллин привел формулы не только для главного решения $y_0(x)$, но и для любой его положительной степени. Так, гипергеометрический ряд для степени $\mu > 0$ следующий:

$$y_0^\mu(x) = \frac{\mu}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^s_{\geq 0}} \frac{(-1)^{|k|}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{n_1}{n}k_1 + \ldots + \frac{n_s}{n}k_s\right)}{k_1!\ldots k_s!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{n} - \frac{n_1'}{n}k_1 - \ldots - \frac{n_s'}{n}k_s + 1\right)} x_1^{k_1}\ldots x_s^{k_s}, \tag{3}$$

где Γ обозначает гамма-функцию Эйлера, $k = (k_1, \ldots, k_s)$, а $n_j' = n - n_j$. Ряд (3) сходится в некоторой окрестности начала координат $x = 0$.

Перейдем к отрицательной степени решения (2). В статье [5] была указана формула для отрицательной степени главного решения уравнения (2) в виде интеграла Меллина – Барнса. Эта интегральная формула имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y_0^\mu(x)} = \frac{1}{(2\pi i)^s} \int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^s} \frac{\frac{\mu}{n}\Gamma(\frac{\mu}{n} - \frac{n_1'}{n}z_1 - \ldots - \frac{n_s'}{n}z_s)\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_s)}{\Gamma(\frac{\mu}{n} + \frac{n_1}{n}z_1 + \ldots + \frac{n_s}{n}z_s + 1)} (-x)^{-z} dz, \tag{4}$$

здесь γ – точка из симплекса $\sigma = \{u \in \mathbb{R}^s_+ : n_1'u_1 + \ldots + n_s'u_s < \mu\}$.

3. Доказательство формулы Декарта – Эйлера для триномиального уравнения с помощью гипергеометрических рядов. В этом параграфе мы докажем формулу Декарта – Эйлера для решения $z(t)$ уравнения

$$z^4 + tz - 1 = 0. \tag{5}$$

Следуя методу Декарта – Эйлера, описанному во введении, для нахождения корней уравнения (5) нужно сначала решить кубическое уравнение

$$64r^3 + 16r - t^2 = 0. \tag{6}$$

Далее показать, что корни исходного уравнения выражаются через корни r_0, r_1, r_2 уравнения (6) по формуле

$$z(t) = r_0(t)^{\frac{1}{2}} + r_1(t)^{\frac{1}{2}} + r_2(t)^{\frac{1}{2}}.$$

Напомним, что *обобщенным гипергеометрическим (неконфлуэнтным) рядом Гаусса* называется степенной ряд

$${}_nF_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_n\\ \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\end{matrix}\middle| y\right) = \frac{\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha_1)\ldots\Gamma(k+\alpha_n)}{k!\Gamma(k+\beta_1)\ldots\Gamma(k+\beta_{n-1})} y^k,$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. Областью сходимости этого ряда является единичный круг $|y| < 1$ (см. [1], с. 183).

Согласно [4], главное решение $z_0(t)$ уравнения (5) допускает представление в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов Гаусса:

$$z_0(t) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\end{matrix}\middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) - \frac{t}{4}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\end{matrix}\middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) - \frac{t^2}{32}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{5}{12}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12}\\ \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\end{matrix}\middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right), \tag{7}$$

сходящихся при $|t| < \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$. Мы покажем, что сумма $r_0(t)^{\frac{1}{2}} + r_1(t)^{\frac{1}{2}} + r_2(t)^{\frac{1}{2}}$, где r_0, r_1, r_2 – корни уравнения (6), тоже представима в виде суммы (7).

Для краткости письма введем обозначения

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\end{matrix}\middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) =: {}_3F_2{}^{(0)}(t),\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\end{matrix}\middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) =: {}_3F_2{}^{(1)}(t),\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{5}{12}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12}\\ \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\end{matrix}\middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) =: {}_3F_2{}^{(2)}(t). $$

Определим корни уравнения (6) как ветви с условиями: $r_0(0) = \frac{i}{2}$, $r_1(0) = 0$, $r_2(0) = -\frac{i}{2}$. В этих обозначениях степени $r_j(t)^{\frac{1}{2}}$ допускают следующее представление.

Теорема 3.1. *В круге $|t| < \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$ степени $r_j(t)^{\frac{1}{2}}$, $j = 0,1,2$ корней уравнения (6) выражаются через обобщенные гипергеометрические ряды по формулам:*

$$ r_0(t)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\,{}_3F_2{}^{(0)}(t) + \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{32}t^2\,{}_3F_2{}^{(2)}(t)\right),\ r_1(t)^{\frac{1}{2}} = \frac{t}{4}\,{}_3F_2{}^{(1)}(t), $$

$$ r_2(t)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\,{}_3F_2{}^{(0)}(t) + \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{32}t^2\,{}_3F_2{}^{(2)}(t)\right). $$

Доказательство теоремы основано на применении формул Белардинелли [5] и Меллина [6], представляющих решение уравнения

$$ y^3 + xy - 1 = 0, \tag{8} $$

к которому сводится (6) с помощью замены $y = \frac{4r}{t^{\frac{2}{3}}}$, $x = \frac{4}{t^{\frac{4}{3}}}$.

Заметим, что если $y_0(x)$ удовлетворяет (8), то для $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ справедливо следующее равенство:

$$ y_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{x}{y_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y_0^{\frac{5}{2}}}. \tag{9} $$

Согласно формуле (4), отрицательная степень уравнения (8) допускает представление в виде интеграла Меллина – Барнса

$$ \frac{1}{y_0(x)^{\mu}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{\mu}{3}\Gamma(\frac{\mu}{3} - \frac{2}{3}z)\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{\mu}{3} + 1 + \frac{1}{3}z)}(-x)^{-z}\,dz, $$

где $\gamma + i\mathbb{R}$ – вертикальная прямая, разделяющая полюса гамма-функций, стоящих в числителе подынтегральной функции. Вычисляя последний интеграл как сумму вычетов со знаком "минус" в полюсах $z = \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}k$ (происходящих от $\Gamma(\frac{\mu}{3} - \frac{2}{3}z)$ и расположенных справа от контура интегрирования), получим

$$ \frac{1}{y_0(x)^{\mu}} = \frac{\mu}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k + \frac{\mu}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{\mu}{2} + 1)}(-x)^{-\frac{3}{2}k - \frac{\mu}{2}}. $$

Подставляя найденные представления для $\frac{1}{y_0(x)^{\mu}}$ в (9) при $\mu = \frac{3}{2}$, $\mu = \frac{5}{2}$ и заменив во втором ряде $k \to k-1$, получим следующее представление для $y_0^{\frac{1}{2}}$:

$$ y_0(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k + \frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{7}{4})}(-x)^{-\frac{3}{2}k} + \frac{5}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k - \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{7}{4})}(-x)^{-\frac{3}{2}k}, $$

которое, после выделения общего множителя $\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k - \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{7}{4})}(-x)^{-\frac{3}{2}k}$ приводится к виду

$$ y_0(x)^{\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{16}(-x)^{\frac{1}{4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k - \frac{1}{4})(2k+3)}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{7}{4})}(-x)^{-\frac{3}{2}k}. $$

После применения известной формулы для гамма-функции $\frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$, запишем выражение для $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ в наиболее кратком виде:

$$ y_0(x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k - \frac{1}{4})}{k!\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})}\frac{1}{(-x^3)^{\frac{k}{2}}}. \tag{10} $$

Далее представим последний ряд в виде суммы обобщенных гипергеометрических рядов. Для этого применим формулу Гаусса – Лежандра к гамма-функции, стоящей в числителе, а также к $k!$:

$$\Gamma\Big(\frac{3}{2}k-\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{2\pi\, 3^{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}k}}\Gamma\Big(\frac{k}{2}-\frac{1}{12}\Big)\Gamma\Big(\frac{k}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{k}{2}-\frac{1}{12}+\frac{7}{12}\Big),$$

$$k!=\Gamma(k+1)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{3}{2}-k}}\Gamma\Big(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{k}{2}+1\Big).$$

Теперь, представив $\frac{k}{2}=l+\frac{s}{2}$, где $s=0,1$, запишем ряд (10) в виде суммы двух гипергеометрических рядов

$$-\frac{1}{4}\frac{(-x)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{3}{4}}\,2^{\frac{1}{2}}}\sum_{s=0}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+\frac{s}{2}-\frac{1}{12})\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{7}{12})}{\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(l+\frac{s}{2}+1)+\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{3}{4})}(-1)^{-l-\frac{s}{2}}\Big(\frac{27}{4x^3}\Big)^{l+\frac{s}{2}}.$$

Так как при $s=0$ имеем $\Gamma(l+\frac{s}{2}+1)=l!$, а при $s=1$ получаем $\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{1}{2})=l!$, то последнее выражение несложно привести к виду

$$-\frac{1}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}\left(-4\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\right|-\frac{27}{4x^3}\right)+\frac{1}{(-1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\frac{5}{12},\frac{3}{4},\frac{13}{12}\\ \frac{5}{4},\frac{3}{2}\end{matrix}\right|-\frac{27}{4x^3}\right)\right),$$

приняв $\arg(-1)=\pi$, запишем представление для $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ в окончательном виде:

$$y_0(x)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\right|-\frac{27}{4x^3}\right)+\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{4x^{\frac{3}{2}}}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\frac{5}{12},\frac{3}{4},\frac{13}{12}\\ \frac{5}{4},\frac{3}{2}\end{matrix}\right|-\frac{27}{4x^3}\right)\right). \tag{11}$$

Теперь заметим, что другую ветвь решения уравнения (8) можем найти по формуле

$$y_{0_j}(x)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon_j^{\frac{1}{2}}y_0(\varepsilon_j x)^{\frac{1}{2}},$$

где $\varepsilon_j=e^{\frac{2\pi i}{3}j}$. Так, при $j=1$ получим формулу для другой ветви уравнения (8):

$$y_{0_1}(x)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\right|-\frac{27}{4x^3}\right)+\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{4x^{\frac{3}{2}}}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\frac{5}{12},\frac{3}{4},\frac{13}{12}\\ \frac{5}{4},\frac{3}{2}\end{matrix}\right|-\frac{27}{4x^3}\right)\right). \tag{12}$$

Отметим, что значения $j=2,3$ определяют выражения для $y_{0_2}(x)^{\frac{1}{2}}$ и $y_{0_3}(x)^{\frac{1}{2}}$ со свойствами: $y_{0_2}(x)^{\frac{1}{2}}=-y_0(x)^{\frac{1}{2}}$, $y_{0_3}(x)^{\frac{1}{2}}=-y_{0_1}(x)^{\frac{1}{2}}$. Другими словами, $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ и $y_{0_2}(x)^{\frac{1}{2}}$ представляют одну из ветвей решения уравнения (8), а $y_{0_1}(x)^{\frac{1}{2}}$ и $y_{0_3}(x)^{\frac{1}{2}}$ – другую, и отличаются лишь знаками. В дальнейшем будем обозначать указанные ветви $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$, $y_1(x)^{\frac{1}{2}}$, соответственно, и рассматривать их как двузначные функции.

Для нахождения оставшейся ветви решения уравнения (8) (обозначим ее $y_2(x)$) воспользуемся представлением Меллина в виде ряда (3), который для рассматриваемого уравнения принимает вид

$$y_2(x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+3k)}{\Gamma(2k+\frac{3}{2})}x^{-3k-\frac{1}{2}}.$$

Далее, рассуждая как и выше, несложно представить последний ряд в виде

$$y_2(x)^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}\\ \frac{3}{4},\frac{5}{4}\end{matrix}\right|-\frac{27}{4x^3}\right). \tag{13}$$

Теперь перейдем от уравнения (8) к (6) с помощью указанных выше формул: $y=\frac{4r}{t^{\frac{2}{3}}}$, $x=\frac{4}{t^{\frac{4}{3}}}$. В результате этого, выражение (11) для $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ преобразуется в $r_0(t)^{\frac{1}{2}}$, которое указано в формулировке теоремы, а выражения (12) и (13) для $y_{0_1}(x)^{\frac{1}{2}}$ и $y_2(x)^{\frac{1}{2}}$ примут, соответственно, вид $r_2(t)^{\frac{1}{2}}$ и $r_1(t)^{\frac{1}{2}}$. Тем самым, Теорема 3.1. доказана.

Обозначим однозначные ветви $(r_j)^{\frac{1}{2}}$, $j=0,1,2$ следующим образом:

$$r_0(t)^{\frac{1}{2}}_{\pm}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{\frac{\pi i}{4}}\,{}_3F_2{}^{(0)}(t)+\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{32}t^2\,{}_3F_2{}^{(2)}(t)\Big),\ r_1(t)^{\frac{1}{2}}_{\pm}=\mp\frac{t}{4}\,{}_3F_2{}^{(1)}(t),$$

$$r_2(t)^{\frac{1}{2}}_{\pm}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-\frac{\pi i}{4}}\,{}_3F_2{}^{(0)}(t)+\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{32}t^2\,{}_3F_2{}^{(2)}(t)\Big).$$

В этом случае сумма

$$r_0(t)_+^{\frac{1}{2}} + r_1(t)_+^{\frac{1}{2}} + r_2(t)_+^{\frac{1}{2}}$$

совпадает с правой частью (7), т. е. представляет собой главное решение первоначального уравнения (5).

Если учесть, что остальные решения этого уравнения получаются из главного по формуле

$$z_j(t) = e^{\frac{\pi i}{2} j} z(e^{\frac{\pi i}{2} j} t), \ \ j = 1, 2, 3,$$

то нетрудно записать остальные решения уравнения (5):

$$z_1(t) = r_0(t)_+^{\frac{1}{2}} + r_1(t)_-^{\frac{1}{2}} + r_2(t)_-^{\frac{1}{2}}, \ z_2(t) = r_0(t)_-^{\frac{1}{2}} + r_1(t)_+^{\frac{1}{2}} + r_2(t)_-^{\frac{1}{2}}, \ z_3(t) = r_0(t)_-^{\frac{1}{2}} + r_1(t)_-^{\frac{1}{2}} + r_2(t)_+^{\frac{1}{2}}.$$

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции, Том 1. М., Наука, 296.
2. Корн Г., Корн Т. 2003. Справочник по математике для научных работников и инженеров. СПб, Лань, 832.
3. Курош А.Г. 2021. Курс высшей алгебры. СПб., Лань, 432.
4. Михалкин Е. Н. 2012. Некоторые формулы для решений триномиальных и тетраномиальных алгебраических уравнений. Журнал СФУ. Сер. Матем. и физ., 5(2): 230–238.
5. Belardinelli G. 1960. Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébrigues générales. Paris: Gauthier-Villars. Memorial des Sciences Mathématiques, 74.
6. Mellin H. J. 1921. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 172: 658-661.

References

1. Beytmen G., Yerdeji A. 1973. Vysshie transtsendentnye functsii [Higher transcendental functions], Vol. 1. M., Nauka, 296.
2. Korn G., Korn T. 2003. Spravochnik po matematike dl'a nauchnyh rabotnikov i inzhenerov [Mathematical handbook for scientists and engineers]. SPb., Lan', 832.
3. Kurosh A. G. 2021. Kurs vysshey algebry [Course of higher algebra]. SPb., Lan', 432.
4. Mikhalkin E. N. 2012. Nekotorye formuly dl'a resheniy trinomial'nykh i tetranomial'nykh algebraicheskikh uravneniy [Certain formulas for solutions to trinomial and tetranomial algebraic equations]. Journal Siberian Fedederal University. Math. Phys., 5(2): 230–238.
5. Belardinelli G. 1960. Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébrigues générales. Paris: Gauthier-Villars. Memorial des Sciences Mathématiques, 74.
6. Mellin H. J. 1921. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 172: 658-661.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 04.09.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Михалкин Евгений Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Сибирский федеральный университет

http://orcid.org/0000-0002-1410-9117
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия
E-mail: mikhalkin@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Evgeny N. Mikhalkin – Doctor of Sciences Phys. Math., Associate Professor, Professor, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia