Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №2. С. 114–124.

УДК 517.44
MSC 44A10.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-114-124

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТИПА ЛАПЛАСА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ

О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником

Московский государственный технологический университет (Станкин),
Москва, 127055, Россия
Пензенский государственный университет,
Пенза, 449926, Россия

E-mail: yaremki8@gmail.com

Аннотация. Развивается теория интегралов и производных дробного порядка. Построен аналог операционного исчисления для дифференциального оператора с кусочно-постоянными коэффициентами. Предложены различные конструкции обобщенного преобразования Лапласа. При помощи операторов преобразования установлена связь интегральных преобразований Меллина – Лапласа с обобщенным интегральным преобразованием Лапласа. Найден изоморфизм пространства оригиналов и пространства обобщенных оригиналов. Установлены формулы обращения типа Меллина – Лапласа. Доказаны теоремы о дифференцировании обобщенного оригинала и другие. Дано определение обобщенной свертки и установлена формула для ее вычисления, указана связь обобщенной и классической свертки. На основе понятия обобщенной свертки дано определение обобщенного интеграла и обобщенной производной дробного порядка. Установлены соотношения между обобщенными интегралами дробного порядка и интегралами Римана – Лиувилля дробного порядка. Для модельного уравнения теплопроводности с кусочно постоянным коэффициентом решена задача вычисления плотности теплового потока. Тепловой поток выражен в виде обобщенной производной порядка 1/2 по времени от измеренной зависимости температуры на границе.

Ключевые слова: интеграл и производная дробного порядка, обобщенное интегральное преобразование Лапласа, оператор преобразования, свертка функций.

Для цитирования: Яремко О. Э., Яремко Н. Н. 2021. Интегралы и производные дробного порядка на основе интегральных преобразований типа Лапласа с приложениями. Прикладная математика & Физика, 52(2): 114–124. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-114-124.

INTEGRALS AND DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDER BASED ON LAPLACE TYPE INTEGRAL TRANSFORMATIONS WITH APPLICATIONS

Oleg Iaremko, Natalia Iaremko

Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik

Moscow State Technological University (Stankin),
Moscow, 127055, Russia,
Penza State University,
Penza, 449926, Russia
E-mail: yaremki@mail.ru
Received May, 17, 2020

Abstract. Integrals and derivatives of fractional order theory is being developed. An analogue of the operational calculus is constructed for a differential operator with piecewise constant coefficients. Various constructions of the generalized Laplace transform are proposed. The transformation operators establish a connection between the Mellin – Laplace integral transformations and the generalized Laplace integral transformation. Isomorphism between the space of originals and the space of generalized originals is found. Mellin – Laplace type inversion formulas are established. Theorems on the differentiation of the generalized original and others are proved. A definition of a generalized convolution is given and a formula for its calculation is established, a connection between the generalized and classical convolution is indicated. On the basis of the concept of generalized convolution, a definition of a generalized integral and a generalized fractional derivative is given. Relations between generalized fractional integrals and Riemann-Liouville integrals of fractional order are established. For a model equation of heat conduction with a piecewise constant coefficient, the problem of calculating the heat flow transfer is solved. The heat flow is expressed as a generalized time derivative of the order of 1/2 of the measured temperature dependence at the boundary.

Key words: fractional integral and derivative, generalized integral Laplace transform, transformation operator, convolution of functions.

For citation: Oleg Iaremko, Natalia Iaremko. 2021. Integrals and derivatives of fractional order based on Laplace type integral transformations with applications. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 114–124. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-114-124.

Введение. Пусть функция $\tilde{f}(t)$ задана на промежутке $[0,\infty)$ и является оригиналом, а функция $\tilde{F}(p)$ ее изображение. Интеграл Римана – Лиувилля можно определить [15] формулой

$$\tilde{I}^{\alpha}\tilde{f}(t)=\tilde{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^{\alpha}}\tilde{F}(p)\right].$$

С помощью теоремы о свертке последняя формула преобразуется к форме Римана – Лиувилля

$$\tilde{I}^{\alpha}\tilde{f}(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{t}\tilde{f}(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau,$$

где Γ — гамма-функция, α — комплексное число в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha>0$. Для функции $\tilde{f}(t)$ определенной на промежутке $[0,\infty)$ производная дробного порядка α определяется по правилу

$$\tilde{D}^{\alpha}[\tilde{f}(t)]=D^{n}I^{n-\alpha}[\tilde{f}(t)],n=[\alpha]+1.$$

Таким образом, дифференциальное исчисление дробного порядка можно построить на основе операционного исчисления. Теория дифференциального и интегрального исчисления дробного порядка рассматривается в работах [10-11], [15]-[16].

В настоящей статье авторы предлагают обобщенное операционное исчисление на основе дифференциального оператора с кусочно-постоянными коэффициентами

$$D_t=\frac{1}{x'(t)}\frac{d}{dt},$$

где функция $x=x\,(t)$ имеет вид линейного сплайна с узлами $t_0=0,t_k,k=1,..,\ n$

$$x\,(t)=a_1t\,(H\,(t-t_0)-H\,(t-t_1))+(a_2\,(t-t_1)+a_1\Delta t_1)\,(H\,(t-t_1)-H\,(t-t_2))+$$

$$+\,(a_3\,(t-t_2)+a_2\Delta t_2+a_1\Delta t_1)\,(H\,(t-t_1)-H\,(t-t_2))+\ldots$$

$$+\,(a_{n+1}\,(t-t_n)+a_n\Delta t_n+\ldots+a_1\Delta t_1)\,H\,(t-t_n)\,,$$

здесь $\Delta t_k=t_k-t_{k-1},t_0=0$. Оператор D_t возникает при моделировании переходных процессов.

Методы. 1.1 Обобщенное преобразование Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Методы интегральных преобразований типа Лапласа можно использовать для построения обобщенного дифферинтеграла Римана – Лиувилля. Обобщениям операционного исчисления посвящены работы [1], [3], [4], [6]-[9], [12]-[14], [17]-[20]. Идею конструирования ядер обобщенных преобразований Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем проиллюстрируем на примере классического преобразования Лапласа. Как известно, ядро в формуле обращения Меллина [20] имеет вид $K(t,p)=e^{pt}$, и, значит, удовлетворяет уравнению

$$K_t'(t,p)=pK(t,p),0<t<\infty$$

и начальному условию

$$K(0,p)=1.$$

Будем конструировать ядро $K(t,p)$ обобщенного преобразования Лапласа в виде решения сепаратной системы дифференциальных уравнений

$$K_t'(t,p)=a_kpK(t,p),t_{k-1}<t<t_k,k=1,2,...,n+1;t_0=0,t_{n+1}=\infty,$$

удовлетворяющих начальному условию

$$K(0,p)=1$$

и условиям непрерывности в точках деления $t_k,k=1,2,...,n$

$$K(t_k-0,p)=K(t_k+0,p).$$

Вычисления приводят к формуле:

$$K(t,p) = e^{a_1 pt}, 0 < t < t_1,$$
$$K(t,p) = e^{a_2 p(t-t_1)+\Delta t_1}, t_1 < t < t_2,$$
$$\ldots$$
$$K(t,p) = e^{-p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n\Delta t_n+\ldots+a_1\Delta t_1)}, t_n < t,$$

где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Пусть функция-оригинал $f(t)$ определена на промежутке $[0,\infty)$. Будем искать функцию-изображение $F(p)$ как решение интегрального уравнения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} K(t,p)F(p)dp, 0 \le t \le t_1.$$

В развернутом виде получаем сепаратную систему интегральных уравнений

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pta_1}F(p)dp, 0 \le t \le t_1,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)}F(p)dp, t_1 \le t \le t_2, \ \ldots \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n\Delta t_n+\ldots+a_1\Delta t_1)}F(p)dp, t_n \le t.$$

Выполним замену переменного в последней формуле $x = x(t)$, где функция $x = x(t)$ имеет вид линейного сплайна с узлами $t_0 = 0, t_k, k = 1,..,\ n,$

$$x(t) = a_1 t\left(H(t-t_0) - H(t-t_1)\right) + \left(a_2(t-t_1) + a_1\Delta t_1\right)\left(H(t-t_1) - H(t-t_2)\right) +$$
$$+\left(a_3(t-t_2) + a_2\Delta t_2 + a_1\Delta t_1\right)\left(H(t-t_1) - H(t-t_2)\right) + \ldots$$
$$+\left(a_{n+1}(t-t_n) + a_n\Delta t_n + \ldots + a_1\Delta t_1\right)H(t-t_n),$$

здесь $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, t_0 = 0$. График сплайн-функции $x = x(t)$ является ломаной с вершинами в точках

$$M_0(0,0), M_1(t_1, a_1\Delta t_1), M_2(t_2, a_2\Delta t_2 + a_1\Delta t_1),$$
$$\ldots, M_n(t_n, a_n\Delta t_n + \ldots + a_1\Delta t_1).$$

Угловые коэффициенты звеньев ломаной равны, соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Заметим, что в частном случае $a_1 = 1, a_2 = 1, \ldots, a_{n+1} = 1$ ломаная становится прямой. Функция $t = t(x)$, обратная к функции $x(t)$, есть полиномиальный сплайн первого порядка вида

$$t(x) = \frac{x}{a_1}\left(H(x) - H(x - a_1\Delta t_1)\right) +$$
$$+\left(\frac{x - a_1\Delta t_1}{a_2} + t_2\right)\left(H(x - a_1\Delta t_1) - H(x - a_1\Delta t_1 - a_2\Delta t_2)\right) + \ldots$$
$$+\left(\frac{x - a_1\Delta t_1 - \ldots - a_n\Delta t_n}{a_{n+1}} + t_n\right)H(x - a_1\Delta t_1 - \ldots - a_n\Delta t_n).$$

Тогда из формулы (1) получим

$$\widetilde{f}(x) \equiv f(t(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px}F(p)dp.$$

По формуле для прямого преобразования Лапласа [20] получим выражение для обобщенного преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px}\widetilde{f}(x)dx.$$

Приведем строгие определения.

Определение 1. *Функцию $f(t)$ назовем обобщенным оригиналом, если функция $\widetilde{f}(x) = f(t(x))$ является функцией-оригиналом.*

Определение 2. *Оператор $J : \widetilde{f} \to f$, действующий по правилу $f(t) = \widetilde{f}(x(t))$, назовем оператором преобразования.*

Определение 3. *Изображением обобщенной функции-оригинала $f(t)$ назовем выражение*

$$L\left[f(t)\right] = \widetilde{L}\left[\widetilde{f}(t)\right],$$

где $\widetilde{L}$–оператор преобразования Лапласа.

Теорема 1. *Оператор J^{-1}, обратный к оператору преобразования, действует по правилу $J^{-1} : f(t) \to \widetilde{f}(t)$, где $\widetilde{f}(t) = f\left(x^{-1}(t)\right)$, причем выполняются равенства*

$$L = \widetilde{L} \cdot J^{-1}, \widetilde{L} = L \cdot J .$$

Теорема 2. *Обобщенное преобразование Лапласа находится по формуле*

$$L\left[f(t)\right] \equiv F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px(t)} x'(t) f(t) dt,$$

где функция $x'(t)$ кусочно-постоянная вида

$$x'(t) = a_1 \left(H(t-t_0) - H(t-t_1)\right) + a_2 \left(H(t-t_1) - H(t-t_2)\right) +$$
$$+ a_3 \left(H(t-t_1) - H(t-t_2)\right) + \ldots + a_{n+1} H(t-t_n),$$

Доказательство. По определению 1 имеем

$$L\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-px} \tilde{f}(x)\, dx.$$

В приведенном интеграле выполним замену переменного $x = x(t)$. Тогда получим

$$L\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-px(t)} \tilde{f}(x(t))\, x'(t) dt.$$

Наконец, представим обоснование формулы для обобщенного преобразования Лапласа.

Следствие 1. *Пусть $f(t)$ – функция-оригинал, тогда обобщенное изображение Лапласа вычисляется по формуле*

$$F(p) = a_1 \int_0^{t_1} e^{-a_1 p t} f(t) dt + a_2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)} f(t)\, dt +$$
$$+ a_3 \int_{t_2}^{t_3} e^{-p(a_3(t-t_2)+a_2\Delta t_2+a_1\Delta t_1)} f(t)\, dt + \ldots$$
$$+ a_{n+1} \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n\Delta t_n+\ldots+a_1\Delta t_1)} f(t)\, dt.$$

Приведем аналог формулы Римана – Меллина.

Теорема 3. *Если $f(t)$ оригинал, то интеграл (1) сходится всюду в полуплоскости $Rep > s_0$. При этом сходимость равномерная в любой области $Rep \geq s > s_0$. Функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $Rep > s_0$. Имеет место формула обращения*

$$L^{-1}\left[F(p)\right] \equiv f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px(t)} F(p)\, dp.$$

На основании теоремы 3 и определения функции $x = x(t)$ получается

Следствие 2. *Формула обращения Римана – Меллина для обобщенного преобразования Лапласа*

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pta_1} F(p) dp, 0 \leq t \leq t_1,$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)} F(p) dp, t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$\ldots$$

$$f_{n+1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n\Delta t_n+\ldots+a_1\Delta t_1)} F(p) dp, t_n \leq t.$$

1.2 Дифференцирование обобщенного оригинала.

Теорема 4. *Пусть* $D = \frac{1}{x'(t)}\frac{d}{dt}$ *оператор обобщенного дифференцирования, а функция* $D\left[f(t)\right]$ *есть обобщенный оригинал, тогда*

$$L\left[D\left(f(t)\right)\right] = -f(0) + pF(p).$$

Доказательство. Воспользуемся определением обобщенного преобразования Лапласа. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^\infty e^{-px(t)}x'(t)\frac{1}{x'(t)}f'(t)dt = -f(0) + p\int_0^\infty e^{-px(t)}x'(t)f(t)dt.$$

Свертка оригиналов.

Определение 4. *Сверткой функций оригиналов* $f(t), g(t)$ *назовем функцию*

$$f(t) * g(t) = L^{-1}\left[F(p)\,G(p)\right].$$

Теорема 5. *Свертка вычисляется по формулам*

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f\left(x^{-1}\left(x(t) - x(\tau)\right)\right) x'(\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

или

$$f(t) * g(t) = J\left[\widetilde{f}(t) * \widetilde{g}(t)\right].$$

Доказательство. По определению 1 запишем

$$L\left[f(t) * g(t)\right] = \int_0^\infty e^{-px(t)}x'(t)\int_0^t f\left(x^{-1}\left(x(t) - x(\tau)\right)\right) x'(\tau)\, g(\tau)\, d\tau dt.$$

Выполним замену переменного $x(t) = \beta$

$$L\left[f(t) * g(t)\right] = \int_0^\infty e^{-p\beta}\int_0^t f\left(x^{-1}\left(\beta - x(\tau)\right)\right) x'(\tau)\, g(\tau)\, d\tau d\beta.$$

Проведем вторую замену $x(\tau) = \sigma$

$$L\left[f(t) * g(t)\right] = \int_0^\infty e^{-p\beta}\int_0^{x^{-1}(\sigma)} f\left(x^{-1}\left(\beta - \sigma\right)\right) g\left(x^{-1}(\sigma)\right) d\sigma d\beta.$$

По теореме о свертке для преобразования Лапласа [20] получим

$$L\left[f(t) * g(t)\right] = \widetilde{L}\left[f\left(x^{-1}(\sigma)\right)\right]\widetilde{L}\left[g\left(x^{-1}(\sigma)\right)\right] = L\left[f(t)\right]L\left[g(t)\right].$$

Докажем, что изображения правой и левой частей во второй формуле из теоремы 5 одинаковы. По определению 4 имеем равенство

$$L\left[f(t) * g(t)\right] = F(p)\,G(p).$$

С другой стороны, получим

$$L \cdot J\left[\widetilde{f}(t) * \widetilde{g}(t)\right] = \widetilde{L}\left[\widetilde{f}(t) * \widetilde{g}(t)\right] = F(p)\,G(p).$$

Для доказательства второй формулы в теореме 5 перепишем ее правую часть в виде

$$\int_a^t \widetilde{f}\left(\left(x(t) - x(\tau)\right)\right)\widetilde{g}\left(x(\tau)\right) x'(\tau)\, d\tau.$$

Затем выполним замену переменной $\tau = x^{-1}(z)$. Тогда

$$\int_0^{x(t)} \widetilde{f}\left(\left(x(t) - z\right)\right)\widetilde{g}(z)\, dz = J\left[\int_0^t \widetilde{f}\left(\left(t - z\right)\right)\widetilde{g}(z)\, dz\right] =$$

$$= J\left[\widetilde{f}(t) * \widetilde{g}(t)\right] = f(t) * g(t).$$

Теорема доказана.

Приведем формулу для обобщенной свертки в виде, удобном для приложений.

Следствие 3. *Пусть функции $f(t), g(t)$ являются обобщенными оригиналами, тогда справедлива формула для свертки*

$$f(t) * g(t) = a_1 \int_0^t f(\tau)\tilde{g}(a_1 t - a_1\tau)\, d\tau, 0 < t < t_1,$$

$$f(t) * g(t) = a_1 \int_0^{t_1} f(\tau)\tilde{g}(a_2(t - t_1) + a_1(t_1 - \tau))\, d\tau +$$

$$+a_2 \int_{t_1}^{\tau} f(\tau)\, \tilde{g}(a_2(t - \tau))\, d\tau, t_1 < t < t_2,$$

$$\ldots$$

$$f(t) * g(t) = a_1 \int_0^{t_1} f(\tau)\tilde{g}(a_{n+1}(t - t_n) + a_n(t_n - t_{n-1}) + \ldots + a_1(t_1 - \tau))\, d\tau +$$

$$+a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)\, \tilde{g}(a_{n+1}(t - t_n) + a_n(t_n - t_{n-1}) + \ldots + a_2(t_2 - \tau))\, d\tau + \ldots +$$

$$+a_{n+1} \int_{t_2}^{t} f(\tau)\, \tilde{g}(a_{n+1}(t - \tau))\, d\tau, t_n < t.$$

Доказательство. Преобразуем формулу для свертки из теоремы 5. Имеем

$$f(t) * g(t) = J\left[\int_0^t \widetilde{f}(\tau)\, \widetilde{g}(t - \tau)\, d\tau\right] = \int_0^{x(t)} \widetilde{f}(\tau)\, \widetilde{g}(x(t) - \tau)\, d\tau.$$

Выполним замену в интеграле $\tau = x(z)$, тогда получим

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(z)\, \widetilde{g}(x(t) - x(z))\, x'(z) dz.$$

Подставим явное выражение функции $\tau = x(z)$. В результате получим доказываемую формулу.

2. Обобщенный дифферинтеграл Римана – Лиувилля. 2.1 Обобщенный интеграл Римана – Лиувилля.

Определение 5. *Пусть функция $f(t)$ является обобщенным оригиналом, а функция $F(p)$– изображение функции $f(t)$. Обобщенный интеграл Римана – Лиувилля $I^\alpha f$ определим по формуле*

$$I^\alpha f(t) = L^{-1}\left[p^{-\alpha} F(p)\right].$$

Из определения 5 следует полугрупповое свойство обобщенного интеграла Римана – Лиувилля

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}.$$

Теорема 6. *Обобщенный интеграла Римана – Лиувилля $I^\alpha f$ порядка α вычисляется по формуле*

$$I^\alpha f(t) = J\tilde{I}^\alpha \tilde{f}(t).$$

Доказательство. Воспользуемся определением обобщенного интеграла Римана – Лиувилля и формулой $\tilde{L} = LJ$. Тогда получим

$$I^\alpha f(p) = L^{-1}\left[p^{-\alpha} F(p)\right] = J \cdot \tilde{L}^{-1}\left[p^{-\alpha} F(p)\right] = J\tilde{I}^\alpha \tilde{f}(t).$$

Следствие 4. *Обобщенный интеграла Римана – Лиувилля и интеграла Римана – Лиувилля порядка α связаны формулой*

$$I^\alpha = J\tilde{I}^\alpha J^{-1}.$$

Из определения обобщенного интеграла порядка α можно получить формулу типа Римана – Лиувилля.

Теорема 7. *Для обобщенного интеграла Римана – Лиувилля $I^\alpha f$ порядка α справедлива формула*

$$I^\alpha f(t) = a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) H(x(t) - a_1\tau)\, \frac{(x(t) - a_1\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau +$$

$$+a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)\, \frac{(x(t) - (a_2(\tau - t_1) + a_1\Delta t_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} H(x(t) - (a_2(\tau - t_1) + a_1\Delta t_1)\, d\tau +$$

$$+\ldots + a_{n+1} \int_{t_n}^{\infty} \frac{(x(t) - (a_{n+1}(\tau - t_n) + a_n\Delta t_n + \ldots + a_1\Delta t_1))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

$$\cdot H(x(t) - (a_{n+1}(\tau - t_n) + a_n \Delta t_n + \ldots + a_1 \Delta t_1)) f(\tau)\, d\tau, 0 < t.$$

Доказательство. Пусть для простоты $0 < t < t_1$, тогда из определения обобщенного дробного интеграла Римана – Лиувилля $I^\alpha f$ имеем:

$$I^\alpha [f(t)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^\alpha} G(p)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pta_1} \frac{1}{p^\alpha} F(p) dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pta_1} \frac{1}{p^\alpha}\left(a_1 \int_0^{t_1} e^{-a_1 p\tau} f_1(\tau) d\tau + \right.$$

$$+ a_2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(a_2(\tau - t_1) + a_1 \Delta t_1)} f_2(\tau)\, d\tau +$$

$$+ a_3 \int_{t_2}^{t_3} e^{-p(a_3(\tau - t_2) + a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1)} f_3(\tau)\, d\tau + \ldots$$

$$\left. + a_{n+1} \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_{n+1}(\tau - t_n) + a_n \Delta t_n + \ldots + a_1 \Delta t_1)} f_{n+1}(\tau)\, d\tau \right) dp =$$

$$= a_1 \int_0^{t_1} f_1(\tau) H(t - \tau) \frac{(a_1 t - a_1 \tau)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau +$$

$$+ a_2 \int_{t_1}^{t_2} f_2(\tau) \frac{(a_1 t - (a_2(\tau - t_1) + a_1 \Delta t_1))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} H(a_1 t - (a_2(\tau - t_1) + a_1 \Delta t_1)\, d\tau +$$

$$+ a_{n+1} \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_{n+1}(\tau - t_n) + a_n \Delta t_n + \ldots + a_1 \Delta t_1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(a_1 t - (a_{n+1}(\tau - t_n) + a_n \Delta t_n + \ldots + a_1 \Delta t_1))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot$$

$$\cdot H(a_1 t - (a_{n+1}(\tau - t_n) + a_n \Delta t_n + \ldots + a_1 \Delta t_1)) f_{n+1}(\tau)\, d\tau, 0 < t < t_1.$$

Учитывая, что на промежутке $0 < t < t_1$ выполняется условие $x(t) = a_1 t$, доказательство закончим.

Следствие 5. *Для случая линейного сплайна $x = x(t)$ с двумя узлами t_0, t_1 обобщенный дробный интеграл Римана – Лиувилля имеет вид*

$$I^\alpha [f(t)] = a_1 \int_0^t f(\tau) \frac{(a_1 t - a_1 \tau)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, \quad 0 < t < t_1$$

$$I^\alpha [f(t)] = a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \frac{(a_2(t - t_1) + a_1(t_1 - \tau))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau +$$

$$+ a_2 \int_{t_1}^{t} f(\tau) \frac{(a_2(t - \tau))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, \quad t_1 < t.$$

Следствие 6. *Для случая линейного сплайна $x = x(t)$ с тремя узлами t_0, t_1, t_2 обобщенный дробный интеграл Римана – Лиувилля имеет вид*

$$I^\alpha [f(t)] = a_1 \int_0^t f(\tau) \frac{(a_1 t - a_1 \tau)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, 0 < t < t_1,$$

$$I^\alpha [f(t)] = a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \frac{(a_2(t - t_1) + a_1(t_1 - \tau))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau +$$

$$+ a_2 \int_{t_1}^{t} f(\tau) \frac{(a_2(t - \tau))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, t_1 < t < t_2,$$

$$I^\alpha [f(t)] = a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \frac{(a_3(t - t_2) + a_2(t_2 - t_1) + a_1(t_1 - \tau))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau +$$

$$+ a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) \frac{(a_3(t - t_2) + a_2(t_2 - \tau))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau +$$

$$+ a_3 \int_{t_2}^{t} f(\tau) \frac{(a_3(t - \tau))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, t_2 < t.$$

2.2 Обобщенная производная Римана – Лиувилля.

Определение 6. *Для функции $f(t)$ определенной на промежутке $[0,\infty)$ производной дробного порядка α назовем функцию*

$$D^{\alpha}[f(t)] = D^{n}I^{n-\alpha}[f(t)], n = [\alpha] + 1.$$

Теорема 8. *Оператор обобщенного дифференцирования D и модельный оператор дифференцирования $\tilde{D}, \tilde{D} = \frac{d}{dt}$ удовлетворяют соотношению*

$$D[f(t)] = J\tilde{D}[\tilde{f}(t)].$$

т.е. $D = J\tilde{D}J^{-1}$.

Если для функции $\tilde{f}(t)$ выполняется полугрупповое свойство

$$\tilde{D}^{\alpha}\tilde{D}^{\beta}[\tilde{f}(t)] = \tilde{D}^{\alpha+\beta}[\tilde{f}(t)],$$

то выполняется полугрупповое свойство для функции $f(t)$

$$D^{\alpha}D^{\beta}[f(t)] = D^{\alpha+\beta}[f(t)].$$

Доказательство. Преобразуем данное в условии тождество

$$JD^{\alpha}J^{-1}JD^{\beta}J^{-1}J[f(t)] = JD^{\alpha+\beta}J^{-1}J[f(t)].$$

Тогда получим

$$JD^{\alpha}D^{\beta}[f(t)] = JD^{\alpha+\beta}[f(t)]$$

. Свойство доказано.

Теорема 9. *Фундаметальное соотношение имеет вид*

$$DI^{\alpha+1} = I^{\alpha}.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть доказываемого тождества

$$DI^{\alpha+1} = J\tilde{D}J^{-1}J\tilde{I}^{\alpha+1}J^{-1} = J\tilde{D}\tilde{I}^{\alpha+1}J^{-1}.$$

Аналогично преобразуем правую часть

$$I^{\alpha} = J\tilde{I}^{\alpha}J^{-1}.$$

На основании модельного фундаметального соотношения $\tilde{D}\tilde{I}^{\alpha+1} = \tilde{I}^{\alpha}$ доказательство закончим.

3. Уравнение теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами. В качестве приложения рассмотрим задачу вычисления плотности теплового потока $q(t)$ по измеренной зависимости температуры на границе по времени $f(t)$. Рассмотрим смешанную краевую задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности:

$$D_t u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x > 0, t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, x > 0, \tag{3}$$

$$u(0,t) = f(t), t > 0. \tag{4}$$

Дополним условия (2)-(4) условием непрерывности решения в моменты $t = t_k, k = 1, 2, ..., n$.

$$\lim_{t\to t_k-0} u(t,x) = \lim_{t\to t_k+0} u(t,x)$$

Расмотрим также модельную смешанную краевую задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности:

$$c\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, t > 0, \tag{5}$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0, \quad x > 0, \tag{6}$$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{f}(t), \quad t > 0. \tag{7}$$

В работе [2] доказана формула для потока $\tilde{q}(t)$ на границе $x = 0$

$$\tilde{q}(t) = k\tilde{D}^{\frac{1}{2}}[\tilde{f}(t)], \tag{8}$$

$\tilde{D}^{\frac{1}{2}}$ – производная порядка 1/2. Положим $J[\tilde{f}(t)] = f(t)$. Докажем аналог формулы (8). Для этого подействуем на обе части уравнения (5) оператором J

$$J\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\right) = 0, \quad x > 0, t > 0.$$

Подставим также значение $[\tilde{f}(t)] = J^{-1}[f(t)]$. В итоге имеем

$$J\tilde{D}J^{-1}u - J \cdot J^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Учитывая, что $J\tilde{D}J^{-1}u = Du$, приходим к уравнению (2). Из определения оператора J следует, что $u(0, x) = 0$. Имеем также

$$J[\tilde{u}(t, 0)] = J[\tilde{f}(t)],$$

значит,

$$u(t, 0)] = f(t).$$

Итак, мы доказали, что решение задачи (2)-(4) находится по формуле

$$u(t, x) = J[\tilde{u}](t, x).$$

Отсюда следует, что

$$q(t) = J[\tilde{q}](t) = J\tilde{D}^{1/2}[\tilde{f}(t)] = D^{1/2}[f(t)] = DI^{1/2}[f(t)],$$

где интеграл порядка $1/2$ определен в теореме 7.

4. Заключение. Разработано обобщенное операционное исчисление на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Установлен изоморфизм функций-оригиналов и обобщенных функций-оригиналов. При этом предполагалось, что функция-изображение и обобщенная функция-оригинал тождественны. Таким образом, стало возможным изучать обобщенное операционное исчисление, основываясь на классическом операционном исчислении. На этом пути определено понятие обобщенной свертки, а затем с ее помощью были определены обобщенный интеграл и обобщенная производная дробного порядка. Была решена задача вычисления плотности теплового потока $q(t)$ по измеренной зависимости температуры на границе по времени $f(t)$ для модельной смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами.

Дальнейшее развитие теоретических исследований возможно по двум направлениям: первое – модификация дифференциального оператора, например, выбрать дифференциальный оператор с множителем, имеющим счетное число точек стыка; второе – рассмотреть векторный аналог полученных в статье результатов. Практика применения обобщенного операционного исчисления предполагает решение обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Методы обобщенного операционного исчисления будут полезны при моделировании переходных процессов теории управления.

Список литературы

1. Романовский П. И. 1980. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М.: Наука, 336.

2. Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Обобщённое двойное преобразование Лапласа и его применения для решения уравнений в частных производных. Прикладная математика и Физика. 52(4): 239–245, 2020, DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.

3. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P., Shishov V. S. 1979, 1981. Operational calculus. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., 16, VINITI, Moscow, 99–148; J. Soviet Math., 15:6, pp. 733–765.

4. Ermolova N. Y., Tirkkonen O. 2014. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications. IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions on.pp. 2938-2944 Jun.

5. Jeffreys H. and Jeffreys B. 1956. Methods of Mathematical Physics, 3rd ed., Cambridge Univ. Press.

6. Ganzha E. I. 2012. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. Programming and Computer Software. 38: 150–155.

7. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. 2019. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform. Ain Shams Engineering Journal; 10(4): 841–845.

8. Jarad Fahd, Abdeljawad Thabet. 2018. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. Results in Nonlinear Analysis, 1(2): 88–98.

9. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. 2019. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions. Axioms, 8(3): 87.

10. Meerschaert M. M., Mortensen J., Wheatcraft S. W. 2006. Fractional Vector Calculus for Fractional Advection-Dispersion, Physica A, 367: 181–190.

11. Mainardi F. 2010. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity . Imperial College Press: London, 347.

12. Miller K. S., Ross B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons, Inc.: New York, NY, USA, 366.

13. Napalkov V. V., Mullabaeva A. U. 2015. On one class of differential operators and their application. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 288: 142–155.

14. Rashidi M. M. 2009. The modified differential transforms method for solving MHD boundary-layer equations Comput. Phys. Commun., 180: 2210–2217.

15. Samko S., Kilbas A., Marichev O. 1993. Fractional Integral and Derivative. Theory and Applications.— Switzerland: Gordon and Breach.

16. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. Transmutations, Singular and Fractional. Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. Elsevier.

17. Tsarev S. P. 2005. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC 2005. ACM Press, 325–331.

18. Zaikina Svetlana M. 2014. Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehnivceskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematičeskie Nauki, 1(34): 19–24.

19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. 2020. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland, 447–466.

References

1. Romanovsky P. I. 1980. Fourier series. Field theory. Analytical and special functions. Laplace transformations. Moscow: Nauka, 336.

2. Yaremko O. E., Yaremko N. N. Generalized double Laplace transform and its applications for solving partial differential equations. Applied Mathematics and Physics. 52(4): 239–245, 2020, DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.

3. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P., Shishov V. S. 1979, 1981. Operational calculus. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., 16, VINITI, Moscow, 99–148; J. Soviet Math., 15:6 , pp. 733–765.

4. Ermolova N. Y., Tirkkonen O. 2014. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications. IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions on.pp. 2938-2944 Jun.

5. Jeffreys H. and Jeffreys B. 1956. Methods of Mathematical Physics , 3rd ed., Cambridge Univ. Press.

6. Ganzha E. I. 2012. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. Programming and Computer Software. 38: 150–155.

7. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. 2019. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform. Ain Shams Engineering Journal; 10(4): 841–845.

8. Jarad Fahd, Abdeljawad Thabet. 2018. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. Results in Nonlinear Analysis, 1(2): 88–98.

9. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. 2019. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions. Axioms, 8(3): 87.

10. Meerschaert M. M., Mortensen J., Wheatcraft S. W. 2006. Fractional Vector Calculus for Fractional Advection-Dispersion, Physica A, 367: 181–190.

11. Mainardi F. 2010. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity . Imperial College Press: London, 347.

12. Miller K. S., Ross B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons, Inc.: New York, NY, USA, 366.

13. Napalkov V. V., Mullabaeva A. U. 2015. On one class of differential operators and their application. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 288: 142–155.

14. Rashidi M. M. 2009. The modified differential transforms method for solving MHD boundary-layer equations Comput. Phys. Commun., 180: 2210–2217.

15. Samko S., Kilbas A., Marichev O. 1993. Fractional Integral and Derivative. Theory and Applications.— Switzerland: Gordon and Breach.

16. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. Transmutations, Singular and Fractional. Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. Elsevier.

17. Tsarev S. P. 2005. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC 2005. ACM Press, 325–331.

18. Zaikina Svetlana M. 2014. Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehnivceskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematičeskie Nauki, 1(34): 19–24.

19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. 2020. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland, 447–466.

Получена 17.05.2021

Яремко Олег Эмануилович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Московский государственный технический университет «Станкин»

http://orcid.org/0000-0003-4619-0527
Вадковский пер.,1, Москва,127055, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru

Яремко Наталия Николаевна – доктор педагогических наук, доцент, профессор, Пензенский государственный университет

http://orcid.org/0000-0003-1491-624X
ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru