

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.85
MSC 49K27.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-125-131

АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО ВЫДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО В ТОЧЕЧНОМ МАССИВЕ

С. Е. Кривобокова, В. А. Родин

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. В. Меньших)

Воронежский институт МВД России,
Воронеж, 394065, Россия

E-mail: svetlanafedyeva20@gmail.com, rodin_v@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены основные алгоритмические сложности построения множества Парето, связанные с конфигурацией массива точек. На основе «максиминного» покоординатного подхода составлен авторский алгоритм построения, учитывающий эти сложности. Написана программа на языке Python. Проведена графическая апробация программы на конкретном примере: из множества акустических извещателей извлечена выборка с минимальной суммарной ценой и высоким «качеством» (желательность по Харринкнтону). С помощью комбинаторных рассуждений снижена размерность пространства поиска.

Ключевые слова: Многопараметрическая оптимизация, функция полезности, множество Парето, специальные средства охраны и сигнализации.

Для цитирования: Кривобокова С. Е., Родин В. А. 2021. Алгоритм и программа для графического выделения множества парето в точечном массиве. Прикладная математика & Физика, 53(2): 125–131.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-125-131.

ALGORITHM AND PROGRAM FOR GRAPHICAL SELECTION OF THE PARETO SET IN A POINT ARRAY

Svetlana Krivobokova, Vadimir Rodin

(Article submitted by a member of the editorial board V. V. Menshikh)

Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,
Voronezh, 394065, Russia

E-mail: svetlanafedyeva20@gmail.com

E-mail: rodin_v@mail.ru

Received April, 28, 2021

Abstract. In this paper, we consider the main algorithmic difficulties of constructing a Pareto set associated with the configuration of an array of points. On the basis of the coordinate approach «maximin» the author's algorithm of construction is made, taking into account these difficulties. The program is written in Python. The program was graphically tested on a specific example: a sample with a minimum total price and high «quality» (Harrinkton desirability) was extracted from a set of acoustic detectors. Using combinatorial reasoning, the dimension of the search space is reduced.

Key words: Multiparameter optimization; utility function, Pareto set, security and alarm special systems.

For citation: Krivobokova S. E., Rodin V. A. 2021. Algorithm and program for graphical selection of the pareto set in a point array. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 125–131. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-125-131.

1. Введение. В настоящее время существует большой выбор специальных приборов охраны иностранных и отечественных фирм, выполняющих эквивалентные функции. При этом актуальной является задача формирования оптимального по цене комплекта необходимого числа приборов охраны из допустимого множества с сохранением высокого уровня желательности [1, 7, 8] (интегральный показатель, включающий и надежность). Комплект может содержать повторения, что увеличивает размерность пространства поиска. Возникает двухпараметрическая задача оптимизации. Данная задача связана с выделением множества Парето (см., например, [2]) из точечного массива. Размерность пространства поиска предварительно уменьшена с учетом следующего фактора – оба критерия инвариантны относительно перестановок элементов комплекта. Выделение множества Парето в данной работе основано

на максиминном по координатному подходу, в отличие от векторного подхода, который используется в стандартных программах [4].

2. Особенности выделения множества Парето. Рассмотрим трудности построения, связанные с границей точечного массива.

Так как граница точечного массива может быть невыпуклой, то стандартные программы [4] для решения данной задачи не подходят (рис. 1).

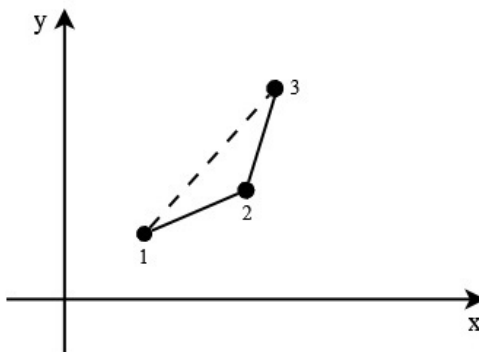


Рис. 1. Выпуклая и «подходящая» оболочки
Fig. 1. Convex and «suitable» boundaries

Пунктиром отмечена выпуклая оболочка, сплошной линией – подходящая. Точка 2 выпадает из поля зрения лица, принимающего решение (ЛПР), при выборе выпуклой оболочки. Однако данная точка принадлежит множеству Парето для данной задачи и может быть выбрана ЛПР.

На рис. 2 стрелками показаны разнонаправленные критерии (факторы), которые необходимо учитывать при выделении множества Парето. В данном случае 1 критерий – уменьшение цены (стрелка влево), 2 критерий – увеличение желательности (стрелка вверх).

«Стандартная граница» [3], также не может быть в определенных случаях множеством Парето.

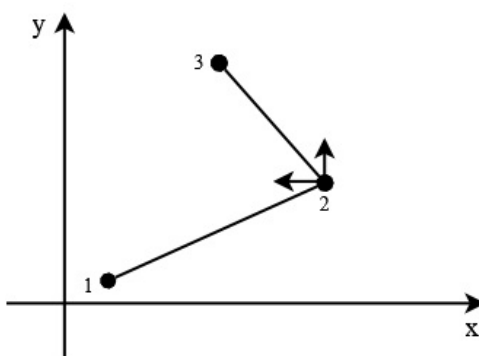


Рис. 2. «Стандартная граница» части оболочки
Fig. 2. «Standard border» of the shell part

При сравнении с точкой 2, точка 3 (рис. 2) имеет большую желательность при меньшей цене. В данном случае, очевидно, что точка 2 не является оптимальным выбором для ЛПР и не принадлежит множеству Парето. Рисунки 1 и 2 показывают, что ни выпуклая оболочка, ни стандартная граница не могут в общем случае быть множеством Парето для наших критериев.

3. Предварительные рассуждения. В качестве примера автоматизированного построения множества Парето рассмотрим прикладную задачу оптимальной выборки из эмперического множества акустических извещателей. Список данных приборов охраны приведен в списке технических средств безопасности [6].

Для построения дискретного пространства решений вычисляются координаты точек (элементов пространства поиска) по формулам:

$$\Omega_v = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \omega_i^v, D_v = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (d_i^v) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Здесь ω_i^v – цена i -го датчика в наборе с индексом v , v – индекс, пробегающий все возможные наборы размера k , d_i^v – показатель желательности i -го прибора.

Пусть M – эмпирическое множество приборов, численностью m , из которых выбирается комплект из k приборов ($k \leq m$). Задача определения наилучшего состава комплекта имеет экспонентный рост. Размерность пространства поиска равна $N = \exp(k * \ln m)$.

Если k – достаточно большое число – эта задача в общем виде не по силам даже современным компьютерам.

Заметим, что формулы (1) инвариантны относительно перестановок. Значит перестановки в общем переборе можно не рассматривать, и размерность пространства поиска существенно уменьшится. А именно, на число перестановок в каждой конфигурации набора. Поэтому справедливо следующее:

Утверждение. *Размерность пространства поиска определяется по формуле сочетаний с повторениями:*

$$N_1 = C_m^{-k} = \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}. \quad (2)$$

Примеры:

а) при выборе комплекта длиной 3 формула (2) имеет вид:

$$N_1 = C_m^{-3} = \frac{(m+2)(m+1)m}{6}.$$

б) при выборе комплекта длиной 2 формула (2) имеет вид:

$$N_1 = C_m^{-2} = \frac{(m+1)m}{2}. \quad (3)$$

Для $m = 5$, формула (3) имеет следующее значение:

$$N_1 = C_5^{-2} = \frac{(5+1) \times 5}{2} = 15. \quad (4)$$

4. Определение наилучшего комплекта приборов охраны на примере акустических извещателей. Для сокращения размерности пространства поиска – множество координат всех возможных наборов целесообразно объединить извещатели в группы. В данном случае группы формируются с учетом цены. В результате получаем 5 групп:

- 1 – (ИО 329-8 «Звон-1»);
- 2 – (ИО 329-5 «Астра-С», ИО 320-13 «Стекло-3М»);
- 3 – (ИО 329-4 «Стекло-3»);
- 4 – («Ирбис»);
- 5 – (ИО 329-10 «Стекло-4»).

Численность различных конфигураций из данных групп (–множество координат всех возможных наборов) вычисляется по формуле (4) и представлена в столбце «Сочетание» таблицы 1.

Предположим, что нам для размещения необходимо выбрать 2 типа акустических извещателей. Сочетание 14 (столбец 2) означает, что мы, составляя пару, выбираем по одному прибору из групп № 1 и № 4.

В работе [5] рассматривалась таблица полученных сочетаний.

Последний столбец формировался на основе алгоритма желательности Харринктона, учитывающего показатели желательности каждого прибора, а также интегральный показатель по группам.

Таблица 1 используется для получения на плоскости множества точек M .

Дальнейшие рассуждения в работе посвящены построению алгоритма автоматического выбора множества Парето из множества M .

5. Максиминный алгоритм построения множества Парето. Имеем 2 критерия оптимизации, связанных с координатами точек M на плоскости. В нашем случае $x = F_1(M)$ – это цена или критерий, который желательно не увеличивать. Вторая координата $y = F_2(M)$ – это интегральный показатель, учитывающий как надежность прибора, так и мнение двух или более экспертов. Этот параметр сконструирован как интегральный показатель по алгоритму Харринктона [1, 7, 8]. Координаты точек M соответствуют 3 и 4 столбцу таблицы 1.

Пусть $M(x, y)$ – весь массив исходных точек. Алгоритм выбора множества Парето основан на сравнении и исключении неподходящих точек в каждой итерации из оставшихся в предыдущей итерации точек.

Пусть $x_0 = \min\{x \in \{M(x, y)\}\}$. Предположим, что в массиве существуют точки (x, y) , у которых координаты удовлетворяют неравенствам $x > x_0$, $y < y_0$. Здесь y_0 решение $M(x, y)$ из массива. Эти точки (рис. 3) мы исключаем.

После этого, а также в случаях, где их нет, мы рассматриваем точку x_1 первую при $x > x_0$, для которой $y > y_0$, и обозначаем ее y_1 . Если таких точек несколько, то выбираем с наибольшим значением $y_1 = \max\{y > y_0\}$.

Таблица 1. Варианты выбора комплекта акустических извещателей
Table 1. Options for selecting a set of acoustic detectors

№ п/п	Сочетание	Цена	Об. пок.
1	11	406	0,65
2	12	490	0,75
3	13	516	0,76
4	14	548	0,7
5	15	683	0,76
6	22	574	0,84
7	23	600	0,85
8	24	632	0,79
9	25	767	0,85
10	33	626	0,86
11	34	658	0,8
12	35	793	0,86
13	44	690	0,75
14	45	825	0,8
15	55	960	0,85

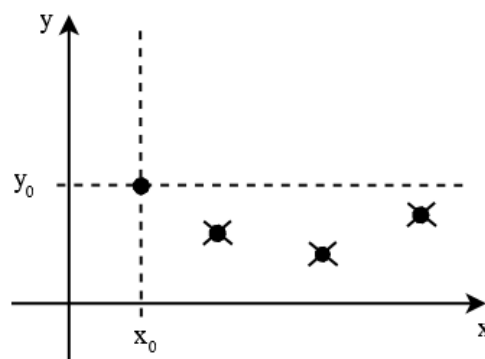


Рис. 3. Выбор минимальной точки
Fig. 3. Selecting the minimum point

После этого рисуем отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) (рис. 4.)

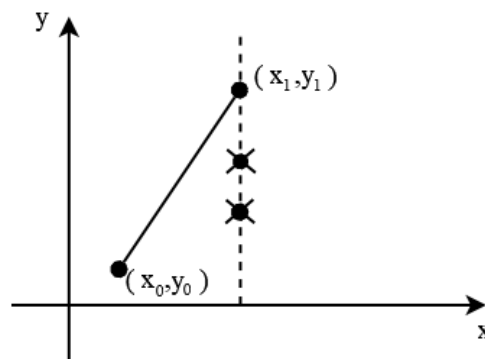


Рис. 4. Выбор следующей точки
Fig. 4. Selecting the next point

Во второй итерации – в качестве начальной точки рассматриваем точку с координатами (x_1, y_1) и повторяем приведенную выше последовательность действий, которая была проведена для точки с координатами (x_0, y_0) . Блок-схема алгоритма выполнения итераций представлена на рисунке 5.

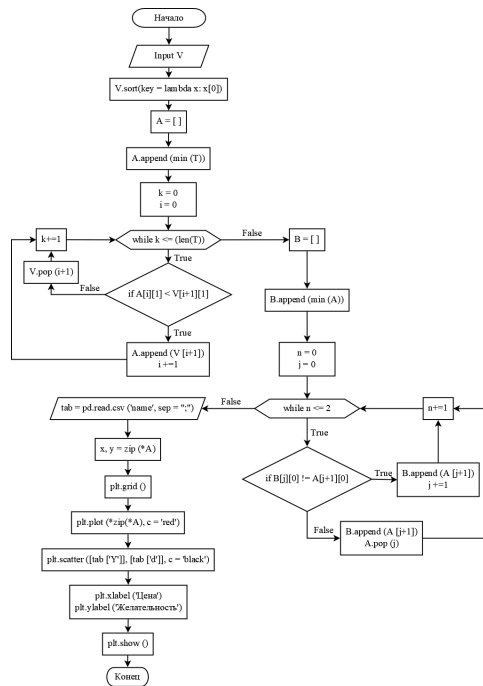


Рис. 5. Блок-схема алгоритма
Fig. 5. Flowchart of the algorithm

Построение выполняется автоматически после выполнения программы (рис. 6)

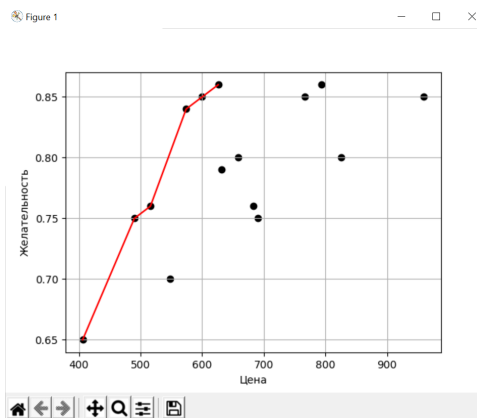


Рис. 6. Результат работы программы
Fig. 6. The result of the program

Точки, которые входят во множество Парето, соединены линией. ЛПР может выбрать любой комплект, который лежит на ломанной прямой.

5. Описание алгоритма. Рассмотрим алгоритм оптимизации выборки приборов охраны из эмпирического множества.

Для начала составляется таблица с координатами в приложении Microsoft Excel. Первый столбец заполняется информацией о цене, второй столбец – интегральным показателем каждого прибора охраны.

Далее, в коде программы записан цикл для заполнения двумерного массива V с той же информацией, что и в созданной таблице, и сортируется по возрастанию цены.

Для выделения множества Парето необходимо создать пустой массив A и записать в него минимальные координаты из массива V. С помощью цикла и условий из массива V в массив A записываются все необходимые точки для построения множества Парето на графике.

Далее необходимо отсортировать полученный массив, чтобы исключить возможность попадания точек с одинаковыми значениями цены. Для этого создается новый пустой массив B, и также используя цикл и условия, все неотсортированные точки записываются в массив B. Отсортированные точки остаются в массиве A – множество Парето.

Построение выполняется автоматически после выполнения программы. Точками на графике являются данные из таблицы, созданной в Microsoft Excel, линия на графике – массив A.

Таким образом, на графике отражено и исходное эмперическое множество, и множество Парето, что наглядно отображает подходящие возможности выбора для ЛПП.

Заключение. При изучении опубликованных работ другими авторами не было обнаружено применение алгоритма построения интегральных показателей Харринктона для решения задач на экстремум. Это и послужило мотивом для написания данной работы.

В работе приведены возможные трудности для выделения множества Парето. Построен алгоритм выделения множества Парето из точечного множества на максиминной по координатной основе. Написана универсальная программа на языке программирования Python. Проведена графическая апробация программы на конкретном примере: извлечена оптимальная выборка из эмперического множества акустических извещателей.

Список литературы

1. Любушин Н. П., Брикач Г. Е. 2014. Использование обобщенной функции желательности Харринктона в многопараметрических экономических задачах. *Экономический анализ: теория и практика*, 18(370): 2–10.
2. Малыхин В. И., Родин В. А. 2015. Теория принятия решений, лекции и задачи. Воронеж: ВГУ, 322.
3. Меньших В. В., Копылов А. Н., Кучер В. А., Телкова. 2016. Дискретная математика. Воронеж, Воронежский институт МВД России, 228.
4. Петров Н. Н. 2008. Ведение в выпуклый анализ. Ижевск, Удмуртский государственный университет, 168.
5. Родин В. А., Кривобокова С. Е. 2021. Оптимальная комплектация объекта специальными средствами охраны на основе обобщенного показателя Харринктона. *Вестник Воронежского института МВД*, 2: 67–77.
6. Федеральная служба войск национальной гвардии российской федерации. 2020. Список технических средств безопасности, удовлетворяющих «Единым требованиям к системам передачи извещений, объектовым техническим средствам охраны и охранным сигнально-противоугонным устройствам автотранспортных средств, предназначенным для применения в подразделениях вневедомственной охраны войск национальной гвардии Российской Федерации». М.: Главное управление вневедомственной охраны, 84.
7. Samokhvalov Yu., Бурба О. 2018. Оценка эффективности научных и научно-технических проектов на основе обобщенной функции Харринктона. *Системы управління навігації та зв'язку*. 4(50): 77-85. DOI:10.26906/SUNZ.2018.4.077
8. Zade L. A. 1973. Outline of new approach to analyses of complex systems and decision processes. *On Systems, Man and Cybernetics*. 3: 28–44.

References

1. Lyubushin N. P., Brikach G. E. 2014. Ispol'zovanie obobshchennoj funkicii zhelatel'nosti Harrinktona v mnogoparametricheskikh ekonomicheskikh zadachah [Use of the generalized Harrinkton desirability function in multiparameter economic problems]. *Ekonomicheskij analiz: teoriya i praktika*, 18(370): 2–10.
2. Malyhin V. I., Rodin V. A. 2015. Teoriya prinyatiya reshenij, lekicii i zadachi [Decision theory, lectures and tasks]. Voronezh: VGU, 322.
3. Men'shikh V. V., Kopylov A. N., Kucher V. A., Telkova. 2016. Diskretnaya matematika [Discrete Mathematics]. Voronezh, Voronezhskij institut MVD Rossii, 228.
4. Petrov N. N. 2008. Vedenie v vypuklyj analiz [Introduction to convex analysis]. Izhevsk, Udmurtskij gosudarstvennyj universitet, 168.
5. Rodin V. A., Krivobokova S. E. 2021. Optimal'naya komplektaciya ob"ekta special'nymi sredstvami ohrany na osnove obobshchennogo pokazatelya Harrinktona [Optimal equipment of the object with special security equipment based on the generalized Harrinkton indicator]. *Vestnik Voronezhskogo instituta MVD*, 2: 67–77.

6. Federal'naya sluzhba vojsk nacional'noj gvardii rossijskoj federacii. 2020. Spisok tekhnicheskikh sredstv bezopasnosti, udovletvoryayushchih «Edinym trebovaniyam k sistemam peredachi izveshchenij, ob'ektovm tekhnicheskim sredstvam ohrany i ohrannym signal'no-protivougonnym ustrojstvam avtotransportnyh sredstv, prednaznachennym dlya primeneniya v podrazdeleniyah vnevedomstvennoj ohrany vojsk nacional'noj gvardii Rossijskoj Federacii» [List of technical security devices that meet the « Uniform requirements for notification transmission systems, facility technical security equipment and security alarm and anti-theft devices of vehicles intended for use in non-departmental security units of the National Guard of the Russian Federation »]. M.: Glavnoe upravlenie vnevedomstvennoj ohrany, 84.
7. Samokhvalov Yu., Burba O. Ocenka effektivnosti nauchnyh i nauchno-tekhnicheskikh proektov na osnove obobshchennoj funkcii Harrinktona [Evaluation of the effectiveness of scientific and scientific-technical projects based on the generalized Harrinkton function]. Sistemi upravliniya navigacii ta zv'yazku. 4(50): 77–85. DOI:10.26906/SUNZ.2018.4.077
8. Zade L. A. 1973. Outline of new approach to analyses of complex systems and decision processes. On Systems, Man and Cybernetics. 3: 28–44.

Получена 28.04.2021

Кривобокова Светлана Евгеньевна – адъюнкт Воронежского института МВД России

 <http://orcid.org/0000-0001-7105-9227>

проспект Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия

E-mail: svetlanafedyeva20@gmail.com

Родин Владимир Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор Воронежского института МВД России

 <http://orcid.org/0000-0003-0655-3696>

проспект Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия

E-mail: rodin_v@mail.ru