Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №3. С. 173–184.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.532
MSC 06F05, 20M14, 11P32
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-173-184

МУЛЬТИПОТЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА В ОДНОРОДНЫХ КОММУТАТИВНЫХ МОНОИДАХ И БИНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

Ю. П. Вирченко

Белгородский национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Вводится понятие о k-потентных множествах в моноидах, $k \in \mathbb{N}$. Устанавливаются их простейшие свойства. Выделяется класс однородных моноидов, обладающих набором образующих элементов. Устанавливаются простейшие необходимые свойства того, чтобы фиксированное множество в таком моноиде было k-потентным. При наличии коммутативности в моноидах устанавливается изорморфизм каждого из них моноиду $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ с соответствующим ему множеством меток $\mathfrak{J}$. Для коммутативных однородных моноидов, обладающих множеством образующих, доказываются необходимые и достаточные условия для k-потентности их подмножеств. Дается приложение этого результата к анализу т. н. бинарной проблемы Гольдбаха в аддитивной теории чисел.

Ключевые слова: коммутативность, моноид, мультипотентное множество, однородность, простое число, цикл.

Для цитирования: Вирченко Ю. П. 2020. Мультипотентные множества в однородных коммутативных моноидах и бинарная проблема Гольдбаха. Прикладная математика & Физика. 52(3): 173–184.
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-173-184

MULTIPOTENT SETS IN UNIFORM COMMUTATIVE MONOIDS AND BINARY GOLDBACH PROBLEM

Yu. P. Virchenko

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia
E-mail: virch@bsu.edu.ru
Received July 7, 2020

Abstract. The concept of k-potent sets in monoids, $k \in \mathbb{N}$ is introduced. Their simple properties are found. The class of uniform monoids with generated elements is selected. The simplest necessary conditions are found in order the fixed set in such monoids is the k-potent one. It is proved that each commutative uniform monoid with the system of generated elements is isomorphic to the monoid $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ with the correspond label set $\mathfrak{J}$. For such monoids the necessary and sufficient conditions of the k-potentiality of sets in it are proved. It is proposed the application of such a result to the analysis of the so-called binary Goldbach problem in additive number theory.

Key words: commutativity, monoid, multipotent set, uniformity, prime, cycle.

For citation: Virchenko Yu. P. 2020. Multipotent sets in uniform commutative monoids and binary Goldbach problem. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 173–184 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-173-184

---

1. Введение. Понятие о мультипотентных, в частности, квадратентных множествах в моноидах возникает, естественным образом, как обобщение представления о множествах, которые являются объектом изучения в некоторых задачах аддитивной теории чисел, связанных с суммами чисел со специальными свойствами. Таковыми являются, например, задача о представлении чисел из $\mathbb{N}$ в виде сумм n-х степеней фиксированного числа натуральных чисел – т. н. проблема Варинга [15] или задача о представлении всех нечетных чисел в виде сумм трех простых чисел — проблема Гольдбаха [3]. Замечательно, что при алгебраическом анализе указанных задач оказывается важным только лишь то, что на изучаемом множестве $\mathfrak{A}$ элементов задана, обозначаемая посредством знака $+$, бинарная алгебраическая ассоциативная операция коммутативной композиции так, что для любых двух элементов $\mathsf{x} \in \mathfrak{A}$, $\mathsf{y} \in \mathfrak{A}$ определен элемент $\mathsf{x} + \mathsf{y} \in \mathfrak{A}$. Задание ассоциативной операции превращает множество $\mathfrak{A}$ в *полугруппу*, в частности, коммутативную. В связи с таким положением, настоящая работа посвящена описанию общей абстрактной постановки и выработки подхода к решению указанных выше и родственных им задач.

Пусть $\mathfrak{A}$ — полугруппа с единицей e, в общем случае, некоммутативная, то есть $\mathfrak{A}$ является моноидом [1]. Операцию композиции обозначим посредством $*$. В соответствии с этим, степень d любого элемента $\mathsf{x} \in \mathfrak{A}$ будем обозначать посредством x_*^d. Наличие единицы не ограничивает общности рассмотрения, так как любую полугруппу $\mathfrak{A}$, при отсутствии в ней единицы, всегда можно дополнить новым элементом e, который обладает свойствами единицы, то есть для любого элемента $\mathsf{x} \in \mathfrak{A}$ имеет место $\mathsf{x} * \mathsf{e} = \mathsf{e} * \mathsf{x} = \mathsf{x}$, при этом расширив таблицу умножения в $\mathfrak{A}$.

Определим, на основе операции $*$ в моноиде $\mathfrak{A}$, аналогичную операцию на классе $\mathsf{P}(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} : \mathfrak{B} \neq \varnothing\}$ всех непустых подмножеств из $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j = 1, 2$ — любая пара подмножеств из $\mathfrak{A}$. Определим подмножество $\mathfrak{B} = \{\mathsf{x} : \mathsf{x} = \mathsf{y}_1 * \mathsf{y}_2, \mathsf{y}_j \in \mathfrak{B}_j, j = 1, 2\} \subset \mathfrak{A}$, которое мы будем обозначать посредством $\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{B}_2$ так, что

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 * \mathfrak{B}_2 \,. \tag{1}$$

Отображение $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}$, которое сопоставляет паре $\langle \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \rangle$ множество (1), определяет на классе $\mathsf{P}(\mathfrak{A})$ бинарную ассоциативную и коммутативную операцию и, тем самым, превращает этот класс в коммутативный моноид, единицей которого служит одноэлементное подмножество $\{\mathsf{e}\}$. На основе операции $*$ на классе $\mathsf{P}(\mathfrak{A})$ вводится понятие о степени $d \in \mathbb{N}$ любого подмножества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, которую мы будем обозначать, также как и в моноиде $\mathfrak{A}$, посредством $\mathfrak{B}_*^d$. А именно, для любого $d \in \mathbb{N}$ положим $\mathfrak{B}_*^{d+1} = \mathfrak{B}_*^d * \mathfrak{B}$, $d \in \mathbb{N}$ и, посредством этого соотношения, определим, индуктивным образом, множества $\mathfrak{B}_*^d$, $d \in \mathbb{N}$. Введем теперь базовое понятие k-потентного множества.

Определение 1. *Подмножество $\mathfrak{B}$ моноида $\mathfrak{A}$ будем называть мультипотентным порядка $k \in \mathbb{N}$ (k-потентным), если имеет место равенство $\mathfrak{B}_*^k = \mathfrak{A}$.*

В частности, при $k = 2$ такое множество $\mathfrak{B}$ мы будем называть *квадрапотентным.* Для него имеет место

$$\mathfrak{B}_*^2 = \{\mathsf{x} \in \mathfrak{A} : \mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z}; \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathfrak{B}\} = \mathfrak{A} \,. \tag{2}$$

Основной задачей развиваемой далее теории мультипотентных множеств является установление признаков, на основе которых можно было бы судить, является ли k-потнетным заданное подмножество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

2. Моноиды. Пусть $\mathfrak{B}$ – подмоноид моноида $\mathfrak{A}$, то есть такое подмножество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, которое замкнуто относительно операции $*$ так, что для любой пары подмножеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{B}$, $j = 1, 2$ имеет место $\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}$.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$. Подмоноид $\mathrm{M}(\mathfrak{C})$ называется минимальным по отношению к $\mathfrak{C}$, если любой подмоноид $\mathfrak{B}$, содержащий $\mathfrak{C}$, обязательно содержит $\mathrm{M}(\mathfrak{C})$.*

Множество $\mathfrak{C}$ будем называть *порождающим* минимальный моноид $\mathrm{M}(\mathfrak{C})$. В частности, если $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ и $\mathrm{M}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{C}$ порождает моноид $\mathfrak{A}$. Справедливо утверждение.

Теорема 1. *Для любого моноида $\mathfrak{A}$ и любого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ существует единственный минимальный моноид $\mathrm{M}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{A}$.*

□ Рассмотрим множество

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{d=0}^{\infty} \mathfrak{C}_*^d \,, \quad \mathfrak{C}_*^0 = \{\mathsf{e}\} \,. \tag{3}$$

Пусть x_j, $j = 1 \div d$ — набор любых отличных от e элементов моноида, не обязательно различных между собой. Тогда элемент $\mathsf{x}_1 * \ldots * \mathsf{x}_d \in \mathfrak{B}_*^d$ и, согласно определению моноида, он принадлежит любому моноиду, содержащему элементы x_j, $j = 1 \div d$. Следовательно, любой такой элемент принадлежит $\mathrm{M}(\mathfrak{C})$ и поэтому, ввиду произвольности $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}(\mathfrak{C}) \supset \mathfrak{B}$.

С другой стороны, $\mathfrak{B}$ является моноидом, ввиду замкнутости этого множества относительно операции $*$. В самом деле, если $\mathsf{y}_j \in \mathfrak{B}$; $j = 1, 2$, то существуют такие числа $d_1 \in \mathbb{N}_+$ и $d_2 \in \mathbb{N}_+$, что $\mathsf{y}_j \in \mathfrak{B}_*^{d_j}$; $j = 1, 2$. Тогда существуют такие последовательности $\langle \mathsf{x}_1^{(j)}, \ldots, x_{d_j}^{(j)} \rangle$ элементов из $\mathfrak{C}$, что $\mathsf{y}_j = \mathsf{x}_1^{(j)} \ldots \mathsf{x}_{d_j}^{(j)}$, $j = 1, 2$. Отсюда следует, что $\mathsf{y}_1 * \mathsf{y}_2 = \mathsf{x}_1^{(1)} * \ldots * \mathsf{x}_{d_1}^{(1)} * \mathsf{x}_1^{(2)} * \ldots * \mathsf{x}_{d_2}^{(2)} \in \mathfrak{B}_*^{d_1} * \mathfrak{B}_*^{d_2} = \mathfrak{B}_*^{d_1+d_2}$, то есть $\mathsf{y}_1 * \mathsf{y}_2 \in \mathfrak{B}$.

Так как $\mathfrak{B}$ — моноид, содержащий $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{B} \supset \mathrm{M}(\mathfrak{C})$. Из полученных двух противоположных включений следует, что $\mathfrak{B} = \mathrm{M}(\mathfrak{C})$. ■

Следствие 1. *Минимальный моноид $\mathrm{M}(\mathfrak{C})$, порожденный множеством $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, состоит из всех произведений $\mathsf{x} = \mathsf{x}_1 * \mathsf{x}_2 * \ldots * \mathsf{x}_l$, составляемых из компонент последовательностей $\langle \mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_l \rangle$, где $\mathsf{x}_j \in$, $j = 1 \div l$, $l \in \mathbb{N}$. Если моноид $\mathfrak{A}$ коммутативен, то элементы x моноида $\mathrm{M}(\mathfrak{C})$ определяются множеством пар $\{\langle \mathsf{y}_j, m_j \rangle; j = 1 \div d\}$, где x_j — различные элементы из $\mathfrak{C}$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1 \div d$ и каждый из них представим в виде $m_1 \mathsf{y}_1 + \ldots + m_d \mathsf{y}_d$, $m_1 + \ldots + m_d = l$ с $m_j \mathsf{y}_j \equiv (\mathsf{y}_j)_+^{m_j}$, $j = 1 \div d$.*

Определение 3. *Если для моноида $\mathfrak{A}$ найдется такое порождающее его множество $\mathfrak{B}_0$, которое не содержит в себе никакого другого множества, порождающего моноид $\mathfrak{A}$, то множество $\mathfrak{B}_0$ называется системой образующих элементов моноида $\mathfrak{A}$, а его элементы — образующими моноида.*

Замечание 1. Для заданного моноида $\mathfrak{A}$ система образующих не обязана существовать.

Замечание 2. Если для элемента x моноида $\mathfrak{A}$ определен обратный ему элемент y такой, что $\mathsf{x} * \mathsf{y} = \mathsf{e}$ (в частности, такое положение имеет место, если $\mathfrak{A}$ является группой с операцией $*$), и если $\mathsf{x} \in \mathfrak{B}_0$, то с точки зрения Определения 3, $\mathsf{y} = \mathsf{x}^{-1}$ может входить в $\mathfrak{B}_0$ как независимый элемент.

Если множество $\mathfrak{A}$ конечно, то соответствующий моноид с операцией $*$ будем называть конечным. В противном случае – бесконечным. Приведем пример простейшего конечного моноида.

Пример 1. Моноид $\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, ..., d-1\}$, $d \geq 2$ с операцией $*$ сложения по модулю d и единичным элементом $\mathsf{e} = 0$. Этот моноид конечен, коммутативен и имеет один образующий элемент $\mathsf{x} = 1$.

Заметим, что в случае, когда моноид $\mathfrak{A}$ обладает множеством образующих, и он является минимальным для некоторого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, $\mathrm{M}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$, совсем необязательно, что образующие принадлежат $\mathfrak{C}$. В моноиде Примера 1 при $d = 6$ множество $\mathfrak{C} = \{2, 3\}$ его порождает, но содержит образующий элемент моноида — число 1. Будем говорить, что:

Определение 4. *Моноид $\mathfrak{A}$ содержит цикл, если в нем существует такой элемент a, для которого имеется пара элементов x и y, не совпадающих одновременно с e и таких, что выполняется равенство $\mathsf{x} * \mathsf{a} * \mathsf{y} = \mathsf{a}$.*

Моноид примера 1 содержит цикл, у которого $\mathsf{a} = \mathsf{e} = 0$, $d = n$ и $\mathsf{y}_j = 1$, $j = 1 \div n$, так как $1_+^n = \underbrace{(1 + ... + 1)}_{n} \bmod n = 0$ и $\mathsf{x}_i = 0$, $i = 1 \div m$.

Легко видеть, что в конечных моноидах всегда имеется цикл, так как взяв произвольный элемент z конечного моноида $\mathfrak{A}$ и построив последовательность $\langle \mathsf{z}_*^l ; l = 1 \div n \rangle$, ввиду конечности $\mathfrak{A}$, для любого элемента $\mathsf{z}_*^m \equiv \mathsf{a}$ получим, что при достаточно большом $n > m$ выполняется $\mathsf{a} * \mathsf{z}_*^{n-m} = \mathsf{a}$.

Заметим также, что если моноид $\mathfrak{A}$ с операцией $*$ для какого-то элемента x имеет обратный элемент x^{-1}, $\mathsf{e} = \mathsf{x} * \mathsf{x}^{-1}$ и, в частности, если моноид является группой относительно этой операции, то он, тривиальным образом, содержит цикл $\mathsf{x} = \mathsf{x} * \mathsf{x}^{-1} * \mathsf{x}$.

В настоящей работе мы будем рассматривать моноиды, у которых отсутствуют циклы. В связи этим, введем

Определение 5. *Если в моноиде $\mathfrak{A}$ отсутствуют циклы, то такой моноид называется направленным.*

Имеет место

Теорема 2. *Если моноид $\mathfrak{A}$ направленный и обладает набором $\mathfrak{B}_0$ образующих его элементов, то этот набор определен однозначным образом.*

□ Положим, имеются два набора $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_0'$ образующих элементов так, что их симметрическая разность не пуста $(\mathfrak{B}_0' \setminus \mathfrak{B}_0) \cup (\mathfrak{B}_0 \setminus \mathfrak{B}_0') \neq \varnothing$. Положим, для определенности, что $\mathsf{x} \in \mathfrak{B}_0 \setminus \mathfrak{B}_0' \neq \varnothing$. Тогда этот элемент представим в виде композиции образующих набора $\mathfrak{B}_0'$: $\mathsf{x} = \mathsf{x}_1' * ... * \mathsf{x}_l'$, $\mathsf{x}_j' \in \mathfrak{B}_0'$, $j = 1 \div l$. В свою очередь, каждая из образующих x_j' представима в виде композиции образующих элементов из набора $\mathfrak{B}_0$:

$$\mathsf{x}_j' = \mathsf{x}_{k_1^{(j)}} * ... * \mathsf{x}_{k_{m_j}^{(j)}} ; \quad \mathsf{x}_{k_s^{(j)}} \in \mathfrak{B}_0,\ s = 1 \div m_j ;\ j = 1 \div l .$$

Отсюда следует, что

$$\mathsf{x} = (\mathsf{x}_{k_1^{(1)}} * ... * \mathsf{x}_{k_{l_1}^{(1)}}) * ... * (\mathsf{x}_{k_1^{(l)}} * ... * \mathsf{x}_{k_{m_l}^{(l)}}) . \tag{4}$$

Если в последовательности сомножителей присутствует элемент x, как один из образующих элементов моноида $\mathfrak{A}$, то это означает, что в $\mathfrak{A}$ имеется цикл и это противоречит направленности моноида. Если же в этой последовательности элемент x отсутствует, то это противоречит тому, что он входит в набор образующих элементов, так как, ввиду представления в виде (4), его можно исключить из набора $\mathfrak{B}_0$. ■

Замечание 3. Если моноид $\mathfrak{A}$ обладает системой образующих $\mathfrak{B}_0$, то, согласно Теореме 1, каждый элемент $\mathsf{x} \in \mathfrak{A}$ содержится в одном из множеств $(\mathfrak{B}_0)_*^d$, $d \in \mathbb{N}_+$. Однако, даже в случае направленности моноида $\mathfrak{A}$, число d определено, вообще говоря, не единственным образом.

В дальнейшем, мы полагаем, что рассматриваются только направленные и, следовательно, бесконечные моноиды. Приведем примеры таких моноидов. Имея в виду предмет настоящей работы, все моноиды в приводимых ниже примерах коммутативны.

В примерах 2-5 числовое множество $\mathfrak{A}$ имеют счетную мощность. Это, во-первых, моноиды, связанные с натуральными числами.

Пример 2. Моноид $\mathfrak{A} = \mathbb{N} \cup \{0\} \equiv \mathbb{N}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ с операцией сложения натуральных чисел. Он имеет один образующий элемент $1 \in \mathbb{N}_+$. Единицей моноида является $0 \in \mathbb{N}_+$.

Пример 3. Моноид $\mathfrak{A} = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ с операцией умножения натуральных чисел. Используя основную теорему арифметики, заключаем, что он имеет бесконечный набор $\mathfrak{B}_0$ образующих, которые представляются множеством простых натуральных чисел $\mathfrak{P}$.

Следующие примеры связаны с рациональными числами.

Пример 4. Моноид $\mathfrak{A} = \mathbb{Q} = \{p/q \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$, состоящий из положительных рациональных чисел. Он имеет бесконечный набор $\mathfrak{B}_0$ образующих, который состоит из всех дробей p/q, у которых числитель и знаменатель являются не равными друг другу простыми числами.

Пример 5. Моноид $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cup \{0\}$ с операцией сложения рациональных чисел. Он не обладает множеством образующих. Последнее связано с тем, что любое множество $\mathfrak{B}$ дробей $p/q \in \mathbb{Q}_+$, которое могло бы быть множеством образующих, при любом s^{-1}, $s \in \mathbb{N}$, можно сузить, ограничив его только дробями из $\mathfrak{B} \cap (0, s^{-1})$.

Моноиды, связанные с положительными действительными числами, которые имеют мощность континуума.

Пример 6. Моноиды с множествами $\mathfrak{A} = (0, \infty)$ и $\mathfrak{A} = [0, \infty)$ с операциями умножения и сложения действительных чисел, соответственно. Они не имеют множества образующих по причине, указанной в предыдущем примере.

Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ – два моноида. Обозначим посредством $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ моноид, который будем называть прямым произведением моноидов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, у которого множеством элементов служит декартово произведение множеств $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, а операция композиции определена следующим образом. Для любых двух пар $\mathsf{a}^{(1)} = \langle \mathsf{a}_1^{(1)}, \mathsf{a}_2^{(1)} \rangle$ и $\mathsf{a}^{(2)} = \langle \mathsf{a}_1^{(2)}, \mathsf{a}_2^{(2)} \rangle$ из $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ так, что $\mathsf{a}_j^{(i)} \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2,$; $j = 1, 2$, их композиция в моноиде $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ равна $\mathsf{a}^{(1)} * \mathsf{a}^{(2)} \equiv \langle \mathsf{a}_1^{(1)}, \mathsf{a}_2^{(1)} \rangle * \langle \mathsf{a}_1^{(2)}, \mathsf{a}_2^{(2)} \rangle = \langle \mathsf{a}_1^{(1)} * \mathsf{a}_1^{(2)}, \mathsf{a}_2^{(1)} * \mathsf{a}_2^{(2)} \rangle$.

Понятие прямого произведения моноидов распространяется на произвольный упорядоченный набор $\langle \mathfrak{A}^{(j)};\ j = 1 \div d \rangle$ моноидов индукцией по его длине d. А именно, прямое произведение $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_d$ компонент этого набора определяется на основе индукционного шага

$$\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_d \times \mathfrak{A}_{d+1} = (\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_d) \times \mathfrak{A}_{d+1}$$

от значения d к $d + 1$.

Принимая данное определение прямого произведения моноидов, дальнейшие примеры направленных моноидов, в конструкции которых используются числовые множества, строятся на основе каждого из моноидов, указанных в примерах 2-6, посредством построения их прямых произведений, в частности, степеней (в смысле прямого произведения) одного и того же моноида, кратность которых может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае кратность степени может иметь любое бесконечное кардинальное число. Легко видеть, что во всех моноидах, являющихся степенями одного из моноидов примеров 2-6, реализуется точно такая же ситуация, с точки зрения существования в них множества образующих, какая имеет место в исходном моноиде, степень которого рассматривается.

3. Минимальные k-потентные множества. Прежде всего, отметим справедливость простейших утверждений, связывающих операцию композиции в моноиде с булевскими операциями.

Лемма 1. *Для любых подмножеств $\mathfrak{B}_j$, $j = 1, 2$ и $\mathfrak{C}$ моноида $\mathfrak{A}$ имеют место равенства*

$$(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} = (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}), \qquad (\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} = (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}). \tag{5}$$

□ Положив, что $\mathsf{x} \in \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ и $\mathsf{y} \in \mathfrak{C}$, то есть $\mathsf{x} * \mathsf{y} \in (\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C}$, где, не ограничивая общности, $\mathsf{x} \in \mathfrak{B}_1$, получим, что $\mathsf{x} * \mathsf{y} \in \mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}$ и, следовательно, $\mathsf{x} * \mathsf{y} \in (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Таким образом, ввиду произвольности x и y, $(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} \subset (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Обратное включение доказывается аналогично и поэтому выполняется первое из равенств (5).

Пусть теперь $\mathsf{x} \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ и, как и ранее, $\mathsf{y} \in \mathfrak{C}$. Тогда $\mathsf{x} \in \mathfrak{B}_1$ и $\mathsf{x} \in \mathfrak{B}_2$. Поэтому $\mathsf{x} * \mathsf{y} \in \mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}$ и, одновременно, $\mathsf{x} * \mathsf{y} \in \mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}$. Следовательно, $\mathsf{x} * \mathsf{y} \in (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Ввиду произвольности элементов x и y, имеет место включение $(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} \subset (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Обратное включение доказывается аналогично и поэтому выполняется второе равенство в (5). ■

Индукцией по числу компонент, входящих, соответственно, в объединение и пересечение подмножеств моноида $\mathfrak{A}$, используя формулы (5), убеждаемся в справедливости следующих равенств.

Следствие 1. *Для любого семейства множеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j \in \Sigma$ и любого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ имеют место равенства*

$$\Big(\bigcup_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j\Big) * \mathfrak{C} = \bigcup_{j \in \Sigma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}), \qquad \Big(\bigcap_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j\Big) * \mathfrak{C} = \bigcap_{j \in \Sigma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}). \tag{6}$$

Из формул (6), получаем

Следствие 2. *Для любых семейств множеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j \in \Sigma$ и $\mathfrak{C}_k \subset \mathfrak{A}$, $k \in \Gamma$ имеют место равенства*

$$\Big(\bigcup_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j\Big) * \Big(\bigcup_{k \in \Gamma} \mathfrak{C}_k\Big) = \bigcup_{j \in \Sigma, k \in \Gamma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}_k), \qquad \Big(\bigcap_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j\Big) * \Big(\bigcap_{k \in \Gamma} \mathfrak{C}_k\Big) = \bigcap_{j \in \Sigma, k \in \Gamma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}_k). \tag{7}$$

Следствие 3. *Для любой монотонной последовательности $\langle \mathfrak{B}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ подмножеств из моноида $\mathfrak{A}$ и любого подмножества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ выполняются равенства теоретико-множественных пределов*

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{C} * \mathfrak{B}_n = \mathfrak{C} * \lim_{n \to \infty} \mathfrak{B}_n.$$

□ На основании монотонности последовательности $\langle \mathfrak{B}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, утверждение следует из (6). ■

Обратимся к изучению мультипотентных множеств в направленных моноидах.

Определение 6. *k-потентное подмножество $\mathfrak{B}_\infty$ моноида $\mathfrak{A}$ будем называть минимальным, если оно не содержит в себе собственного подмножества $\mathfrak{B}$, которое является мультипотентным порядка k для моноида $\mathfrak{A}$.*

Очевидно, что, в силу данного определения, любое k-потентное множество одновременно является l-потентным при любом $l > k$.

В отличие от понятия системы образующих элементов моноида, которая может отсутствовать, понятие минимального k-потентного множества обладает универсальностью, так как справедлива

Теорема 4. *В любом моноиде $\mathfrak{A}$, для любого множества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ и при любом значении $k \in \mathbb{N}$ имеется, по крайней мере, одно минимальное k-потентное множество $\mathfrak{B}_\infty$, содержащее $\mathfrak{B}$.*

□ Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$. Множество $\mathfrak{A}$ является, тривиальным образом, k-потентным, так как $\mathfrak{A}^k_* = \mathfrak{A}$ и оно содержит $\mathfrak{B}$. Допустим, что оно не является минимальным. Тогда существует сужающаяся последовательность $\langle \mathfrak{B}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ k-потентных множеств, $\mathfrak{B}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_n$, $(\mathfrak{B}_n)^k_* = \mathfrak{A}$, каждое из которых содержит $\mathfrak{B}$, но не является минимальным. Рассмотрим теоретико-множественный предел $\mathfrak{B}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{B}_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$. Это множество не пусто, оно содержит множество $\mathfrak{B}$ и является k-потентным, так как

$$(\mathfrak{B}_\infty)^k_* = \Big(\lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_n\Big)^k_* = \lim_{n\to\infty} (\mathfrak{B}_n)^k_* = \big(\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}\big)^k_* = \mathfrak{A}$$

и, по построению, минимальным. ■

Замечание 4. Минимальное k-потентное множество, существование которого утверждается Теоремой 4 для произвольно выбранного множества $\mathfrak{B}$, не является, вообще говоря, минимальным в смысле определения 6. Если моноид $\mathfrak{A}$ обладает системой образующих $\mathfrak{B}_0$, то для того, чтобы минимальное k-потентное множество удовлетворяло Определению 6, нужно выбрать в качестве множества $\mathfrak{B}$ множество $\mathfrak{B}_0$.

В связи со сделанным замечанием следует также сказать, что при любом $k \in \mathbb{N}$ минимальное k-потентное множество, вообще говоря, не единственно даже в том случае, когда моноид обладает системой образующих элементов. Мы продемонстрируем такое положение на примере моноида $\mathbb{N}_+$ Примера 2. С этой целью мы покажем, как каждое минимальное k-потентное множество в этом моноиде строится на основе следующего алгоритма, который можно рассматривать как аналог решета Эратосфена в теории чисел.

Для любого множества $\mathfrak{C} \subset \mathbb{N}_+$ введем последовательность $\langle \mathfrak{C}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$, $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C} \cap (I_n \cup \{0\})$, $I_n = \{1, ..., n\}$. Пусть $\mathfrak{C}$ является k-потентным. Тогда $(\mathfrak{C}_n)^k_* \cap I_n = I_n$. Обратно, если такое свойство выполняется для компонент последовательности $\langle \mathfrak{C}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$, то множество $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}$ является k-потентным.

Заметим теперь, что для того чтобы подмножество $\mathfrak{C} \subset \mathbb{N}_+$ было минимальным k-потентным множеством, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующему условию: должна отсутствовать такая расширяющаяся последовательность $\langle \mathfrak{C}'_n \subset I_n; n \in \mathbb{N}\rangle$, для бесконечного набора номеров $n \in \mathbb{N}$ которой множества $\mathfrak{C}'_n$ — компоненты последовательности $\langle \mathfrak{C}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$, соответствующей множеству $\mathfrak{C}$, являются собственными подмножествами $\mathfrak{C}_n$, и при этом для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $(\mathfrak{C}'_n)^k_* \cap I_n = I_n$.

Основываясь на указанном замечании, опишем индуктивным образом алгоритм, в результате применения которого получается любое минимальное, в смысле Определения 6, k-потентное множество $\mathfrak{B}$ в моноиде $\mathbb{N}_+$.

Зададим, прежде всего, бесконечную последовательность номеров $\langle m_l \subset \mathbb{N}; l \in \mathbb{N}\rangle$. Множество $\mathfrak{B}$ должно, согласно Теоремам 5 и 7, содержать элементы $\{0, 1\}$. Положим для заданного $l \in \mathbb{N}$ множество $\mathfrak{C}_l$ уже определено. Для этого множества найдем такой минимальный номер $m \geq l$, для которого $\mathbb{N}_+ \setminus (\mathfrak{C}_l)^k_* = \varnothing$. Тогда определим $\mathfrak{C}_{l+1} = \mathfrak{C}_l \cup \{n\}$ таким образом, что $n \in I_m \setminus (\mathfrak{C}_l)^k_*$, если это множество не пусто и $m + 1 \neq m_l$. В противном случае, если хотя бы одно из этих условий нарушено, то положим $n = m + 1$.

Поступая описанным образом для каждого $l \in \mathbb{N}$, мы определяем множество $\mathfrak{C} = \lim_{l\to\infty} \mathfrak{C}_l$, которое, по построению, является минимальным k-потентным множеством в $\mathbb{N}_+$, так как удаление из него любого номера приводит к удалению номера в $\mathfrak{C}^k_*$.

Ввиду имеющегося произвола выбора последовательности номеров $\langle m_l \subset \mathbb{N}; l \in \mathbb{N}\rangle$ и произвольности выбора очередного номера n при применении алгоритма на шаге l в случае, если $l \neq m_l$ для непустого множества номеров $l \in \mathbb{N} \setminus \{l : m_l \neq m\}$, минимальное k-потентное множество $\mathfrak{C}$ в $\mathbb{N}_+$ не единственно. В частном случае, можно положить в качестве такого множества $\mathfrak{C}$, получаемому в результате применения описанного алгоритма, множество $\mathfrak{C} = \{kl + 1; l \in \mathbb{N}_+\}$.

Для направленных моноидов справедлива

Теорема 5. *Любое k-потентное множество $\mathfrak{B}$ в направленном моноиде $\mathfrak{A}$ содержит единицу* e *моноида.*

□ Допустим, что утверждение теоремы не имеет места. Тогда, так как $\mathfrak{B}^k_* = \mathfrak{A}$ и $\mathsf{e} \in \mathfrak{A}$, то должны существовать такие элементы $\mathsf{x}_j \in \mathfrak{B}$, $j = 1 \div k$, для которых $\mathsf{x}_1 * ... * \mathsf{x}_k = \mathsf{e}$. Однако, ввиду направленности моноида $\mathfrak{A}$, то есть отсутствия в нем циклов, это равенство может иметь место только в случае, когда $\mathsf{x}_j = \mathsf{e}$, $j = 1 \div k$. ■

Следствие. *Для любого k-потентного множества $\mathfrak{B}$ выполняется $\mathfrak{B} * \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.*

□ Это следует из того, что множество $\mathfrak{B}$ содержит e. Тогда любой элемент x представим в виде $\mathsf{x} * \mathsf{y} = \mathsf{x}$ с $\mathsf{y} = \mathsf{e} \in \mathfrak{B}$. ■

Далее, будем предполагать, что моноид $\mathfrak{A}$, наряду с направленностью, обладает системой образующих $\mathfrak{B}_0$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любого направленного моноида $\mathfrak{A}$, обладающего системой образующих $\mathfrak{B}_0$, при любом $k \in \mathbb{N}$, каждое k-потентное множество $\mathfrak{B}$ содержит $\mathfrak{B}_0$.*

□ Допустим противное, что в системе $\mathfrak{B}_0$ образующих элементов моноида $\mathfrak{A}$ имеется такой элемент x, который не содержится в $\mathfrak{B}$. Тогда, так как $\mathfrak{B}$ является k-потентным, то в этом множестве найдется такая последовательность $\langle \mathsf{y}_1, ..., \mathsf{y}_k \rangle$, $\mathsf{y}_j \in \mathfrak{B}$, $j = 1 \div k$, что имеет место равенство $\mathsf{y}_1 * ... * \mathsf{y}_k = \mathsf{x}$. При этом каждый из элементов y_j представим в виде композиции $\mathsf{y}_j = \mathsf{x}_{k_1^{(j)}} * ... * \mathsf{x}_{k_{m_j}^{(j)}}$, где ее компонентами $\mathsf{x}_{k_l^{(j)}}$, $l = 1 \div m_j$ являются образующие элементы моноида $\mathfrak{A}$, $j = 1 \div k$. Подстановка этих разложений элементов y_j, $j = 1 \div k$ в композицию $\mathsf{y}_1 * ... * \mathsf{y}_k = \mathsf{x}$ дает представление образующего элемента x в виде произведения, в состав которого входят только образующие элементы из $\mathfrak{B}_0$.

Может реализоваться только один из двух случаев:

1) В списке всех компонент последовательностей $\langle \mathsf{x}_{k_1^{(j)}}, ..., \mathsf{x}_{k_{m_j}^{(j)}} \rangle$, $j = 1 \div k$ отсутствует образующий элемент x.

2) Среди всех компонент последовательностей $\langle \mathsf{x}_{k_1^{(j)}}, ..., \mathsf{x}_{k_{m_j}^{(j)}} \rangle$, $j = 1 \div k$ присутствует элемент x.

Если имеет место положение 1), то элемент x не может входить в систему образующих элементов $\mathfrak{B}_0$ ввиду минимальности ее выбора. Пусть имеет место положение 2) и l — номер последнего элемента из числа тех, которые входят в состав композиции $\mathsf{x} = \mathsf{y}_1 * ... * \mathsf{y}_k$ и в композиции которого присутствует образующий элемент x, а $k_s^{(l)}$ – номер такого элемента в композиции элемента y_l, что $\mathsf{x}^{(l)}_{k_s^{(l)}} = \mathsf{x}$ так, что он представляет последнее вхождение этого образующего элемента в композицию $\mathsf{y}_l = \mathsf{x}_{k_1^{(j)}} * ... * \mathsf{x}_{k_{m_j}^{(j)}}$. Тогда в композиции $\mathsf{x} = \mathsf{y}_1 * ... * \mathsf{y}_k$ имеется цикл

$$(\mathsf{y}_1 * ... * \mathsf{y}_{l-1} * \mathsf{x}_{k_1^{(l)}} * ... * \mathsf{x}^{(l)}_{k_{s-1}^{(l)}}) * \mathsf{x} * (\mathsf{x}_{k_{s+1}^{(l)}} * ... * \mathsf{x}_{k_{m_l}^{(l)}} * \mathsf{y}_{l+1} * ... * \mathsf{y}_k) = \mathsf{x} \,. \qquad ■$$

Введение понятия о k-потентных множествах полезно в том смысле, что на его основе допустимо введение множеств, порождающих направленный моноид $\mathfrak{A}$ и обладающих определенной универсальностью в том смысле, что они существуют вне зависимости от существования в этом моноиде системы образующих элементов.

Прежде всего докажем следующее подготовительное утверждение.

Лемма 2. *Для каждого множества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ существует сужающаяся последовательность $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ минимальных k-потентных множеств, каждое из которых содержит $\mathfrak{B}$.*

□ В силу Теоремы 4, найдется минимальное 2-потентное множество $\mathfrak{B}_2$, содержащее $\mathfrak{B}$. Пусть построена сужающаяся последовательность $\langle \mathfrak{B}_l; l = 1 \div k \rangle$ минимальных k-потентных множеств. Каждое k-потентное множество является $(k+1)$-потентным множеством, так как, в силу следствия Теоремы 5, $(\mathfrak{B}_k)_*^{k+1} = \mathfrak{B}_k * (\mathfrak{B}_k)_*^k = \mathfrak{B}_k * \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Выделим в таком $(k+1)$-потентном множестве минимальное, согласно конструкции доказательства Теоремы 4, которое обозначим посредством $\mathfrak{B}_{k+1}$. Оно содержит $\mathfrak{B}$, по построению. ■

Теорема 7. *Пусть моноид $\mathfrak{A}$ направленный. Тогда для любой сужающейся последовательности $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ k-потентных множеств множество*

$$\bar{\mathfrak{B}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$$

содержит систему $\mathfrak{B}_0$ образующих элементов моноида $\mathfrak{A}$, если она существует, и порождает моноид $\mathfrak{A}$.

□ Пусть e – единица моноида $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{B}_0$ — множество его образующих элементов, которое может иметь любую мощность, то согласно Теореме 6, оно содержится в любом из множеств $\mathfrak{B}_n$. Следовательно, имеет место включение $\mathfrak{B}_0 \subset \bar{\mathfrak{B}}$.

Докажем, что минимальный моноид $\mathrm{M}(\bar{\mathfrak{B}})$ всегда совпадает с моноидом $\mathfrak{A}$. Для двух сужающихся последовательностей $\langle \mathfrak{B}_m; m \in \mathbb{N} \rangle$ и $\langle \mathfrak{C}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ имеем

$$\left(\lim_{m\to\infty} \mathfrak{B}_m \right) * \left(\lim_{n\to\infty} \mathfrak{C}_n \right) = \lim_{\substack{m\to\infty,\\ n\to\infty}} \mathfrak{B}_m * \mathfrak{C}_n = \lim_{\max\{m,n\}\to\infty} \mathfrak{B}_m * \mathfrak{C}_n = \lim_{l\to\infty} \mathfrak{B}_l * \mathfrak{C}_l \,.$$

Тогда, так как последовательность $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ в условии теоремы сужающаяся, $\bar{\mathfrak{B}} = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{B}_k$, то для нее, индукцией по $l \in \mathbb{N}$, используя утверждение Следствия 3, получаем

$$\bar{\mathfrak{B}}_*^{l+1} = \left(\lim_{n\to\infty} (\mathfrak{B}_n)_*^l \right) * \left(\lim_{m\to\infty} \mathfrak{B}_m \right) = \lim_{k\to\infty} (\mathfrak{B}_k)_*^{l+1} \,, \quad l \in \mathbb{N} \,.$$

Используя это соотношение, преобразуем выражение для $\mathrm{M}(\bar{\mathfrak{B}})$, определяемое Теоремой 1:

$$\mathrm{M}(\bar{\mathfrak{B}}) \equiv \bigcup_{l=0}^{\infty} \bar{\mathfrak{B}}_*^l = \bigcup_{l=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} (\mathfrak{B}_k)_*^l = \lim_{k\to\infty} \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_k)_*^l .$$

Так как $(\mathfrak{B}_k)_*^l = \mathfrak{A}$ при $l \geq k$, то

$$\mathrm{M}(\bar{\mathfrak{B}}) = \lim_{k\to\infty} \bigcup_{l=0}^{k-1} (\mathfrak{B}_k)_*^l \cup \bigcup_{k=l}^{\infty} \mathfrak{A} = \mathfrak{A} . \quad \blacksquare$$

Теорема 8. *Пусть моноид $\mathfrak{A}$ с единицей $\{\mathsf{e}\}$ направленный и обладает такой системой $\mathfrak{B}_0$ образующих элементов, что для любой возрастающей последовательности $\langle m_l; l \in \mathbb{N}\rangle$ номеров имеет место*

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{m_l} = \varnothing . \tag{8}$$

Тогда существует последовательность $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N}\rangle$ минимальных k-потентных множеств, определяемых неограниченно возрастающей последовательностью $\langle k; k \in \mathbb{N}\rangle$, для которой имеет место

$$\{\mathsf{e}\} \cup \mathfrak{B}_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k . \tag{9}$$

□ Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $k_l = 1 + kl$, $l \in \mathbb{N}_+$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{B}_k = \{\mathsf{e}\} \cup \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l}, \quad k \in \mathbb{N} .$$

Докажем, что каждая из компонент объединения является k-потентным множеством. На основании Теоремы 3, любой элемент $\mathsf{x} \in \mathfrak{A}$ содержится в одном из множеств $(\mathfrak{B}_0)_*^n$, $n \in \mathbb{N}_+$. Тогда, используя свойства булевской алгебры, вычислим

$$(\mathfrak{B}_k)_*^k = \Big(\{\mathsf{e}\} \cup \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l}\Big)_*^k = \{\mathsf{e}\} \cup \bigcup_{s=0}^{k} \Big(\bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l}\Big)_*^s =$$

$$= \{\mathsf{e}\} \cup \bigcup_{s=0}^{k} \bigcup_{m_1,\ldots,m_s=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_{m_1}} * (\mathfrak{B}_0)_*^{k_{m_s}} =$$

$$\{\mathsf{e}\} \cup \bigcup_{s=0}^{k} \bigcup_{m_1,\ldots,m_s=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_{m_1}+\ldots+k_{m_s}} = \{\mathsf{e}\} \cup \bigcup_{s=0}^{k} \bigcup_{m_1,\ldots,m_s=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{s+k(m_1+\ldots+m_s)} =$$

$$= \{\mathsf{e}\} \cup \bigcup_{s=0}^{k} \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{\langle m_1,\ldots,m_s\rangle: \\ m_1+\ldots+m_s=m}}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{km+s} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^n = \mathfrak{A} .$$

По построению, множества $\mathfrak{B}_k$ минимальны и

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k = \{\mathsf{e}\} \cup \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l} = \{\mathsf{e}\} \cup \mathfrak{B}_0 .$$

Это равенство получается в результате следующих преобразований:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{1+kl} = \mathfrak{B}_0 * \bigcup_{l=0}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{kl} = \mathfrak{B}_0 ,$$

так как

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{kl} = \varnothing ,$$

ввиду (8). ■

Замечание 5. Ограничение (8) на систему образующих элементов в условии теоремы имеет место в случае коммутативности моноида (см. след. раздел) или в случае конечности $\mathfrak{B}_0$.

Лемма 3. *Для любых натуральных k и l степень $(\mathfrak{B}_{kl})^l_* = \mathfrak{C}_k$ любого kl-потентного множества $\mathfrak{B}_{kl}$ является k-потентным множеством таким, что $\mathfrak{B}_{kl} \subset \mathfrak{C}_k$.*

□ Утверждение следует из того, что k-я степень множества $\mathfrak{B}_k$ равна $(\mathfrak{B}_k)^k_* = (\mathfrak{B}_{kl})^{lk}_* = \mathfrak{A}$, то есть множество $\mathfrak{B}_k$ является k-потентным. При этом, очевидно, имеет место включение $\mathfrak{B}_{kl} \subset \mathfrak{B}_k$, так как, согласно своему определению, множество $\mathfrak{B}_k$ содержит, в частности, все элементы $\mathfrak{B}_{kl} * \underbrace{\mathsf{e} * \ldots * \mathsf{e}}_{l-1}$. ■

Замечание 6. Ввиду утверждения леммы, множества в последовательности $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N}\rangle$ в утверждении Теоремы 8 можно подобрать таким образом, чтобы она была сужающейся. Для этого достаточно оставить в этой последовательности только те члены, чтобы для каждого фиксированного члена $\mathfrak{B}_k$ из их числа, последующий член $\mathfrak{B}_m$, $m > k$ обладал свойством $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}_k$. Например, можно положить $m = kn$. В этом случае $\mathfrak{B}_{kn}$ является kn-потентным согласно утверждению Теоремы 8 и из определения множеств $\mathfrak{B}_k$ следует, что имеет место $\mathfrak{B}_{kn} \subset \mathfrak{B}_k$.

Замечание 7. Формула (9) имеет место, вообще говоря, только для исключительных сужающихся последовательностей $\langle \mathfrak{B}_{k_l}; l \in \mathbb{N}\rangle$. Для демонстрации этого положения рассмотрим моноид Примера 2. Он имеет образующий элемент $\mathsf{x}_1 = 1$. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ построим последовательность $\langle \mathsf{x}^{(n)}_l; l \in \mathbb{N}_+\rangle$ согласно следующему алгоритму. Положим $\mathsf{x}^{(n)}_0 = 0, \mathsf{x}^{(n)}_1 = \mathsf{x}_1, \mathsf{x}^{(n)}_2 = 2$, $\mathsf{x}^{(n)}_3 = 2n+1$, где $2n = \max\{\mathsf{y} : \mathsf{y} = \mathsf{y}_1 + \ldots + \mathsf{y}_n,\ \mathsf{y}_j \in \{0,1,2\}\}$.

Далее, построим последовательно элементы

$$\mathsf{x}^{(n)}_{l+1} = 1 + \max\left\{\mathsf{y} : \mathsf{y} = \mathsf{y}_1 + \ldots + \mathsf{y}_n, \mathsf{y}_j \in \{\mathsf{x}^{(n)}_j; j = 0 \div l\}\right\}, \qquad l \in \mathbb{N}\,.$$

Компоненты каждой последовательности с фиксированным $n \in \mathbb{N}$ образуют множество $\mathfrak{B}_n = \{\mathsf{x}^{(n)}_j; j \in \mathbb{N}_+\}$. Оно является n-потентным по построению, так как суммы $\mathsf{y}_1 + \ldots + \mathsf{y}_n$, $\mathsf{y}_j \in \mathfrak{B}_n$ полностью заполняют промежуток между каждым числом $\mathsf{x}^{(n)}_l$ и $\mathsf{x}^{(n)}_{l+1}$. Кроме того, по построению, эти множества являются также минимальными и имеет место

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n = \{1, 2\}\,.$$

4. Коммутативные моноиды. В этом разделе мы рассмотрим более подробно коммутативные направленные моноиды $\mathfrak{A}$, которые обладают множеством образующих x_j, $j \in \mathfrak{J}$, где множество $\mathfrak{J}$ либо конечно и содержит d элементов, либо оно бесконечно и обладает $\mathrm{card}(\mathfrak{J}) = \aleph_s$, $s \in \mathbb{N}_+$. Операцию композиции в таких моноидах будем обозначать посредством знака +.

Определение 7. *Направленный моноид $\mathfrak{A}$, обладающий набором $\mathfrak{B}_0$ образующих его элементов, назовем однородным, если имеет место $(\mathfrak{B}_0)^m_* \cap (\mathfrak{B}_0)^n_* = \varnothing$ при $n \neq m$.*

Рассмотрим далее коммутативный моноид $\mathbb{N}^{\mathfrak{J}}_+$, где операцией композиции является покомпонентное сложение так, что каждый элемент a моноида представим в виде

$$\mathsf{a} = \sum_{i \in \mathfrak{J}} m_i \mathsf{x}_i \tag{10}$$

с $m_i \in \mathbb{N}_+$ и $\mathsf{x}_i = \langle \delta_{ij};\ j \in \mathfrak{J}\rangle$, $i \in \mathfrak{J}$ — множество образующих.

Для любых двух элементов a и

$$\mathsf{b} = \sum_{j \in \mathfrak{J}} n_j \mathsf{x}_j$$

с $n_j \in \mathbb{N}_+$, $j \in \mathfrak{J}$ их композиция представляется элементом

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} = \sum_{i \in \mathfrak{J}} (m_i + n_i)\mathsf{x}_i\,.$$

Теорема 9. *Если моноид $\mathfrak{A}$ обладает таким набором образующих $\mathfrak{B}_0 = \{\mathsf{x}_j;\ j \in \mathfrak{J}\}$, для которого имеет место $(\mathfrak{B}_0)^n_* \cap (\mathfrak{B}_0)^m_* = \varnothing$ при $n \neq m$, коммутативен и направлен, то он изоморфен моноиду $\mathbb{N}^{\mathfrak{J}}_+$. При этом единица* **e** *моноида отображается в* $\mathbf{0} \in \mathbb{N}^{\mathfrak{J}}_+$ *и множество образующих $\mathfrak{B}_0 = \{\mathsf{x}_j; j \in \mathfrak{J}\}$ моноида $\mathfrak{A}$ отображается в множество $\{\langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J}\rangle; i \in \mathfrak{J}\}$.*

□ Сопоставим единице $\mathsf{e} \in \mathfrak{A}$ элемент $\mathbf{0} \in \mathbb{N}^{\mathfrak{J}}_+$ и образующим x_i элементам — векторы $\langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J}\rangle$, $i \in \mathfrak{J}$ множества $\mathbb{N}^{\mathfrak{J}}_+$. Тогда первое утверждение теоремы следует из представления каждого из элементов коммутативного моноида, указанного в Следствии 1 Теоремы 1. Ввиду отсутствия циклов в моноиде $\mathfrak{A}$, e отображение в $\mathbf{0} \in \mathbb{N}^{\mathfrak{J}}_+$ однозначно.

Ввиду того, что множество образующих элементов в направленном моноиде $\mathfrak{A}$, согласно Теореме 2, единственно, его отображение в моноид $\mathbb{N}^{\mathfrak{J}}_+$ определено однозначным образом, с точностью до перестановки в нумерации элементов в $\{\mathsf{x}_j; j \in \mathfrak{J}\}$. ■

Нашей дальнейшей задачей является найти необходимые и достаточные условия k-потентности множеств $\mathfrak{B}$ в коммутативном направленном моноиде, обладающем системой образующих. Ввиду Теоремы 7, достаточно исследовать моноиды $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$.

Любой элемент $\mathsf{a} = \langle m_i \in \mathbb{N}_+; i \in \mathfrak{J}\rangle \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ представляется в виде

$$\mathsf{a} = \sum_{i\in\mathfrak{J}} m_i \mathsf{x}_i \,. \qquad (11)$$

Если $\mathfrak{B}$ – k-потентное множество в $\mathfrak{A}$, то для элемента $\mathfrak{A}$ найдется такой набор элементов $\mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_k$, что имеет место

$$\mathsf{a} = \sum_{l=1}^{k} \mathsf{b}_l \,.$$

Каждый элемент из этого набора имеет представление, аналогичное (11),

$$\mathsf{b}_l = \sum_{j\in\mathfrak{J}} n_j^{(l)} \mathsf{x}_j \,, \qquad (12)$$

где $\langle n_j^{(l)} \in \mathbb{N}; j \in \mathfrak{J}\rangle$ и для каждого $l = 1 \div k$ множество тех номеров j, для которых $n_j^{(l)} \neq 0$ конечно.

Таким образом, для любого элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{A}$ из k-потентного множества $\mathfrak{B}$ в моноиде $\mathfrak{A}$ должно иметь место представление

$$\mathsf{a} = \sum_{j\in\mathfrak{J}} m_j \mathsf{x}_j = \sum_{l=1}^{k}\sum_{j\in\mathfrak{J}} n_j^{(l)} \mathsf{x}_j = \sum_{j\in\mathfrak{J}} \mathsf{x}_j \sum_{l=1}^{k} n_j^{(l)} \,.$$

Ввиду однозначности разложения (11), это означает, что для любого набора натуральных чисел $\langle m_j; j \in \mathfrak{J}\rangle$, среди которых имеется только лишь конечное множество $\Delta(\mathsf{a})$, отличных от нуля, должна быть разрешима в натуральных числах система уравнений

$$m_j = \sum_{l=1}^{k} n_j^{(l)} \,, \quad j \in \Delta(\mathsf{a}) \,, \qquad (13)$$

где $\langle n_j^{(l)}; j \in \mathfrak{J}\rangle \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$, $l = 1 \div k$. Таким образом, справедлива

Теорема 10. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы множество* $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ *было k-потентным, является наличие в нем таких элементов, представляемых в виде* (12)*, для которых разрешима система уравнений* (13).

Следствие 1. *Для любого элемента* a *направленного коммутативного моноида* $\mathfrak{A}$*, обладающего системой образующих элементов* $\mathfrak{B}_0$*, представление* (11) *единственно.*

$\square$ Воспользуемся изоморфизмом между моноидом $\mathfrak{A}$ и $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ и положим $\mathsf{x}_i = \langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J}\rangle$, $i \in \mathfrak{J}$. Допустив, что имеются два различных представления a в виде (11) с такого типа образующими

$$\mathsf{a} = \sum_{i\in\mathfrak{J}} m_i \mathsf{x}_i \,, \quad \mathsf{a} = \sum_{j\in\mathfrak{J}} n_j \mathsf{x}_j \,,$$

находим

$$\sum_{i\in\mathfrak{J}} (m_i - n_i)\mathsf{x}_i = 0 \,.$$

Откуда $n_j = m_j$, $j \in \mathfrak{J}$. $\blacksquare$

Следствие 2. *Каждый элемент* x *направленного коммутативного моноида с системой образующих элементов* $\mathfrak{B}_0$ *принадлежит только одному из множеств* $(\mathfrak{B}_0)_*^d$, $d \in \mathbb{N}_+$.

$\square$ Если $\mathsf{x} \in (\mathfrak{B}_0)_*^d$, то в его представлении в виде (11) сумма $\sum_{j\in\mathfrak{J}} m_j$ равна d. $\blacksquare$

Теперь мы докажем утверждение, относящееся к моноидам, у которых $\mathfrak{J} \equiv I_d = \{1, ..., d\}$ конечно. Оно имеет важное значение для приложений изложенной выше теории. Введем функцию, характеризующую распределение элементов в любом подмножестве $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+^d$:

$$\varphi_{\mathfrak{B}}(x_1, ..., x_d) = |\{\mathsf{a} \in \mathfrak{B} : \mathsf{a} = \langle n_1, ..., n_d\rangle \in \mathbb{N}_+^d; n_j \le x_j, j = 1 \div d\}| \,, \quad \langle x_1, ..., x_d\rangle \in \mathbb{R}_+^d \,.$$

Эта *функция распределения* не убывает.

Лемма 4. *Пусть* $\varphi_{\mathfrak{C}}(x_1, ..., x_d) = |\{\mathsf{a} \in \mathfrak{C} : \mathsf{a} = \langle n_1, ..., n_d\rangle \in \mathbb{N}_+^d; n_j \le x_j, j = 1 \div d\}|$, $\langle x_1, ..., x_d\rangle \in \mathbb{R}_+^d$ – *функция распределения некоторого множества* $\mathfrak{C}$ *и пусть*

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^{(j)}(n_1, ..., n_d) = \varphi_{\mathfrak{C}}(n_1, ..., n_j, ..., n_d) - \varphi_{\mathfrak{C}}(n_1, n_2, ..., n_j - 1, ...n_d) \in \{0, 1\} \,, \quad j = 1 \div d \,.$$

Для того, чтобы элемент $\langle n_1, ..., n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d$ *принадлежал множеству* $\mathfrak{C}$*, необходимо и достаточно, чтобы при любом* $j = 1 \div d$ *имело место равенство*

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^{(j)}(n_1, ..., n_d) = 1\,. \tag{14}$$

□ В доказательстве нуждается только последнее утверждение. Если имеет место (14), то это означает одноэлементность множества $\{\mathrm{x} \in \mathfrak{C} : \mathrm{x} = \langle n_1', ..., n_d' \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n_l' \le n_l, l \ne j; n_j' = n_j\}$ при любом $j = 1 \div d$, так как при всех $j = 1 \div d$ имеет место

$$1 = |\{\mathrm{x} \in \mathfrak{C} : \mathrm{x} = \langle n_1', ..., n_d' \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n_l' \le n_l, l = 1 \div d\}| -$$

$$- |\{\mathrm{x} \in \mathfrak{C} : \mathrm{x} = \langle n_1', ..., n_d' \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n_l' \le n_l - \delta_{jl}, l = 1 \div d\}| =$$

$$= |\{\mathrm{x} \in \mathfrak{C} : \mathrm{x} = \langle n_1', ..., n_d' \rangle \in \mathbb{N}_+^d;\ n_l' \le n_l, l = 1 \div d\} \setminus$$

$$\{\mathrm{x} \in \mathfrak{C} : \mathrm{x} = \langle n_1', ..., n_d' \rangle \in \mathbb{N}_+^d;\ n_l' \le n_l - \delta_{jl}, l = 1 \div d\}| =$$

$$= |\{\mathrm{x} \in \mathfrak{C} : \mathrm{x} = \langle n_1', ..., n_d' \rangle \in \mathbb{N}_+^d;\ n_l' \le n_l, l \ne j; n_j' = n_j\}|\,.$$

Совокупность таких равенств с $j = 1 \div d$ эквивалентна

$$1 = \left|\bigcap_{j=1}^{d}\{\mathrm{x} \in \mathfrak{C} : \mathrm{x} = \langle n_1', ..., n_d' \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n_l' \le n_l, l \ne j; n_j' = n_j\}\right| =$$

$$= \left|\{\mathrm{x} \in \mathfrak{C} : \mathrm{x} = \langle n_1, ..., n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d\}\right|. \quad \blacksquare$$

Теорема 11. *Для того чтобы множество* $\mathfrak{B}$ *было* k*-потентным, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента* $\langle m_1, ..., m_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d$ *одновременно выполнялись все неравенства*

$$\sum_{\substack{\langle n_j^{(1)}, ..., n_j^{(k)} \rangle :\\ n_j^{(1)} + ... + n_j^{(k)} = m_j}} \prod_{l=1}^{k} \varphi^{(j)}(n_1^{(l)}, ..., n_d^{(l)}) \ge 1\,, \quad j = 1 \div d$$

и имело место $\varphi(0, ..., 0) = 1$.

□ Справедливость утверждения следует посредством применения для каждого $j = 1 \div d$ утверждений Теоремы 10 и Леммы 4. ■

В частности, при $k = 2$, $d = 1$ из теоремы получаем

Следствие. *Для квадратентности множества* $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+$ *необходимо и достаточно, чтобы для его функции распределения* $\varphi_{\mathfrak{B}}(x)$ *имело место* $\varphi_{\mathfrak{B}}(0) = 1$ *и выполнялось неравенство*

$$\sum_{n=1}^{m} \left[\varphi_{\mathfrak{B}}(n) - \varphi_{\mathfrak{B}}(n-1)\right] \cdot \left[\varphi_{\mathfrak{B}}(m-n) - \varphi_{\mathfrak{B}}(m-n-1)\right] \ge 1 \tag{15}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$.

5. Приложение к проблеме Гольдбаха. В 1742 году в переписке между К. Гольдбахом и Л. Эйлером была высказана следующая гипотеза: *Каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел.* Эта гипотеза получила название «бинарной проблемы Гольдбаха» (или проблемы Эйлера).

Первоначальная версия этой гипотезы (иногда называемая тернарной гипотезой Гольдбаха), написанная в письме Эйлеру от 7 июня 1742 года, гласит: «По крайней мере, кажется, что каждое число, которое больше 2, является суммой трех простых чисел» (см. [4], с. 421). Гольдбах рассматривал число 1 как простое. Такая условность в настоящее время не соблюдается. Поэтому в современной трактовке бинарная проблема Гольдбаха утверждает, что все положительные четные целые числа $2n$, большие 4, могут быть представлены в виде $p + q = 2n$ для $n \in \mathbb{N}$, где пару $\{p, q\}$ простых чисел иногда называют разбиением Гольдбаха.

Бинарная проблема Гольдбаха находится в стороне от каких-либо приложений в других разделах математики. Непонятна какая-либо ее практическая значимость. Отношение к ней очень точно выразил, и в свое время, Г. Х. Харди ([8], с. 19): «сравнительно легко делать умные догадки; действительно, есть утверждения, такие как теорема Гольдбаха, которые никогда не были доказаны и которые любой дилетант мог бы угадать». Однако, несмотря на такое положение, эта проблема привлекает своей загадочностью и, вместе с тем, спортивным интересом. Для ее решения привлекались (см. [2]), в разные периоды развития теории чисел, и привлекаются вплоть до настоящего времени (см., например, [6], [7],

[15], [17]) значительные интеллектуальные усилия. Однако, насколько нам известно, в настоящее время ее полное решение отсутствует. Предложенные методы исследования не позволили решить эту проблему в той ее исходной формулировке, которая приведена выше. Все сделанные к настоящему времени утверждения относительно найденного доказательства правильности бинарной проблемы Гольдбаха крайне сомнительны.[1)]

В связи со сложностью обнаружения прямого доказательства правильности бинарной гипотезы Гольдбаха, много усилий было потрачено на получение каких-либо «приближенных» результатов, на основе которых можно было судить о существовании положительного решения проблемы. Одним из таких направлений является работа Т. Эстерманна [5], основанная на методе Виноградова И. М.

В этой работе показано, что *почти все чётные числа*, с точки зрения их распределения в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, представимы в виде суммы двух простых чисел. Этот результат был несколько усилен Х. Монтгомери и Б. Вон [9]. Было показано, что существуют положительные константы c и C такие, что количество чётных чисел, не больших N, не представимых в виде суммы двух простых чисел, не превышает CN^{1-c}.

Другое направление для получения результатов, родственных бинарной проблеме Гольдбаха, было указано Л. Г. Шнирельманом, который в своей замечательной работе привел следующее утверждение [14]: *всякое целое положительное число x может быть разложено на сумму ограниченного числа L простых чисел, где L не зависит от x* (L – число Шнирельмана).

Развитие подхода, предложенного в этой работе, привело к существенному прогрессу. Если первоначально число Шнирельмана оценивалось как $L = 300000$, то к настоящему времени его оценка доведена до $L = 6$ [12].

Покажем, каким образом эта проблема может быть сформулирована в терминах моноида $\mathbb{N}_+$ (в такой формулировке единица включается в множество простых чисел).

Обозначим посредством $\mathfrak{P}$ множество всех простых чисел. Нужно доказать, что каждое четное число $2(m+1)$, $m \in \mathbb{N}_+$ представимо в виде суммы двух простых $2(m+1) = p + q$, $p, q \in \mathfrak{P}$. Каждое простое число, большее 2, о которых идет речь в формулировке проблемы, нечетно. Таким образом, для этих чисел $p = 2r + 1$, $q = 2s + 1$; $r, s \in \mathbb{N}$ и $r + s = m$. Обратно, если $r, s \in \mathfrak{R}$, то $p + q = 2(r + s + 1) = 2(m + 1)$, $r + s + 1 \equiv m + 1$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Добавим к этим числам $p = q = 1$, для которых $r, s = 0$, что соответствует добавлению чисел $p + q = 2(m + 1)$ с $m = 0$ либо 1, для которых утверждение бинарной гипотезы Гольдбаха тривиально. В связи с этим, определим множество $\mathfrak{B}$ равенством

$$\mathfrak{B} = \{t \in \mathbb{N}_+ : 2t + 1 \in \mathfrak{P} \cup \{1\}\} \cup \{0\} .$$

Отсюда следует, что бинарная гипотеза Гольдбаха эквивалентна утверждению о том, что множество $\mathfrak{B}$ в моноиде $\mathbb{N}_+$ должно обладать свойством $\mathfrak{B} + \mathfrak{B} = \mathbb{N}$, то есть быть мультипотентным с показателем $k = 2$.

Рассмотрим используемую в теории чисел функцию (см., например, [11])

$$\psi(x) \equiv |\{p \in \mathfrak{P} : p \le x\}| , \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

Тогда

$$\psi(x) = |\{l \in \mathbb{N} : 2l + 1 \in \mathfrak{P}, 2l + 1 \le x\}| = |\{l \in \mathbb{N} : 2l + 1 \in \mathfrak{P}, l \le (x-1)/2\}| ,$$

и, используя определение множества $\mathfrak{B}$, имеем

$$|\{l \in \mathfrak{B} : l \le x\}| = |\{l \in \mathbb{N} : 2l + 1 \in \mathfrak{P}, l \le x\}| + 2 \equiv \psi(2x+1) + 2 , \qquad x \ge 2 .$$

Полагая $\varphi_{\mathfrak{B}}(x) = \psi(2x + 1) + 2$, на основании следствия Теоремы 11, получаем

Теорема 12. *Для того чтобы множество $\mathfrak{B}$ было квадрапотентным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $m \in \mathbb{N}$ имело место неравенство*

$$S(m) \equiv \sum_{n=1}^{m} \big[\psi(2n+1) - \psi(2n-1)\big] \cdot \big[\psi(2(m-n)+1) - \psi(2(m-n)-1)\big] \ge 1 . \tag{16}$$

6. Заключение. В работе введено понятие мультипотентности множеств в моноидах, которое, при наличии однородности и коммутативности в таких алгебраических структурах, оказывается полезным при анализе задач аналитической теории чисел, связанных с представлениями натуральных чисел в виде сумм чисел, обладающих специальными свойствами. Выявлены самые общие свойства мультипотентных множеств и представлена формулировка в терминах таких множеств с показателем $k = 2$ известной бинарной проблемы Гольдбаха. Ключевым результатом работы, позволяющим анализировать задачи указанного выше типа, является Теорема 11.

[1)] Например, такое утверждение сделано в [10]. Анализ этой работы приведен в [13].

References

1. Bourbaki N. 1959. Éléments de mathématique. Premiére partie, Les structures fondamentales de l'analyse, Livre II. Algebre. – Paris: Hermann & C, Éditeurs, 218 p.
2. Chudakov N. G. 1938. About Goldbach's problem. Uspekhi matematicheskikh nauk. 4: 14–33.
3. Correspondance mathematique et physique de quelques celebres geometres du XVIII-eme siecle (Band 1). 1743. St.-Petersbourg, 125—129.
4. Dickson L. E. 2005. Goldbach's Empirical Theorem: Every Integer is a Sum of Two Primes. In History of the Theory of Numbers, Vol. 1: Divisibility and Primality. New York: Dover, 421-424.
5. Estermann T. 1938. On Goldbach's problem: proof that almost all even positive integers are sums of two primes. Proc. London Math. Soc. 2(44): 307–314. doi:10.1112/plms/s2-44.4.307.
6. Guy R. K. 1994. Goldbach's Conjecture in Unsolved Problems in Number Theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 105-107.
7. Guy R. K. 2004. Unsolved Problems in Number Theory, 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
8. Hardy, G. H. 1999. Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work, 3rd ed. New York: Chelsea.
9. Montgomery H. L., Vaughan R. C. 1975. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta Arithmetica. 27: 353–370. doi:10.4064/aa-27-1-353-370.
10. Pogorzelski H. A. 1977. Goldbach Conjecture. J. reine angew. Math. 292: 1–12.
11. Prahar K. Primzahlverteilung. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, B. 91.— Berlin: Springer-Verlag, 1957.— 508 p.
12. Ramaré O. 1995. On Šnirel'man's constant. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 22(4): 645–706.
13. Shanks D. 1985. Solved and Unsolved Problems in Number Theory, 4th ed. New York: Chelsea, 30-31 and 222.
14. Schnirelmann L. G. 1933. Über additive Eigenschaften von Zahlen. Mathematische Annalen. 107: 649–690.
15. Wang Y. 1984. Goldbach Conjecture. Singapore: World Scientific.
16. Waring E. 1770. Meditationes algebraicae. Cambridge.
17. Woon M. S. C. On Partitions of Goldbach's Conjecture / 4 Oct 2000. https://arxiv.org/abs/math.GM/0010027.

Получена 07.07.2020

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и математической физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

http://orcid.org/0000-0002-5413-6179

ул. Победы, 85, г. Белгород, Россия, 308015

E-mail: virch@bsu.edu.ru