ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 51-7 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-140-151

Лемма о компактности в непериодических структурах и ее применении при усреднении уравнений диффузии-конвекции[1]

А. М. Мейрманов, О. В. Гальцев

Анварбек Мукатович Мейрманов — доктор физико-математических наук, профессор, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
e-mail: anvarbek@list.ru
Олег Владимирович Гальцев — кандидат физико-математических наук, доцент, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (г. Белгород).
e-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru

Аннотация

В работе доказывается сильная компактность последовательности $\{\tilde{c}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную в пространстве $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ с последовательностью производных по времени $\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\big(\chi(\boldsymbol{x},t,\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\tilde{c}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\big)\right\}$ ограниченной в пространстве $\mathbb{L}_2\big((0,T);\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\big)$, где характеристическая функция $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ есть 1-периодическая в $\boldsymbol{y} \in Y = \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)^3 \subset \mathbb{R}^3$.

В качестве приложения рассмотрим усреднение уравнения диффузии-конвекции в непериодической структуре, заданной 1-периодической в $\boldsymbol{y}$ характеристической функцией $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ с последовательностью бездивергентных скоростей $\{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$, слабо сходящейся в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Ключевые слова: лемма о компактности, усреднение, квадратично-суммируемые производные.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. М. Мейрманов, О. В. Гальцев О компактности в непериодических структурах и ее применении при усреднении уравнений диффузии-конвекции // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 140–151.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00105).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 51-7 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-140-151

A compactness result for non-periodic structures and its application to homogenization of diffusion-convection equations

A. M. Meirmanov, O. V. Galtsev

Anvarbek Mukatovich Meirmanov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).
e-mail: anvarbek@list.ru
Oleg Vladimirovich Galtsev — PhD in Physics and Mathematics, Assistant professor, Belgorod State National Research University (Belgorod).
e-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru

Abstract

The paper proves the strong compactness of the sequence $\{\tilde{c}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, bounded in the space $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ with the sequence of time derivatives $\Big\{\dfrac{\partial}{\partial t}\big(\chi(\boldsymbol{x},t,\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\ \tilde{c}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\big)\Big\}$ bounded in the space $\mathbb{L}_2\big((0,T);\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\big)$, where characteristic function $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ is 1-periodic in a variable $\boldsymbol{y}\in Y=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)^3\subset\mathbb{R}^3$.

As an application we consider the homogenization of a diffusion-convection equation in non-periodic structure, given by 1-periodic in $\boldsymbol{y}$ characteristic function $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ with a sequence of divergent-free velocities $\{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ weakly convergent in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Keywords: compactness lemma, homogenization, square-summable derivatives.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. M. Meirmanov, O. V. Galtsev, 2020, "A compactness result for non-periodic structures and its application to homogenization of diffusion-convection equations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 140–151.

1. Введение

В настоящей работе доказана лемма о компактности типа леммы Обэна [1, 2] для непериодических структур и с ее помощью находится усреднение уравнений диффузии-конвекции в такой среде. До настоящего времени известны несколько вариантов этой леммы (см. [3, 5], но ни один из них не применим к исследуемому нами случаю.

Для описания задачи рассмотрим 1-периодическую по переменной $\boldsymbol{y}\in Y=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)^3\subset\mathbb{R}^3$ измеримую функцию $\chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ такую, что $\chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=1$ при $\boldsymbol{y}\in Y_f(\boldsymbol{x})$ и $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=0$ при $\boldsymbol{y}\in Y_s(\boldsymbol{x})$.

Здесь $\overline{Y_f(\boldsymbol{x})\cup Y_s(\boldsymbol{x})}=\overline{Y}$, $Y_f(\boldsymbol{x})\cap Y_s(\boldsymbol{x})=\emptyset$, $Y_f(\boldsymbol{x})\cap Y_s(\boldsymbol{x})=\gamma(\boldsymbol{x})$ и поверхность $\gamma(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условию Липшица. Например, $Y_s(\boldsymbol{x})=\left\{\boldsymbol{y}\in Y:|\boldsymbol{y}|<r(\boldsymbol{x})<\dfrac{1}{2}\right\}$, $Y_f(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in Y:|\boldsymbol{y}|>r(\boldsymbol{x})\}$ и $\gamma(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in Y:|\boldsymbol{y}|=r(\boldsymbol{x})\}$.

Положим далее $\Omega^\varepsilon_f = \Big\{\boldsymbol{x} : \chi(\boldsymbol{x}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) = 1\Big\}$, $\Omega^\varepsilon_s = \Big\{\boldsymbol{x} : \chi(\boldsymbol{x}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) = 0\Big\}$, $Q^\varepsilon_f = \Omega^\varepsilon_f \times (0,T)$, $Q^\varepsilon_s = \Omega^\varepsilon_s \times (0,T)$, $\Gamma^\varepsilon = \overline{\Omega}^\varepsilon_f \cap \overline{\Omega}^\varepsilon_s$.

Всюду ниже ограничимся двумя структурами:

Структура 1:

$$Y_s(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : |\boldsymbol{y}| < r(\boldsymbol{x})\},\ \ Y_f(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : |\boldsymbol{y}| > r(\boldsymbol{x})\},$$

$$\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\big(r(\boldsymbol{x}) - |\boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{y})|\big),\ \ 0 \leqslant r(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{2},$$

где $r(\boldsymbol{x}) : 0 < r(\boldsymbol{x}) < \dfrac{1}{2}$, $r \in \mathbb{W}^{1,0}_\infty(\Omega_T)$ есть заданная функция, а периодическая функция $\boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{y})$ определяется формулой

$$\boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{y}) = (y_1 - [|y_1|], y_2 - [|y_2|], y_3 - [|y_3|]),$$

$[|a|]$ есть целая часть числа a;

Структура 2:

$$Y_s(\boldsymbol{x}) = Y^1_s(\boldsymbol{x}) \cup Y^2_s(\boldsymbol{x}) \cup Y^3_s(\boldsymbol{x});$$
$$Y^1_s(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : y_2^2 + y_3^2 < r(\boldsymbol{x})\},$$
$$Y^2_s(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : y_1^2 + y_3^2 < r(\boldsymbol{x})\},$$
$$Y^3_s(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : y_1^2 + y_2^2 < r(\boldsymbol{x})\},\ \ Y_f(\boldsymbol{x}) = Y \setminus \overline{Y_s}(\boldsymbol{x});$$
$$\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \chi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\chi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\chi_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$
$$\chi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{sng}\big(r^2(\boldsymbol{x}) - y_2^2 - y_3^2\big),$$
$$\chi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{sng}\big(r^2(\boldsymbol{x}) - y_1^2 - y_3^2\big),$$
$$\chi_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{sng}\big(r^2(\boldsymbol{x}) - y_1^2 - y_2^2\big),\ \ \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right).$$

Предположим для простоты, что $\Omega = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)^3$, $S = \partial\Omega$, $S^{\varepsilon,\pm} = \overline{\Omega}^\varepsilon_f \cap \Big\{x_1 = \pm\dfrac{1}{2}\Big\}$, $S^\pm = \Big\{x_1 = \pm\dfrac{1}{2}\Big\}$, $S^{\varepsilon,0} = \overline{\Omega}^\varepsilon_f \setminus \Big(\overline{S}^{\varepsilon,+} \cup \overline{S}^{\varepsilon,-}\Big)$, $S^0 = \left(\partial\Omega \setminus \left(\{x_1 = \dfrac{1}{2}\} \cup \Big\{x_1 = -\dfrac{1}{2}\Big\}\right)\right)$.

Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую диффузию-конвекцию примеси с концентрацией c^ε в области Q^ε_f с заданной скоростью $\boldsymbol{v}^\varepsilon$, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0, (\boldsymbol{x}, t) \in Q^\varepsilon_f$:

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla c^\varepsilon - c^\varepsilon\, \boldsymbol{v}^\varepsilon),\ \ (\boldsymbol{x}, t) \in Q^\varepsilon_f, \tag{1}$$

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \ (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma^\varepsilon \times (0,T), \tag{2}$$

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \ (\boldsymbol{x}, t) \in S^{0,\varepsilon} \times (0,T), \tag{3}$$

$$c^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = c^\pm(\boldsymbol{x}, t),\ (\boldsymbol{x}, t) \in S^{\varepsilon,\pm} \times (0,T), \tag{4}$$

$$c^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) = c_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega^\varepsilon_f. \tag{5}$$

В (1) – (5) D есть заданная положительная постоянная и $\boldsymbol{n}$ нормальный вектор к границе $S^{0,\varepsilon}$.

Согласно [6], задача (1) – (4) имеет единственное обобщенное решение $c^\varepsilon \in \mathbb{W}^{1,0}_2(Q^{f,\varepsilon}) \cap \mathbb{L}_\infty(Q^{f,\varepsilon})$ равномерно ограниченное в пространстве $\mathbb{W}^{1,0}_2(Q^{f,\varepsilon}) \cap \mathbb{L}_\infty(Q^{f,\varepsilon})$.

Далее, используя результаты [8, 9], продолжим полученные решения на всю область Ω_T.

Пусть $\widetilde{c}^{\varepsilon}$ будут такими продолжениями. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\widetilde{c}^{\varepsilon}\}$ слабо сходится к некоторой функции $c \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T) \cap \mathbb{L}_{\infty}(\Omega_T)$.

В качестве следующего шага покажем, что последовательность $\{\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t_0)\, \widetilde{c}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t_0)\}$ слабо сходится к функции $m(\boldsymbol{x}, t_0)\, c(\boldsymbol{x}, t_0)$ почти для всех $t_0 \in (0, T)$.

Здесь

$$m(\boldsymbol{x}, t) = \int_Y \chi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) dy. \tag{6}$$

В первую очередь покажем, что существует некоторая подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$, такая, что почти для всех $t_0 \in (0, T)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_k^2 \int_{\Omega} |\nabla \widetilde{c}^{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}, t_0)|^2 dx = 0, \tag{7}$$

и почти для всех $t_0 \in (0, T)$ последовательность $\{\widetilde{c}^{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}, t_0)\}$ сходится слабо и двухмасштабно к функции $c(\boldsymbol{x}, t_0)$.

Наконец, в качестве последнего шага докажем, что последовательность $\{\widetilde{c}^{\varepsilon_k}\}$ сильно сходится в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ к функции $c(\boldsymbol{x}, t)$.

Здесь и всюду далее для функциональных пространств и норм в этих пространствах будем использовать обозначения из [2, 6].

2. Вспомогательные утверждения

В этом разделе определим понятие двухмасштабной сходимости в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ и сформулируем основные результаты из [7, 8, 9] необходимые для доказательства основных утверждений.

Определение 1. Последовательность $\{u^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t)\}$, $u^{\varepsilon} \in L_2(\Omega_T)$, двухмасштабно сходится при $n \to \infty$ к 1-периодической в $\boldsymbol{y} \in Y = (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ функции $U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_T} \Psi(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) u^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) dx dt = \int_{\Omega_T} \left(\int_Y \Psi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) dy \right) dx dt$$

для любой гладкой 1-периодической в $\boldsymbol{y}$ функции $\Psi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$.

Обозначение: $u^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) \overset{two-sc.}{\longrightarrow} U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$.

Теорема 1. *(Габриэль Нгуэтсенг)*

1) Любая ограниченная в $L_2(\Omega_T)$ последовательность $\{u^{\varepsilon}\}$ двухмасштабно сходится в $L_2(\Omega_T)$ (с точностью до некоторой подпоследовательности) к некоторой 1-периодической в $\boldsymbol{y}$ функции $U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \in L_2(\Omega_T \times Y)$:

$$u^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) \overset{two-sc.}{\longrightarrow} U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}).$$

2) Пусть последовательность $\{u^{\varepsilon}\}$ ограничена в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$. Тогда последовательности $\{u^{\varepsilon}\}$ и $\{\nabla u^{\varepsilon}\}$ двухмасштабно сходится (с точностью до некоторой подпоследовательности) к некоторым функциям $u(\boldsymbol{x}, t)$ и $\nabla u(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_y U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ соответственно, где $u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$ и $\nabla_y U \in L_2(\Omega_T \times Y)$:

$$u^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) \overset{two-sc.}{\longrightarrow} u(\boldsymbol{x}, t),$$

$$\nabla u^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) \overset{two-sc.}{\longrightarrow} \nabla u(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_y U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}).$$

Определение 2. Последовательность $\{v^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\}$, $v^\varepsilon \in L_2(\Omega_T)$, слабо сходится как $n \to \infty$ к некоторой функции $v(\boldsymbol{x},t)$, $v \in L_2(\Omega_T)$ если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\varphi(\boldsymbol{x},t)v^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)dxdt = \int_{\Omega_T}\varphi(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x},t)dxdt$$

для любой гладкой функции $\varphi(\boldsymbol{x},t)$.

Примечание: $v^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup v(\boldsymbol{x},t)$.

Теорема 2. *[12]*
Любая ограниченная в $L_2(\Omega_T)$ последовательность $\{v^\varepsilon\}$ содержит слабо сходящиеся в $L_2(\Omega_T)$ подпоследовательности.

Переход к пределу в перфорированной области требует продолжения функций, определенных в области Q^ε_f, в область Ω_T. Для этого воспользуемся результатами для непериодических структур, аналогичными результатам [8, 9], доказанным для периодических структур. Из-за особого типа структур 1 и 2, особенно для структуры 1 (мягкие включения), доказательства в [8, 9] применимы и для наших случаев. Точнее, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $c^\varepsilon \in \mathbb{W}^{1,0}_2(Q^\varepsilon_f)$. Тогда существует продолжение $\widetilde{c}^\varepsilon \in \mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$ этой функции из Q^ε_f в Ω_T такой, что*

$$\int_{\Omega_T}|\widetilde{c}^\varepsilon|^2dxdt \leqslant M\int_{Q^\varepsilon_f}|c^\varepsilon|^2dxdt, \quad \int_{\Omega_T}|\nabla\widetilde{c}^\varepsilon|^2dxdt \leqslant M\int_{Q^\varepsilon_f}|\nabla c^\varepsilon|^2dxdt. \tag{8}$$

Здесь и всюду далее через M обозначается любая постоянная, не зависящая от ε.

3. Основные результаты

Пусть выполнены следующие условия:
Условия A
1) $c^\pm(\boldsymbol{x},t) = c^\pm(\boldsymbol{x})$;
2) *существует функция $c^0(\boldsymbol{x})$ такая, что $0 \leqslant c^0(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$, $c^0 \in \mathbb{W}^1_2(\Omega)$, и c^0 удовлетворяет граничным условиям (3) и (4);*
3) *функции $\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ удовлетворяют условиям*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^\varepsilon = 0,\ (\boldsymbol{x},t)\in Q^\varepsilon_f,\ \boldsymbol{v}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n} = 0,\ (\boldsymbol{x},t)\in(S^0\cup\Gamma^\varepsilon)\times(0,T),$$

$$\int_{Q^\varepsilon_f,}\big(|\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2 + |\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\big)dxdt \leqslant M^2;$$

4) *существует продолжение $\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon$ функций $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ из области $Q^{f,\varepsilon}$ в область Ω_T такое, что*

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon = 0,\ (\boldsymbol{x},t)\in Q^\varepsilon_f,\ \widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n} = 0,\ (\boldsymbol{x},t)\in(S^0\cup\Gamma^\varepsilon)\times(0,T),$$

$$\int_{\Omega_T}\big(|\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon|^2 + |\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon|^2\big)dx \leqslant M^2,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{v}\in L_2(\Omega_T),\ \text{и}\ \widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon \overset{two-sc.}{\longrightarrow} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{v}\in L_2(\Omega_T),$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,\ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T,\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n} = 0,\ \boldsymbol{x}\in S^0\times(0,T).$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ есть вектор нормали к соответствующим границам.

Определение 3. Функция $c^\varepsilon \in \mathbb{W}_2^{1,0}(Q^{f,\varepsilon})$ называется обобщенным решением задачи (1) – (5) если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q^{f,\varepsilon}} \Big(- c^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \big(D\,\nabla c^\varepsilon - c^\varepsilon\,\boldsymbol{v}^\varepsilon\big) \cdot \nabla \varphi \Big) dxdt = \int_{\Omega^{f,\varepsilon}(0)} c_0(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x},0) dx \tag{9}$$

для любой гладкой функции φ равной нулю на $S^{\varepsilon,\pm} \times (0,T)$ и при $\{t = T\}$ и краевым и начальным условиям (2) – (5).

Лемма 2. *При выполнении условий A для почти всех $\varepsilon > 0$ существует единственное обобщенное решение $c^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ задачи (1) – (5) такое, что*

$$\int_{Q^\varepsilon_f} |c^\varepsilon|^2 dxdt + \int_{Q^\varepsilon_f} |\nabla c^{\,\varepsilon}|^2 dxdt \leqslant M. \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть $\widetilde{c}^\varepsilon$ есть продолжение функции c^ε из Q^ε_f в Ω_T такое, что*

$$\int_{\Omega_T} |\widetilde{c}^\varepsilon|^2 dxdt \leqslant M \int_{Q^\varepsilon_f} |c^\varepsilon|^2 dxdt, \int_{\Omega_T} |\nabla \widetilde{c}^\varepsilon|^2 dxdt \leqslant M \int_{Q^\varepsilon_f} |\nabla c^\varepsilon|^2 dxdt. \tag{11}$$

Тогда при выполнении условий A для почти всех $t_0 \in (0,T)$ последовательность $\{\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x},t_0)\,\widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\}$ сходится слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega)$ к функции $m(\boldsymbol{x},t_0)\,c(\boldsymbol{x},t_0)$.

Лемма 4. *При выполнении условий A для почти всех $t_0 \in (0,T)$ существует некоторая подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что*

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \varepsilon_k^2 \int_\Omega |\nabla\, \widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t_0)|^2 dxdt = 0. \tag{12}$$

Лемма 5. *При выполнении условий A для почти всех $t_0 \in (0,T)$ последовательность $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t_0)\}$ сходится слабо и двухмасштабно в $\mathbb{L}_2(\Omega)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t_0)$.*

Лемма 6. *При выполнении условий A последовательность $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t)\}$ сходится сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t)$ из $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$.*

Теорема 3. *Предельная функция $c \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ удовлетворяет граничным и начальным условиям*

$$\big(D\,\mathbb{B} \cdot \nabla c - c\,\boldsymbol{v}\big) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \;\; (\boldsymbol{x},t) \in S^0 \times (0,T), \tag{13}$$

$$c(\boldsymbol{x},t) = c^\pm(\boldsymbol{x}), \;\; (\boldsymbol{x},t) \in S^\pm \times (0,T), \tag{14}$$

$$c(\boldsymbol{x},0) = c_0(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{15}$$

и усредненному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(m(\boldsymbol{x},t)\,c\big) = \nabla \cdot (D\,\mathbb{B} \cdot \nabla c - c\,\boldsymbol{v}) \tag{16}$$

в области Ω_T как решение интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} \Big(- m(\boldsymbol{x},t)\,c\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \big(D\,\mathbb{B} \cdot \nabla c - c\,\boldsymbol{v}\big) \cdot \nabla\varphi \Big) dxdt = 0 \tag{17}$$

для любых гладких функций φ, равных нулю на $S^\pm \times (0,T)$.

В (13) – (17) $\boldsymbol{n}$ есть нормальный вектор к границе S^0 и симметричная и строго положительно определенная матрица $\mathbb{B}$ определяется формулой (36).

4. Доказательство теоремы 3

4.1. Доказательство леммы 2

Доказательство леммы простое и основано на априорных оценках

$$\int\int_{Q_f^\varepsilon}\big(D\,|\nabla c^\varepsilon|^2\big)dxdt \leqslant M\Big(\int_{\Omega^{f,\varepsilon}(0)}|c_0(\boldsymbol{x})|^2dx+\int\int_{Q_f^\varepsilon}|c^0(\boldsymbol{x})|^2dxdt\Big) \tag{18}$$

$$0\leqslant c^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\leqslant 1, \tag{19}$$

которые следуют из интегрального тождества (9) после замены пробной функции φ на функцию $(c^\varepsilon - c^0)$, и из принципа максимума (см., например [6]).

4.2. Доказательство леммы 3

В силу Леммы B.1.5 (Приложение B, [10]) последовательность $\{\widetilde{c}^\varepsilon\}$ сходится двухмасштабно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ к функции c. То есть

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\,\varphi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)dxdt=\int_{\Omega_T}c(\boldsymbol{x},t)\left(\int_Y\varphi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})dy\right)dxdt. \tag{20}$$

Пусть

$$\varphi(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})=\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\,\eta(t)\,\psi(\boldsymbol{x}),$$

$$f^\varepsilon_\psi(t)=\int_\Omega\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\,\psi(\boldsymbol{x})dx,\;\; f_\psi=\int_\Omega m(\boldsymbol{x},t)\,\psi(\boldsymbol{x})dx.$$

Равенство (20) означает, что

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\eta(t)\,f^\varepsilon_\psi(t)dt=\int_0^T\eta(t)\,f_\psi(t)dt. \tag{21}$$

Обращаясь к тождеству (9) в форме

$$\int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon\left(-\widetilde{c}^{\,\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\big(D\,\nabla\widetilde{c}^{\,\varepsilon}-\widetilde{c}^{\,\varepsilon}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon\big)\cdot\nabla\varphi\right)dxdt=0 \tag{22}$$

с пробной функцией $\varphi\left(\boldsymbol{x},t,\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)=\eta(t)\,\psi(\boldsymbol{x})$, получим

$$\int_0^T(\frac{d\eta}{dt}\,f^\varepsilon_\psi+\eta\,U^\varepsilon)dt=0, U^\varepsilon=\int_\Omega(\chi^\varepsilon\,D\,\nabla\widetilde{c}^{\,\varepsilon}-\widetilde{c}^{\,\varepsilon}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)\cdot\nabla\psi dx$$

$$\int_0^T|U^\varepsilon|^2dt\leqslant M^2\,T\int_\Omega|\nabla\psi|^2dx. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\frac{df^\varepsilon_\psi}{dt}=U^\varepsilon,\;\; f^\varepsilon_\psi\in\mathbb{W}^1_2(0,T);\;\; |f^\varepsilon_\psi(t)|\leqslant M_\psi,\;\; |f^\varepsilon_\psi(t_1)-f^\varepsilon_\psi(t_2)|\leqslant M_\psi\,|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема Арцела-Асколи [11] позволяет нам выбрать подпоследовательность $\{f^{\varepsilon_k}_\psi\}$, сильно сходящуюся в пространстве $\mathbb{C}(0,T)$ к некоторой функции $\overline{f}_\psi$.

С другой стороны, в силу (21)

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\eta(t)\,f^\varepsilon_\psi(t)dt=\int_0^T\eta(t)\,\overline{f}_\psi(t)dt \tag{24}$$

для произвольной функции $\eta(t)$.

То есть, $f_\psi=\overline{f}_\psi$ почти всюду в $(0,T)$, что и доказывает лемму.

4.3. Доказательство леммы 4

В самом деле, равномерная ограниченность по ε величины $\int_{\Omega_T} |\nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dxdt$ влечет равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_T} |\nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dxdt = 0. \tag{25}$$

Пусть

$$u_\varepsilon(t_0) = \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dx. \tag{26}$$

Тогда (25) означает, что последовательность $\{u_\varepsilon\}$ сходится к нулю в пространстве $\mathbb{L}_1(0,T)$. Согласно [12] (теорема 1, §1, глава VII) существует подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k}\}$ сходящаяся к нулю почти всюду в $(0,T)$, что доказывает утверждение леммы.

4.4. Доказательство леммы 5

Поскольку последовательность $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon}\}$ ограничена в $\mathbb{L}_2(\Omega)$, то найдется подпоследовательность (оставим для простоты изложения прежние индексы), сходящаяся двух-масштабно к некоторой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\overline{C}(\boldsymbol{x},t_0,\boldsymbol{y})$ из пространства $\mathbb{L}_2(\Omega\times Y)$.

Интегрируя по частям выражение $\varepsilon_k \nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\cdot \boldsymbol{\varphi}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k}\right)\psi(\boldsymbol{x})$, получим равенство

$$\varepsilon_k \int_\Omega \nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\cdot \boldsymbol{\varphi}(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k})\psi(\boldsymbol{x})dx = \\ -\varepsilon_k \int_\Omega \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\big(\boldsymbol{\varphi}(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k})\cdot\nabla\psi(\boldsymbol{x})\big)dx - \int_\Omega \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\big(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k})\big)\psi(\boldsymbol{x})dx$$

справедливое для произвольных функций $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbb{W}^1_2(Y)$ и $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1_2(\Omega)$.

Предельный переход при $\varepsilon_k\to 0$ доставляет нам равенство

$$\int_\Omega \psi(\boldsymbol{x})\int_Y \overline{C}(\boldsymbol{x},t_0,\boldsymbol{y})\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})dy = 0,$$

которое, в силу произвольного выбора функций $\boldsymbol{\varphi}$ и ψ, эквивалентно соотношению

$$\overline{C}(\boldsymbol{x},t_0,\boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x},t_0).$$

Поскольку $\overline{c}(\boldsymbol{x},t_0)$ является и слабым пределом последовательности $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t_0)\}$, то в силу единственности слабого предела $\overline{c}(\boldsymbol{x},t_0) = c(\boldsymbol{x},t_0)$.

4.5. Доказательство леммы 6

Для доказательства этой леммы положим

$$\mathbb{H}^1 = \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1{}_2(\Omega)\subset \mathbb{H}^0 = \mathbb{L}_2(\Omega)\subset\mathbb{H}^{-1} = \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^{-1}{}_2(\Omega),\ \ w_k(\boldsymbol{x},t_0) = \widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t_0) - c(\boldsymbol{x},t_0)$$

и воспользуемся неравенством (оценка (9), § 10, главы III, [13])

$$\|w_k(.,t_0)\|^2_{\mathbb{H}^0} \leqslant \eta\,\|w_k(.,t_0)\|^2_{\mathbb{H}^1} + C_\eta\,\|w_k(.,t_0)\|^2_{\mathbb{H}^{-1}}.$$

Далее проинтегрируем по времени

$$\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^0}dt \leqslant \eta\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^1}dt + C_\eta\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^{-1}}dt,$$

и воспользуемся компактным вложением пространства $\mathbb{H}^0$ в пространство $\mathbb{H}^{-1}$ [14, 15]: слабая сходимость последовательности $\{w_k(.,t)\}$ в пространстве $\mathbb{H}^0(\Omega)$ влечет сильную сходимость этой последовательности в пространстве $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. То есть

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^{-1}}dt = 0.$$

Последнее соотношение и произвольный выбор η обеспечивают равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^{0}}dt = 0,$$

что завершает доказательство леммы.

4.6. Доказательство Теоремы 3

Теперь мы можем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (22) и получить необходимую усредненную систему уравнений (2) – (5). Теорема 1 позволяет извлечь некоторую подпоследовательность последовательности $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon}\}$ (для простоты оставим те же индексы) такую, что

$$\widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\overset{two-sc.}{\longrightarrow} c(\boldsymbol{x},t),\ \nabla_x\widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\overset{two-sc.}{\longrightarrow} \nabla_x c(\boldsymbol{x},t)+\nabla_y C(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \tag{27}$$

с некоторой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функцией $C(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\nabla_y C\in L_2(Q\times Y)$.

В силу условий A последовательность $\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\,\varepsilon}$ слабо сходится в $L_2(\Omega_T)$ к некоторой функции $\boldsymbol{v}\in L_2(\Omega_T)$ такой, что

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\ \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T,\ \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x},t)=0,\ \ (\boldsymbol{x},t)\in S^0. \tag{28}$$

Прежде всего рассмотрим в качестве пробной функции в (22) произвольную функцию $\varphi=\varphi_0(\boldsymbol{x},t)$ равной нулю на $S^{\pm}\times(0,T)$.

После перехода к пределу $\varepsilon\to 0$ получим

$$\begin{aligned} 0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\left(-\chi^\varepsilon\,\widetilde{c}^\varepsilon\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+(D\,\chi^\varepsilon\,\nabla\widetilde{c}^\varepsilon\ \nabla\varphi-\chi^\varepsilon\,c^\varepsilon\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon\cdot\nabla\varphi_0)\right)dxdt=\\ \int_{\Omega_T}\left(-m\,c\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\left(D\left(\nabla_x c+\int_Y\chi\,\nabla_y C\,dy\right)\cdot\nabla\varphi_0-m\,c\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi_0\right)\right)dxdt=0. \end{aligned}\tag{29}$$

Повторное интегрирование (29) дает необходимое усредненное уравнение диффузии-конвекции

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\,c)=\nabla_x\cdot\left(D\left(\nabla_x c+\left(\int_Y\chi\,\nabla_y C\,dy\right)\right)-m\,c\,\boldsymbol{v}\right) \tag{30}$$

с неизвестной функцией $C(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x})$.

Чтобы найти функцию C выберем в качестве пробной функции в (22) функцию $\varphi=\varphi_0(\boldsymbol{x},t)\ \varphi_1(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})$ с произвольной $\varphi_1(\boldsymbol{y})$.

После предельного перехода получим следующее интегральное тождество

$$0=\int_{\Omega_T}\varphi_0(\boldsymbol{x},t)\left(\int_Y(\nabla_x c+\nabla_y C-m\,c\,\boldsymbol{v})\cdot\nabla_y\varphi_1\right)dxdt \tag{31}$$

с произвольными пробными функциями φ_0 и φ_1.

В силу произвольности этих функций данное интегральное тождество эквивалентно следующей краевой задаче

$$\nabla_y\cdot\big(\nabla_x c+\nabla_y C-m\,c\,\boldsymbol{v}\big)=0,\ \boldsymbol{y}\in Y_f(\boldsymbol{x}),\ \big(\nabla_x c+\nabla_y C-m\,c\,\boldsymbol{v}\big)\cdot\boldsymbol{N}=0,\ \boldsymbol{y}\in\gamma(\boldsymbol{x}), \tag{32}$$

где $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, N_3)$ вектор нормали к границе $\gamma(\boldsymbol{x})$.

Подстановка представления

$$C = \sum_{i=1}^{3} C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, f_i(\boldsymbol{x}, t), \quad f_i = \frac{\partial c}{\partial x_i} - m\, c\, v_i \tag{33}$$

в (32) приводит к краевой задаче

$$\triangle\, C_i = 0,\ \boldsymbol{y} \in Y_f(\boldsymbol{x}), \ \ (\nabla_y C_i + \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{N} = 0,\ \in \gamma(\boldsymbol{x}), \tag{34}$$

имеющей единственное (с точностью до некоторой постоянной) решение [4, 8, 16] и

$$\nabla_x c + \nabla_y C - m\, c\, \boldsymbol{v} = D\, \mathbb{B}^c(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla_x c - m\, c\, \boldsymbol{v}), \tag{35}$$

где строго положительно определенная матрица $\mathbb{B}^c(\boldsymbol{x})$ определяется формулой

$$\mathbb{B}^c(\boldsymbol{x}) = \mathbb{I} + \sum_{i=1}^{3} \int_{Y_f(\boldsymbol{x})} \nabla C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dy. \tag{36}$$

Таким образом, усредненное уравнение диффузии-конвекции в области Ω_T примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\, c) = \nabla_x \big(D\, \mathbb{B}^c(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla_x c - m\, c\, \boldsymbol{v}) \big). \tag{37}$$

Легко показывается, что

$$c(\boldsymbol{x}, t) = c^{\pm}, \ \ (\boldsymbol{x}, t) \in S^{\pm} \times (0, T), \ \ \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \ \ (\boldsymbol{x}, t) \in S^0 \times (0, T) \tag{38}$$

и

$$c(\boldsymbol{x}, 0) = c_0, \ \ \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{39}$$

5. Заключение

В настоящей работе доказана лемма о компактности в непериодических структурах, позволяющая строго обосновать усреднение начально-краевой задачи, описывающей диффузию конвекцию примеси с заданным вектором скорости несущей жидкости. Данный результат можно использовать для описания диффузии-конвекции примеси при фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в непериодическом скелете грунта.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aubin J. P. Un théorème de compacité // C. R. Acad. Sci. 1963. V. 256. P. 5042-5044.

2. Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire. // Dunod, Paris. 1969. 576 p.

3. Chen X., Jungel A., Liu J. Note on Aubin-Lions-Dubinskii Lemmas // Acta. Appl. Math. 2014. V. 133. P. 33-43. DOI: 10.1007/s10440-013-9858-8

4. Meirmanov A., Zimin R. Compactness result for periodic structures and its application to the homogenization of a diffusion-convection equation // Electron. J. Diff. Equ. 2011. V. 2011. P. 1-11. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2011/115/meirmanov.pdf

5. Meirmanov A., Shmarev S. A compactness lemma of Aubin type and its application to a class of degenerate parabolic equations // Electron. J. Diff. Equ. 2014. V. 2014. P. 1-13. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/227/meirmanov.pdf

6. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type. // Providence, Rhode Island. 1968. 667 p.

7. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608-623. DOI: 10.1137/0520043

8. Jikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A. Homogenization of differential operators and integral functionals. // Springer-Verlag. 1994. 570 p.

9. Acerbi E., Chiad'o V., Maso G., Percivale D. An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. 1992. V. 5. P. 481-496. DOI: 10.1016/0362-546X(92)90015-7

10. Meirmanov A. Mathematical models for poroelastic flow. // Paris, Atlantis Press. 2014. 449 p.

11. Rudin W. Principles of mathematical analysis. // McGraw-Hill. 1976. 351 p.

12. Kolmogorov A. N., Fomin S.V. Introductory real analysis. // Dover Publications, New York. 1975. 416 p.

13. Adams R. A. Sobolev spaces. // Academic Press, New York. 1975. 320 p.

14. Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire. // Dunon, Gauthier-Vllar, Paris. 1969. 554 p.

15. Mikhailov V. P., Gushchin A. K. Additional chapters of the course "Equations of Mathematical Physics". // Lecture courses REC, Issue 7, V.A. Steklov's Mathematical Institute, RAS, Moscow. 2007. 146 p.

16. Bensoussan A., Lions J., Papanicolau G. Asymptotic Analysis for Periodic Structure. // Amsterdam: North Holland. 1978. 699 p.

REFERENCES

1. Aubin, J. P. 1963, "Un théorème de compacité", *C. R. Acad. Sci.* , vol. 256, pp. 5042-5044.

2. Lions, J. L. 1969, "Quelques methodes de resolution des problemes aux limites nonlineaire", *Dunod, Paris*, 576 p.

3. Chen, X. & Jungel, A. & Liu, J. 2014, "Note on Aubin-Lions-Dubinskii Lemmas", *Acta. Appl. Math.*, vol. 133, pp. 33-43. DOI: 10.1007/s10440-013-9858-8

4. Meirmanov, A. & Zimin, R. 2011, "Compactness result for periodic structures and its application to the homogenization of a diffusion-convection equation", *Electron. J. Diff. Equ.*, vol. 2011, pp. 1-11. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2011/115/meirmanov.pdf

5. Meirmanov, A. & Shmarev, S. 2014, "A compactness lemma of Aubin type and its application to a class of degenerate parabolic equations", *Electron. J. Diff. Equ.*, vol. 2014, pp. 1-13. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/227/meirmanov.pdf

6. Ladyzhenskaya, O. A. & Solonnikov, V. A. & Uraltseva, N. N. 1968, "Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type", *Providence, Rhode Island*, 667 p.

7. Nguetseng, G. 1989, “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization“, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 20, pp. 608-623. DOI: 10.1137/0520043

8. Jikov, V. V. & Kozlov, S. M. & Oleinik, O. A. 1994, “Homogenization of differential operators and integral functionals“, *Springer*, 570 p.

9. Acerbi, E. & Chiad‘o, V. & Maso, G. & Percivale, D. 1992, “An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains“, *Nonlinear Anal.*, vol. 5, pp. 481-496. DOI: 10.1016/0362-546X(92)90015-7

10. Meirmanov, A. 2014, “Mathematical models for poroelastic flow“, *Paris, Atlantis Press*, 449 p.

11. Rudin, W. 1976, “Principles of mathematical analysis“, *McGraw-Hill*, 351 p.

12. Kolmogorov, A. N. & Fomin, S. V. 1975, “Introductory real analysis“, *Dover Publications, INC., New York*, 416 p.

13. Adams, R. A. 1975, “Sobolev spaces“, *Academic Press, New York*, 320 p.

14. Lions, J. L. 1969, “Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaire“, *Dunon, Gauthier-Vllar, Paris*, 554 p.

15. Mikhailov, V. P. & Gushchin, A. K. 2007, “Additional chapters of the course “Equations of Mathematical Physics„‘, *Lecture courses REC, Issue 7, V.A. Steklov's Mathematical Institute, RAS, Moscow*, 146 p.

16. Bensoussan, A. & Lions, J. & Papanicolau, G. 1978, “Asymptotic Analysis for Periodic Structure“, *Amsterdam: North Holland*, 699 p.

Получено 11.03.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.