ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 198 (2021). С. 41–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-198-41-49

УДК 517.957.6

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА $\mathbb{R}^3$

© 2021 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. В. СУББОТИН**

Аннотация. В работе описан класс $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ дифференциальных операторов второго порядка дивергентного типа, обладающих инвариантностью относительно трансляций $\mathbb{R}^3$ и преобразующихся ковариантным образом при вращениях $\mathbb{R}^3$. На основе таких операторов возможно конструирование эволюционных уравнений для описания инвариантной относительно трансляций времени динамики векторного соленоидального поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ так, что каждый оператор класса $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ определяет инфинитезимальный сдвиг по времени t этого поля. Доказано утверждение о том, что класс всех эволюционных уравнений для унимодального векторного поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ тривиален.

Ключевые слова: дивергентный дифференциальный оператор, трансляционная инвариантность, векторное поле, ковариантность, плотность потока поля, унимодальность, соленоидальность.

SECOND-ORDER EVOLUTION EQUATIONS OF DIVERGENT TYPE FOR SOLENOIDAL VECTOR FIELDS ON $\mathbb{R}^3$

© 2021 **Yu. P. VIRCHENKO, A. V. SUBBOTIN**

Abstract. In this paper, we describe the class $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ of second-order differential operators of divergent type that are invariant under translations of $\mathbb{R}^3$ and are transformed covariantly under rotations of $\mathbb{R}^3$. Using such operators, one can construct evolutional equations that describe a translation-invariant dynamics of a solenoidal vector field $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ so that each operator of the class $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ determines an infinitesimal t-shift of this field. Also, we prove that the class of all evolutional equations for a unimodal vector field $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ is trivial.

Keywords and phrases: divergent differential operator, translational invariance, vector field, covariance, field flux density, unimodality, solenoidality.

AMS Subject Classification: 35Q60, 35K10

1. Введение. Одной из важных теоретических проблем современной физики является конструирование эволюционных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t) = (\mathsf{L}[\boldsymbol{V}])(\boldsymbol{x},t), \tag{1.1}$$

описывающих динамику конденсированных сред, обладающих сложной внутренней структурой (см., например, [3, 4]). Здесь точка обозначает дифференцирование по времени t. Пусть состояние описываемой динамической системы в каждый момент времени характеризуется набором зависящего от $t \in \mathbb{R}_+$ векторного поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) = \langle V_j(\boldsymbol{x},t);\ j = 1,\dots,n\rangle$ на $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Тогда L —

в общем случае, нелинейный дифференциальный оператор, действующий на пространстве $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$ полей $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$, непрерывно дифференцируемых подходящее число раз в соответствии с порядком оператора L. Указанная выше проблема состоит в определении оператора L, подчиненного некоторой совокупности таких общефизических ограничений, что решения уравнения (1.1) обладают наперед заданными инвариантами движения.

Помимо традиционных для теоретической физики подходов к решению такой задачи, представляется уместной разработка наиболее прозрачного с математической точки зрения подхода, основанного на описании кдасса всех тех дифференциальных операторов L, которые могли бы служить генераторами эволюции, согласно уравнению (1.1), и которые являются допустимыми с точки зрения упомянутых физических ограничений с наличием определенного набора инвариантов движения, безотносительно к выбору начальных и краевых условий. Решение такой задачи дает возможность выбора на практике подходящего дифференциального оператора из описанного класса дифференциальных операторов с целью математического моделирования той или иной физической ситуации.

В дальнейшем, имея в виду приложения описанного подхода к конструированию эволюционных уравнений вида (1.1) для решения некоторых проблем физики конденсированного состояния, потребуем, чтобы оператор L был инвариантен по отношению группы преобразований $\mathbb{T}\otimes\mathbb{R}^3$, где $\mathbb{T}$ — группа трансляций по переменной t, $\mathbb{R}^3$ — группа трансляций пространства $\mathbb{R}^3$. Эти требования приводят к тому, что оператор L не зависит явным образом ни от $t \in \mathbb{R}_+$, ни от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Кроме того, будем считать, что уравнение (1.1) преобразуется *ковариантным образом* при вращениях пространства $\mathbb{R}^3$. В настоящей работе ковариантность уравнения (1.1) рассматривается в простейшем случае, когда поле $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ принимает значения в $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$) так, что в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ поле $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) = \langle V_j(\boldsymbol{x},t);\ j = 1,2,3\rangle$, вместе со значениями $\mathsf{L}[\boldsymbol{V}]$ оператора L на этом векторном поле преобразуется при вращениях пространства $\mathbb{R}^3$ посредством элементов группы $\mathbb{O}_3$ (см., например, [5]). В этом случае мы называем оператор L *сферически симметричным.* Класс всех дифференциальных операторов, обладающих указанными выше свойствами обозначим посредством $\mathfrak{K}(\mathbb{R}^3)$.

Настоящая работа посвящена описанию подкласса $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ всех дифференциальных операторов L из класса $\mathfrak{K}(\mathbb{R}^3)$ дивергентного типа, имеющих второй порядок, и подчиненных дополнительному ограничению. Это ограничение состоит в том, что уравнение (1.1) с генератором L из класса $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ должно обладать инвариантом $(\nabla, \boldsymbol{V})$. Здесь и далее ∇ — операция градиента в $\mathbb{R}^3$. В частности, операторы класса $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ сохраняют свойство соленоидальности поля $\boldsymbol{V}$, $(\nabla, \boldsymbol{V}) = 0$. Попутно в работе будет показано, что подкласс операторов второго порядка, принадлежащих $\mathfrak{K}(\mathbb{R}^3)$, имеющих дивергентный тип и сохраняющих свойство унимодальности поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$, для которого $\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{const}$ тривиален, т.е. он состоит из одного оператора $\mathsf{L} = 0$. Решение указанных задач оказывается важным с точки зрения проблемы описания динамики твердотельной среды, обладающей собственным электрическим моментом (т. н. ферроэлектрической среды) (см., например, [1]) Векторное поле $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ играет роль плотности этой величины.

2. Векторные эволюционные уравнения дивергентного типа.

Согласно общему определению дивергентных дифференциальных операторов (см., например, [2]), оператор L, действующий в пространстве $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$, будем называть векторным оператором дивергентного типа, если получаемый на его основе образ $\mathsf{L}[\boldsymbol{V}](\boldsymbol{x},t)$ векторного поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ представим в виде

$$(\mathsf{L}[\boldsymbol{V}])_j(\boldsymbol{x},t) = \nabla_k (S[\boldsymbol{V}])_{j,k}(\boldsymbol{x},t), \quad j = 1,2,3,$$

где значение поля $(S[\boldsymbol{V}])_{j,k}(\boldsymbol{x},t)$ в каждой пространственно временной точке $\langle \boldsymbol{x}, t\rangle$ является тензором второго ранга относительно группы $\mathbb{O}_3$ (см., например, [6]). Здесь и далее принимается соглашение о суммировании в формулах по всем допустимым значениям двукратно повторяющихся индексов.

Далее мы будем интересоваться только дифференциальными операторами второго порядка из $\mathfrak{K}(\mathbb{R}^3)$, которые являются векторными операторами дивергентного типа. Класс всех таких операторов обозначим посредством $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}^3)$. Для каждого оператора этого класса соответствующее ему тензорное поле $S_{j,k}[\boldsymbol{V}]$ является результатом действия квазилинейного дифференциального оператора первого порядка на поле $\boldsymbol{V}$,

$$(S[\boldsymbol{V}])_{j,k}(\boldsymbol{x},t) = T_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V})\nabla_m V_l + U_{j;k}(\boldsymbol{V}). \tag{2.1}$$

Так как значения поля $(S[\boldsymbol{V}])_{j,k}(\boldsymbol{x},t)$ являются тензорами второго порядка в каждой пространственно временной точке, то коэффициенты $T_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V})$ и функции $U_{j;k}(\boldsymbol{V})$ являются тензор-функциями от значений поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$, соответственно, четвертого и второго ранга. (Далее мы в процессе вычислений в рамках тензорной алгебры не делаем различия между ковариантными и контравариантными индексами, что допустимо ввиду евклидовости пространства $\mathbb{R}^3$ (см. [6]).)

Следствием формулы (2.1) является то, что для описания класса $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}^3)$ необходимо и достаточно описать линейное многообразие всех тензор-функций вида (2.1) с точностью до $\varepsilon_{klm}\nabla_l Z_{j;m}(\boldsymbol{V})$ с произвольной дважды непрерывно дифференцируемой тензор-функцией $Z_{j;m}(\boldsymbol{V})$ (см., например, [8]). Здесь символ ε_{klm} представляет псевдотензор Леви-Чивиты. Так как функции $T_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V})$ и $U_{j;k}(\boldsymbol{V})$ не зависят явно от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, то для описания этого линейного многообразия достаточно описать линейные многообразия всех тензор-функций $T_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V})$ и $U_{j;k}(\boldsymbol{V})$ как функций от вектора $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^3$, значениями которых являются, соответственно, тензоры четвертого и второго рангов.

Пусть $\{T^{(\alpha)}_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V});\ \alpha \in \mathcal{T}\}$ и $\{U^{(\beta)}_{j;k}(\boldsymbol{V});\ \beta \in \mathcal{U}\}$ — конечные наборы базисных тензоров соответствующего ранга. Функции, составляющие эти базисы, представляются линейно независимыми мономами относительно тензорного произведения в алгебре с фиксированным набором образующих. Набор образующих в сферически симметричном случае состоит только из вектора $\boldsymbol{V}$ и универсального тензора второго ранга $\boldsymbol{\delta}$ (символ Кронекера). Полные наборы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ базисных тензоров даются следующим утверждением, доказательство которого осуществляется перебором всех возможных вариантов.

Теорема 1. *Набор $\mathcal{U}$ состоит из двух тензоров δ_{ij} и V_iV_j, а набор $\mathcal{T}$ состоит из* 10 *следующих элементов*:

(i) $\delta_{jk}\delta_{lm}$, $\delta_{jl}\delta_{km}$, $\delta_{jm}\delta_{kl}$;
(ii) $\delta_{jk}V_lV_m$, $\delta_{jl}V_kV_m$, $\delta_{jm}V_kV_l$, $\delta_{kl}V_jV_m$, $\delta_{km}V_jV_l$, $\delta_{lm}V_jV_k$;
(iii) $V_jV_kV_lV_m$.

Используя разложения тензоров $T_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V})$, $U_{j;k}(\boldsymbol{V})$ по базисным тензорам из представленных в формулировке теоремы списков и тот факт, что в сферически симметричном случае имеется только один инвариант $\boldsymbol{V}^2$ относительно совокупности всех преобразований пространства $\mathbb{R}^3$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Любые непрерывно дифференцируемые тензор-функции $T_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V})$ и $U_{j;k}(\boldsymbol{V})$ определяются формулами*

$$\begin{aligned} T_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V}) = f^{(1)}\delta_{jk}\delta_{lm} + f^{(2)}\delta_{jl}\delta_{km} + f^{(3)}\delta_{jm}\delta_{kl} + g^{(1)}\delta_{jk}V_lV_m + g^{(2)}\delta_{jl}V_kV_m + g^{(3)}\delta_{jm}V_kV_l + \\ + g^{(4)}\delta_{kl}V_jV_m + g^{(5)}\delta_{km}V_jV_l + g^{(6)}\delta_{lm}V_jV_k + hV_jV_kV_lV_m; \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$U_{j;k}(\boldsymbol{V}) = p^{(1)}\delta_{jk} + p^{(2)}V_jV_k, \tag{2.3}$$

где коэффициенты $f^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2,3$; $g^{(\beta)}$, $\beta = 1,\ldots,6$, h, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями от $\boldsymbol{V}^2 \in [0,\infty)$.

Так как каждое тензорное поле $(S[\boldsymbol{V}])_{j,k}(\boldsymbol{x},t)$ получается на основе формулы (2.1) выбором некоторой пары тензорных функций $T_{j,l;k,m}(\boldsymbol{V})$, $U_{j;k}(\boldsymbol{V})$ вида (2.2), (2.3), то следствием утверждения теоремы 2 является

Теорема 3. *Множество всех дифференциальных операторов $\mathsf{L}[\boldsymbol{V}] = \nabla_k S_{j,k}[\boldsymbol{V}]$ класса $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}^3)$, действующих в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых векторных полей $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$*

на $\mathbb{R}^3$*, определяется множеством всех тензорных полей* $(S[\boldsymbol{V}])_{j,k}(\boldsymbol{x},t)$*, которые даются формулой*

$$S_{j,k}[\boldsymbol{V}] = p^{(1)}\delta_{jk} + p^{(2)}V_jV_k + f^{(1)}\delta_{jk}(\nabla,\boldsymbol{V}) + f^{(2)}\nabla_kV_j + f^{(3)}\nabla_jV_k + \\ + \frac{1}{2}g^{(1)}\delta_{jk}(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 + g^{(2)}V_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j + \frac{1}{2}g^{(3)}V_k\nabla_j\boldsymbol{V}^2 + \\ + g^{(4)}V_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k + \frac{1}{2}g^{(5)}V_j\nabla_k\boldsymbol{V}^2 + g^{(6)}V_jV_k(\nabla,\boldsymbol{V}) + \frac{1}{2}hV_jV_k(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2, \quad (2.4)$$

где коэффициенты $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $f^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2,3$; $g^{(\beta)}$, $\beta = 1,\ldots,6$, h *являются непрерывно дифференцируемыми функциями от* $\boldsymbol{V}^2 \in [0,\infty)$.

3. Случай унимодальных полей. В этом разделе мы покажем, что класс всех операторов L, для которых решения $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ уравнения (1.1) обладают свойством унимодальности $\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{x},t) = V^2 = \text{const}$, состоит из нулевого оператора. Заметим, что каждый оператор L, который обладает указанным свойством, ввиду $V_j(\boldsymbol{x},t)\dot{V}_j(\boldsymbol{x},t) = V_j(\boldsymbol{x},t)(\mathsf{L}[\boldsymbol{V}])_j(\boldsymbol{x},t)$ должен удовлетворять тождеству

$$V_j(\mathsf{L}[\boldsymbol{V}])_j(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad (3.1)$$

для любого унимодального поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$. В этом случае слагаемые с коэффициентами $p^{(1)}$, $g^{(1)}$, $g^{(3)}$, $g^{(5)}$, h тождественно равны нулю. Следовательно, в операторе L, определяемом тензорными полями (2.4), слагаемые с этими коэффициентами можно исключить из рассмотрения, и поэтому

$$\mathsf{L}[\boldsymbol{V}] = p^{(2)}\nabla_kV_jV_k + f\nabla_j(\nabla,\boldsymbol{V}) + f^{(2)}\Delta V_j + \\ + g^{(2)}\nabla_kV_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j + g^{(4)}\nabla_kV_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k + g^{(6)}\nabla_kV_jV_k(\nabla,\boldsymbol{V}).$$

Здесь учтено, что коэффициенты оператора при условии $\boldsymbol{V}^2 = \text{const}$ являются постоянными, и при этом слагаемые с коэффициентами $f^{(1)}$, $f^{(3)}$ оказываются пропорциональными друг другу (в свертке $\nabla_kS_{j;k}$ появляются линейно зависимые слагаемые), так что можно ввести общий для них коэффициент $f^{(1)} + f^{(3)} = f$. Тождество (3.1) в этом случае принимает вид

$$p^{(2)}V_j\nabla_kV_jV_k + fV_j\nabla_j(\nabla,\boldsymbol{V}) + f^{(2)}V_j\Delta V_j + \\ + g^{(2)}V_j\nabla_kV_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j + g^{(4)}V_j\nabla_kV_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k + g^{(6)}V_j\nabla_kV_jV_k(\nabla,\boldsymbol{V}) = 0. \quad (3.2)$$

Его можно рассматривать как уравнение, определяющее коэффициенты $p^{(2)}$, f, $f^{(2)}$, $g^{(2)}$, $g^{(4)}$, $g^{(6)}$. Мы покажем, что единственным решением этого уравнения является равенство нулю всех указанных коэффициентов. Доказательство разобьем на несколько этапов.

I. При выполнении условия $\boldsymbol{V}^2 = \text{const}$ первое слагаемое преобразуется в $V_i\nabla_jV_iV_j = \boldsymbol{V}^2(\nabla,\boldsymbol{V})$. Проанализируем остальные слагаемые. Выражение с коэффициентом $g^{(6)}$ ввиду $V_jV_k\nabla_kV_j = 0$ преобразуется следующим образом:

$$V_j\nabla_kV_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j = \frac{1}{2}(\nabla_kV_k)(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 + V_j(\boldsymbol{V},\nabla)^2V_j = \\ = (\boldsymbol{V},\nabla)V_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_j - ((\boldsymbol{V},\nabla)V_j)^2 = -((\boldsymbol{V},\nabla)V_j)^2. \quad (3.3)$$

Далее, выражение с коэффициентом $g^{(4)}$ по той же причине принимает вид

$$V_j\nabla_kV_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k = (V_j\nabla_kV_j)\cdot(\boldsymbol{V},\nabla)V_k + \boldsymbol{V}^2\nabla_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_k = \boldsymbol{V}^2\nabla_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_k. \quad (3.4)$$

Точно так же выражение с коэффициентом $g^{(6)}$ преобразуется к форме

$$V_j\nabla_kV_jV_k(\nabla,\boldsymbol{V}) = (V_j\nabla_kV_j)\cdot(V_k(\nabla,\boldsymbol{V})) + \boldsymbol{V}^2\nabla_kV_k(\nabla,\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}^2((\nabla,\boldsymbol{V})^2 + (\boldsymbol{V},\nabla)(\nabla,\boldsymbol{V})). \quad (3.5)$$

Таким образом, уравнение (3.2) с учетом (3.3)—(3.5) принимает вид

$$\boldsymbol{V}^2(p^{(2)}(\nabla,\boldsymbol{V}) + g^{(4)}\nabla_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_k + g^{(6)}((\nabla,\boldsymbol{V})^2 + (\boldsymbol{V},\nabla)(\nabla,\boldsymbol{V}))) + \\ + f(\boldsymbol{V},\nabla)(\nabla,\boldsymbol{V}) + f^{(2)}(\boldsymbol{V},\Delta\boldsymbol{V}) - g^{(2)}((\boldsymbol{V},\nabla)V_i)^2 = 0. \quad (3.6)$$

Введем матрицу H с матричными элементами $(\mathsf{H})_{ij} = H_{ij} = \nabla_j V_i$. Тогда

$$\nabla_k(\boldsymbol{V}, \nabla)V_k = (\nabla_k V_l) \cdot (\nabla_l V_k) + (\boldsymbol{V}, \nabla)(\nabla, \boldsymbol{V}) = \operatorname{Sp} \mathsf{H}^2 + (\boldsymbol{V}, \nabla)(\nabla, \boldsymbol{V}). \tag{3.7}$$

Далее,

$$(\boldsymbol{V}, \Delta \boldsymbol{V}) = \nabla_j(\boldsymbol{V}, \nabla_j \boldsymbol{V}) - (\nabla_j \boldsymbol{V}, \nabla_j \boldsymbol{V}) = -\operatorname{Sp} \mathsf{H}\mathsf{H}^T, \tag{3.8}$$

так как первое слагаемое равно нулю. С учетом равенств (3.7), (3.8) уравнение (3.6) принимает вид

$$p^{(2)}\boldsymbol{V}^2(\nabla, \boldsymbol{V}) + (f + [g^{(4)} + g^{(6)}]\boldsymbol{V}^2)(\boldsymbol{V}, \nabla)(\nabla, \boldsymbol{V}) - \\ - f^{(2)} \operatorname{Sp} \mathsf{H}\mathsf{H}^T - g^{(2)}((\boldsymbol{V}, \nabla)V_i)^2 + g^{(4)}\boldsymbol{V}^2 \operatorname{Sp} \mathsf{H}^2 + g^{(6)}\boldsymbol{V}^2(\nabla, \boldsymbol{V})^2 = 0. \tag{3.9}$$

II. Произведем в уравнении (3.9) унимодальную подстановку

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{A}\cos(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}\sin(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}), \tag{3.10}$$

где $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{B}^2$, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 0$. В этом случае

$$H_{ij} = \nabla_j A_i = -A_i k_j \sin(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) + B_i k_j \cos(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}). \tag{3.11}$$

Тогда на основании (3.8)

$$\operatorname{Sp} \mathsf{H}\mathsf{H}^T = (\boldsymbol{V}, \Delta \boldsymbol{V}) = -\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{A}^2 \neq 0. \tag{3.12}$$

Положим $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$. Тогда $(\nabla, \boldsymbol{V}) = 0$, $(\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} = 0$. Кроме того, при таком условии $(\mathsf{H}^2)_{ij} = 0$. Тогда из (3.9) следует $f^{(2)} \operatorname{Sp} \mathsf{H}\mathsf{H}^T = 0$, а с учетом (3.12) получаем $f^{(2)} = 0$.

III. Произведем замену в уравнении (3.9) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t) \Rightarrow \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ с постоянным вектором $\boldsymbol{V}$ и дважды дифференцируемым полем $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, что допустимо на многообразии всех дважды дифференцируемых унимодальных полей. При этом поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ обязано обладать свойством $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}, t) = 0$ в любой точке с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$, а в остальном оно может быть выбрано произвольным образом. После этого линеаризуем полученное уравнение по полю $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$. В результате с учетом $f^{(2)} = 0$ получим

$$p^{(2)}\boldsymbol{V}^2(\nabla, \boldsymbol{v}) + (f + [g^{(4)} + g^{(6)}]\boldsymbol{V}^2)(\boldsymbol{V}, \nabla)(\nabla, \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.13}$$

Здесь $(\nabla, \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}, t)$ — произвольное скалярное поле на $\mathbb{R}^3$, а $(\boldsymbol{V}, \nabla)(\nabla, \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}, t)$ — его производная по направлению $\boldsymbol{V}$. Эти функции линейно независимы. Тогда из (3.13) следует, что $p^{(2)} = 0$ и $f + [g^{(4)} + g^{(6)}]\boldsymbol{V}^2 = 0$. Учитывая эти равенства вместе с $f^{(2)} = 0$, из (3.9) следует

$$g^{(6)}\boldsymbol{V}^2(\nabla, \boldsymbol{V})^2 + g^{(4)}\boldsymbol{V}^2 \operatorname{Sp} \mathsf{H}^2 - g^{(2)}((\boldsymbol{V}, \nabla)V_i)^2 = 0. \tag{3.14}$$

IV. Совершим в уравнении (3.14) унимодальную подстановку (3.10) с произвольно направленным вектором $\boldsymbol{k}$ и будем считать, что $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{A}) \neq 0$. Тогда на основании выражения (3.11) для матричных элементов H_{ij}

$$\operatorname{Sp} \mathsf{H}^2 = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{A})^2 \sin^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) \neq 0.$$

Кроме того, так как

$$(\nabla, \boldsymbol{V}) = -(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{A})\sin(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}), \quad [(\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V}]^2 = \boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{A})^2 \cos^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{A}^2,$$

то в результате такой подстановки находим

$$(g^{(4)} + g^{(6)})(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{A})^2 \sin^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) - g^{(2)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{A})^2 \cos^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) = 0.$$

Отсюда в силу неравенства $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{A}) \neq 0$ и линейной независимости функций $\sin^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})$ и $\cos^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})$ получаем, что $g^{(4)} + g^{(6)} = 0$, $g^{(2)} = 0$. Таким образом, из (3.14) следует

$$g^{(6)}[(\nabla, \boldsymbol{V})^2 - \operatorname{Sp} \mathsf{H}^2] = 0. \tag{3.15}$$

V. Заметим, что существуют унимодальные соленоидальные поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$, для которых $\operatorname{Sp}\mathsf{H}^2 \neq 0$. Для доказательства этого факта достаточно взять произвольную гармоническую функцию $\Phi(\boldsymbol{x},t)$ на $\mathbb{R}^3$ и положить $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) = (\nabla\Phi)(\boldsymbol{x},t)$. Тогда $(\nabla,\boldsymbol{V})(\boldsymbol{x},t) = 0$, так что матрица $(\mathsf{H})_{jk} = \nabla_j\nabla_k\Phi$ стала симметричной. Так как собственные числа матрицы H вещественны, то $\operatorname{Sp}\mathsf{H}^2 \neq 0$ (в противном случае $\mathsf{H} = 0$). Подставив построенное векторное поле $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ в уравнение (3.15), находим, что оно может иметь место только при $g^{(6)} = 0$.

Суммируя приведенные выше рассуждения, мы получаем доказательство требуемого утверждения.

Теорема 4. *Подкласс всех дифференциальных операторов* L *класса* $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}^3)$*, для которых решения* $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ *уравнения* (1.1) *обладают свойством унимодальности* $\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{x},t) = V^2 = \mathrm{const}$ *при* $t > 0$*, если* $\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{x},0) = V^2$ *состоит из одного оператора* $\mathsf{L} = 0$.

4. Описание класса $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$. В этом разделе будет доказан основной результат работы. Это утверждение дает описание класса $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ всех дифференциальных операторов L класса $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}^3)$, которые сохраняют свойство соленоидальности поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ или, в более общем случае, сохраняют величину его дивергенции $(\nabla,\boldsymbol{V})(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{const}$. Для того чтобы оператор L обладал указанным свойством, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял тождеству

$$\nabla_j(\mathsf{L}[\boldsymbol{V}])_j = 0 \tag{4.1}$$

на многообразии полей $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$, удовлетворяющих $(\nabla,\boldsymbol{V})(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{const}$.

Если $(\nabla,\boldsymbol{V})(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{const}$, то в формуле (2.4) для тензор-функции $(S[\boldsymbol{V}])_{j,k}(\boldsymbol{x},t)$, описывающей класс $\mathfrak{K}_2(\mathbb{R}^3)$ операторов $\mathsf{L}[\boldsymbol{V}] = \nabla_k S_{j,k}$, остается десять слагаемых, так что

$$\begin{aligned}\mathsf{L}[\boldsymbol{V}] = \nabla_j p^{(1)} + \nabla_k p^{(2)} V_j V_k + \nabla_k f^{(2)} \nabla_k V_j + \nabla_k f^{(3)} \nabla_j V_k + \\ + \frac{1}{2}\nabla_j g^{(1)}(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 + \nabla_k g^{(2)} V_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j + \frac{1}{2}\nabla_k g^{(3)} V_k \nabla_j \boldsymbol{V}^2 + \\ + \nabla_k g^{(4)} V_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k + \frac{1}{2}\nabla_k g^{(5)} V_j \nabla_k \boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\nabla_k h V_j V_k(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2,\end{aligned} \tag{4.2}$$

где коэффициенты $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $f^{(\alpha)}$, $\alpha = 2,3$; $g^{(\beta)}$, $\beta = 1,\ldots,5$, h должны быть непрерывно дифференцируемыми функциями от $\boldsymbol{V}^2 \in [0,\infty)$. Из (4.1) следует, что необходимо выбрать эти функции таким образом, чтобы имело место тождество $\nabla_i\nabla_j S_{ij} = 0$. В связи с этим в дальнейшем потребуем, чтобы все функции, представляющие коэффициенты в $S_{j,k}$, были дважды дифференцируемыми функциями от $\boldsymbol{V}^2$. Подставляя выражение (4.2) для оператора L в (4.1), представим это уравнение в явном виде

$$\begin{aligned}\Delta p^{(1)} + \nabla_j\nabla_k p^{(2)} V_j V_k + \nabla_j\nabla_k f^{(2)} \nabla_k V_j + \nabla_j\nabla_k f^{(3)} \nabla_j V_k + \\ + \frac{1}{2}\Delta g^{(1)}(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 + \nabla_j\nabla_k g^{(2)} V_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_k g^{(3)} V_k \nabla_j \boldsymbol{V}^2 + \\ + \nabla_j\nabla_k g^{(4)} V_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_k g^{(5)} V_j \nabla_k \boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_k h V_j V_k(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 = 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Как и в предыдущем разделе, анализ уравнения (4.3) разобьем на несколько этапов.

I. Заметим, что имеют место тождества

$$\nabla_i\nabla_j f_-(\nabla_i V_j - \nabla_j V_i) = 0, \quad \nabla_i\nabla_j g_-(V_i(\boldsymbol{V},\nabla)V_j - V_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_i) = 0, \nabla_i\nabla_j \bar{g}_-(V_i\nabla_j - V_j\nabla_i)\boldsymbol{V}^2 = 0,$$

с произвольными дважды дифференцируемыми функциями f_-, g_-, $\bar{g}_-$ от $\boldsymbol{V}^2$. Тогда, положив $f_- = (f^{(2)} - f^{(3)})/2$, $g_- = (g^{(2)} - g^{(4)})/2$, $\bar{g}_- = (g^{(3)} - g^{(5)})/2$ и, вводя дважды дифференцируемые функции $f_+ = (f^{(2)} + f^{(3)})/2$, $g_+ = (g^{(2)} + g^{(4)})/2$, $\bar{g}_+ = (g^{(3)} + g^{(4)})/2$ от $\boldsymbol{V}^2$, уравнение (4.3) преобразуется к виду

$$\Delta p^{(1)} + \nabla_j\nabla_k p^{(2)} V_j V_k + \nabla_j\nabla_k f_+(\nabla_k V_j + \nabla_j V_k) + \frac{1}{2}\Delta g^{(1)}(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 + \nabla_j\nabla_k g_+(V_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j + \\ + V_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k) + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_k\bar{g}_+(V_k\nabla_j + V_j\nabla_k)\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_k h V_j V_k(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 = 0. \quad (4.4)$$

II. Подставим в уравнение (4.4) поле $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$, которое $\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{x},t) = V^2 = \mathrm{const}$ с произвольным фиксированным значением V. Тогда исчезают слагаемые с коэффициентами $p^{(1)}$, $g^{(1)}$, $\bar{g}_+$, h, а функции $p^{(2)}$, f_+, g_+ превращаются в постоянные

$$p^{(2)}\nabla_j\nabla_k V_j V_k + g_+\nabla_j\nabla_k(V_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j + V_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k) = 0.$$

Здесь учтено, что слагаемое с коэффициентом f_+ обращается в нуль вследствие $(\nabla,\boldsymbol{V})(\boldsymbol{x},t) = 0$. Далее, так как первое слагаемое может быть записано в виде $\mathrm{Sp}\,\mathsf{H}^2$, $H_{jk} = \nabla_k V_j$, то

$$p^{(2)}\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{H}^2 + 2g_+\nabla_j\nabla_k V_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j = 0.$$

Линеаризуем это уравнение по приращению $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ около некоторой реализации поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$, произведя в уравнении замену $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) \Rightarrow \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$. В результате получим

$$2p^{(2)}(\nabla_i V_j)\cdot(\nabla_j v_i) + 2g_+\nabla_i\nabla_j(v_i(\boldsymbol{V},\nabla)V_j + V_i(\boldsymbol{v},\nabla)V_j + V_i(\boldsymbol{V},\nabla)v_j) = 0. \quad (4.5)$$

При этом вариация $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ поля должна удовлетворять условиям $(\nabla,\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x},t) = 0$ и $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x},t) = 0$, если суммарное поле $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ выбрать унимодальным.

III. Положим в уравнении (4.5) поле $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ равным $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) = \langle\cos kx_3, \sin kx_3, 0\rangle$ с произвольным $k \in \mathbb{R}$. Для того чтобы удовлетворить условиям, налагаемым на поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, положим $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \langle 0, 0, v(x_1,x_2)\rangle$. Так как $\nabla_j\boldsymbol{V} = \delta_{j3}k\langle -\sin kx_3, \cos kx_3, 0\rangle$ и $(\boldsymbol{V},\nabla)V_j = 0$, $\nabla_j\nabla_k V_j(\boldsymbol{V},\nabla)v_k = 0$, то уравнение (4.5) запишется в виде

$$p_2^{(2)}k(\cos kx_3\nabla_2 v - \sin kx_3\nabla_1 v) + g_+\nabla_j\nabla_k(V_j(\boldsymbol{v},\nabla)V_j) = 0. \quad (4.6)$$

Заметив далее, что

$$(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{V} = v\nabla_3\boldsymbol{V} = kv\langle -\sin kx_3, \cos kx_3, 0\rangle,$$

$$V_i(\boldsymbol{v},\nabla)V_j = kv\begin{pmatrix} -\sin kx_3\cos kx_3 & \cos^2 kx_3 \\ -\sin^2 kx_3 & \sin kx_3\cos kx_3 \end{pmatrix}_{ij},$$

$$\nabla_i\nabla_j V_i(\boldsymbol{v},\nabla)V_j = k\begin{pmatrix} -\sin kx_3\cos kx_3 & \cos^2 kx_3 \\ -\sin^2 kx_3 & \sin kx_3\cos kx_3 \end{pmatrix}_{ij}\nabla_i\nabla_j v = \\ = k(\sin 2kx_3(\nabla_2^2 - \nabla_1^2)/2 + \cos 2kx_3\nabla_1\nabla_2)v.$$

Подстановка полученных выражений в уравнение (4.6) дает

$$p^{(2)}(\cos kx_3\nabla_2 Q - \sin kx_3\nabla_1 Q) + g_+(\sin 2kx_3(\nabla_2^2 v - \nabla_1^2 v)/2 + \cos 2kx_3\nabla_1\nabla_2 v) = 0. \quad (4.7)$$

Ввиду произвольности функции $v(x_1,x_2)$ постоянные коэффициенты при гармониках по переменной x_3 первого порядка и второго порядка должны обратиться в нуль независимо, т.е. $g_+ = p^{(2)} = 0$.

Так как значение V^2 может быть выбрано произвольно, то из приведенных рассуждений следует, что функции $g_+(\boldsymbol{V}^2)$, $p^{(2)}(\boldsymbol{V}^2)$ в уравнении (4.4) равны тождественно нулю. В результате это уравнение превращается в следующее:

$$\Delta p^{(1)} + \nabla_j\nabla_k f_+(\nabla_k V_j + \nabla_j V_k) + \frac{1}{2}\Delta g^{(1)}(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 + \\ + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_k\bar{g}_+(V_k\nabla_j + V_j\nabla_k)\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_k h V_j V_k(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 = 0. \quad (4.8)$$

IV. Произведем замену в уравнении (4.8) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) \Rightarrow \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ с произвольным постоянным вектором $\boldsymbol{V}$, не предполагая унимодальности суммарного поля, и линеаризуем уравнение по полю $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$. При этом поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ должно удовлетворять условию $(\nabla,\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x},t) = 0$. В результате получаем следующее уравнение, которому должно подчиняться поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$,

$$p^{(1)\prime}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{v}) + g^{(1)}(\boldsymbol{V},\nabla)\Delta(\boldsymbol{V},\boldsymbol{v}) + 2\bar{g}_+(\boldsymbol{V},\nabla)\Delta(\boldsymbol{V},\boldsymbol{v}) + h(\boldsymbol{V},\nabla)^3(\boldsymbol{V},\boldsymbol{v}) = 0,$$

где значения функций $g^{(1)}$, $\bar{g}_+$ и h берутся в точке $\boldsymbol{V}^2$ и $p^{(1)}$ — значение производной функции $p^{(1)}$ в той же точке.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\boldsymbol{V} = \langle 0,0,V\rangle$. Тогда из уравнения (4.7) следует, что $p^{(1)\prime} = h = 0$ и $g^{(1)} = -2\bar{g}_+$. Подстановка этих выражений в (4.8) приводит к уравнению

$$\nabla_i\nabla_j[f_+\nabla_i V_j + \bar{g}_+ V_i\nabla_j\boldsymbol{V}^2] - \Delta\bar{g}_+(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 = 0. \tag{4.9}$$

V. С целью нахождения ограничений на выбор функций g_+ и $\bar{g}_+$, налагаемых уравнением (4.9), произведем указанные в нем дифференцирования. Так как $\nabla_j V_j = 0$, то для первого слагаемого имеем

$$\nabla_i\nabla_j[f_+\nabla_i V_j] = f''_+(\nabla_i\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_i V_j) + f'_+[(\nabla_i\nabla_j\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_i V_j) + (\Delta V_j)\cdot(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)]. \tag{4.10}$$

Аналогично получаем выражения для второго и третьего слагаемых:

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j[\bar{g}_+V_i\nabla_j\boldsymbol{V}^2] = \bar{g}_+(P_i\nabla_i\Delta\boldsymbol{V}^2 + (\nabla_j V_i)\cdot(\nabla_i\nabla_j\boldsymbol{V}^2)) + \bar{g}''_+V_i(\nabla_i\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)^2 +\\ + \bar{g}'_+[2V_i(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_i\nabla_j\boldsymbol{V}^2) + (\nabla_i\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_j V_i)\cdot(\nabla_j\boldsymbol{V}^2) + V_i(\nabla_i\boldsymbol{V}^2)\cdot(\Delta\boldsymbol{V}^2)];\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\Delta\bar{g}_+(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 = 2\bar{g}'_+(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_j V_i)\cdot(\nabla_i\boldsymbol{V}^2) + (\boldsymbol{V},\nabla)\nabla_j\boldsymbol{V}^2) +\\ + (\bar{g}''_+(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)^2 + \bar{g}'_+\Delta\boldsymbol{V}^2)\cdot(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 + \bar{g}_+((\Delta\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}^2 + 2(\nabla_j V_i)\cdot(\nabla_j\nabla_i\boldsymbol{V}^2) + (\boldsymbol{V},\nabla)\Delta\boldsymbol{V}^2)).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Подставим полученные выражения (4.10)—(4.12) в уравнение (4.9). Тогда в результате очевидных алгебраических преобразований получаем уравнение

$$(f''_+ - \bar{g}'_+)(\nabla_i\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_i V_j) + (f'_+ - \bar{g}_+)[(\nabla_i\nabla_j\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_i V_j) + (\Delta V_j)\cdot(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)] = 0. \tag{4.13}$$

Докажем, что для выполнимости равенства (4.13) необходимо и достаточно чтобы $f'_+ = \bar{g}_+$. В самом деле, положим $\boldsymbol{V} = \langle V_1(x_2), V_2(x_1), 0\rangle$ с произвольными дважды дифференцируемыми функциями $V_1(x_2)$ и $V_2(x_1)$. Тогда условие $(\nabla,\boldsymbol{V}) = 0$ удовлетворяется автоматически. Так как $\nabla_1\nabla_2\boldsymbol{V}^2 = 0$, то в терминах выбранного векторного поля уравнение (4.13) записывается в виде

$$2(f''_+ - \bar{g}'_+)(\nabla_1 V_2)\cdot(\nabla_2 V_1)\cdot(\nabla_1 V_2 + \nabla_2 V_1) + (f'_+ - \bar{g}_+)[V_2(\nabla_2^2 V_1)\cdot(\nabla_1 V_2) + V_1(\nabla_1^2 V_2)\cdot(\nabla_2 V_1)] = 0.$$

Так как значения вторых производных не зависят от значений первых производных, то коэффициент при втором слагаемом можно занулить, не обращая в тождественный нуль первое слагаемое, т.е. должно выполняться $f''_+ = \bar{g}'_+$. Тогда из (4.13) следует

$$(f'_+ - \bar{g}_+)[(\nabla_i\nabla_j\boldsymbol{V}^2)\cdot(\nabla_i V_j) + (\Delta V_j)\cdot(\nabla_j\boldsymbol{V}^2)] = 0.$$

Ввиду произвольности функций $V_1(x_2)$ и $V_2(x_1)$ их можно выбрать таким образом, что выражение в квадратных скобках не равно тождественно нулю. Тогда получаем требуемое равенство $f'_+ = \bar{g}_+$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Класс* $\mathfrak{K}_2^{(0)}(\mathbb{R}^3)$ *всех дифференциальных операторов* L *состоит из операторов, определяемых следующей формулой*:

$$\begin{aligned}\mathsf{L}[\boldsymbol{V}] = \nabla_k[f_+(\nabla_j V_k + \nabla_k V_j) + f_-(\nabla_j V_k - \nabla_k V_j) + g_-(V_j(\boldsymbol{V},\nabla)V_k - V_k(\boldsymbol{V},\nabla)V_j) +\\ + \bar{g}_-(V_j\nabla_k - V_k\nabla_j)\boldsymbol{V}^2 + f'_+(V_j\nabla_k + V_k\nabla_j - 2\delta_{jk}(\boldsymbol{V},\nabla))\boldsymbol{V}^2],\end{aligned}$$

где коэффициенты f_+, f_-, g_-, $\bar{g}_-$ *являются произвольными дважды непрерывно дифференцируемыми функциями от* $\boldsymbol{V}^2 \in [0,\infty)$.

5. Заключение. Исследование, проведенное в работе, вызвано проблемой описания на макроскопическом уровне динамики сложным образом устроенных конденсированных сред. Полученный в работе результат связан с проблемой описания динамики векторного поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$, которое представляет плотность электрического момента в твердотельных средах, называемых ферроэлектриками (сегнетоэлектриками). В настоящее время в физике твердого тела не имеется какой-либо общепринятой точки зрения на вид эволюционного уравнения (1.1) в этой области теоретической физики.

В работе изучена только лишь простейшая постановка задачи, связанная с этой проблемой, а именно, рассматривается класс уравнений, генераторами $\mathsf{L}[\boldsymbol{V}]$ эволюции у которых являются дифференциальные операторы второго порядка по пространственным переменным, имеющие дивергентный тип. Более того, мы ограничиваемся изучением т. н. сферически симметричного случая, когда коэффициенты уравнения конструируются на основе примитивной тензорной алгебры, множество образующих которой состоит из пары: символа Кронекера $\boldsymbol{\delta}$ и вектора $\boldsymbol{V}$. Трудности при конструировании подходящего уравнения проистекают вследствие того, что оно, согласно физическим соображениям, должно с большой точностью обеспечивать сохранение величин $\boldsymbol{V}^2$ и $(\nabla, \boldsymbol{V})$ (см. [7]).

Очевидное обобщение постановки задачи, которое представляет интерес для приложений в физике конденсированного состояния, состоит в отказе от сферической симметрии, т.е. в использовании при построении всех возможных тензорных коэффициентов, тензорной алгебры с более широким множеством образующих с целью характеризации асимметрии твердотельной среды. При этом возникает существенно более богатое множество тензорных коэффициентов, определяющих тензорную плотность $S_{j;k}$, $j = 1, 2, 3$, что приводит к более трудоемкому анализу всех представляющихся возможностей.

Другой путь обобщения связан с отказом от предположения о дивергентности оператора $\mathsf{L}[\boldsymbol{V}]$. В этом случае класс допустимых уравнений становится еще намного более широким.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блинц Р., Жекш Б.* Сегнетоэлектрики и анти-сегнетоэлектрики: Динамика решетки. — М.: Мир, 1975.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
3. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией// Физ. элем. частиц атом. ядра. — 1996. — *27*, № 2. — С. 431–492.
4. *Кац Е. И., Лебедев В. В.* Динамика жидких кристаллов. — М.: Наука, 1988.
5. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее приложения в физике. — М.: Физматлит, 1958.
6. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
7. *Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Мат. Физ. — 2018. — *50*, № 4. — С. 492–497.
8. *Delgado B. B., Porter R. M.* General solution of the inhomogeneous div-curl system and consequences// Adv. Appl. Clifford Algebras. — 2017. — *27*, № 4. — P. 3015—3037.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Субботин Андрей Валерьевич
Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова
E-mail: `subbotingmail.com`