ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 191 (2021). С. 16–28
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-191-16-28

УДК 517.952.1; 517.956.3

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ КОВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА $\mathbb{R}^3$

© 2021 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. В. СУББОТИН**

Аннотация. В работе представлено полное описание класса гиперболических квазилинейных уравнений первого порядка дивергентного типа, описывающих изменение при $t \in \mathbb{R}$ векторных полей $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, которые инвариантны относительно трансляций времени $t \in \mathbb{R}$ и пространства $\mathbb{R}^3$, а также преобразующихся ковариантным образом при преобразованиях группы $\mathbb{O}_3$ вращений $\mathbb{R}^3$. Проведено сравнение этого класса с классом аналогичных уравнений, гиперболических по Фридрихсу.

Ключевые слова: квазилинейная система уравнений, уравнение дивергентного типа, гиперболичность, трансляционная инвариантность, векторное поле, ковариантность, плотность потока поля.

HYPERBOLIC QUASILINEAR COVARIANT FIRST-ORDER EQUATIONS OF DIVERGENT TYPE FOR VECTOR FIELDS ON $\mathbb{R}^3$

© 2021 **YU. P. VIRCHENKO, A. V. SUBBOTIN**

Abstract. In this paper, we present a complete description of the class of first-order hyperbolic quasilinear equations of divergent type that describe the change in time $t \in \mathbb{R}$ of vector fields $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, which are invariant under translations in time $t \in \mathbb{R}$ and space $\mathbb{R}^3$ and transform covariantly under transformations from the group $\mathbb{O}_3$ of rotations of the space $\mathbb{R}^3$. This class is compared with the class of similar equations, which are hyperbolic in the sense of Friedrichs.

Keywords and phrases: quasilinear system, equation of divergent type, hyperbolicity, translational invariance, vector field, covariance, flux density.

AMS Subject Classification: 35L40, 35L60

1. Введение. В [2, 3, 11], с целью решения принципиальных задач неравновесной термодинамики конденсированных сред была поставлена задача об описании классов систем дифференциальных уравнений дивергентного типа, описывающих эволюцию фиксированного множества полей на евклидовом пространстве на основе таких уравнений, которые удовлетворяют определенным физически естественным условиям. А именно, такого рода уравнения, в отсутствие внешних воздействий, обязаны быть инвариантными относительно группы трансляций времени и группы трансляций пространства $\mathbb{R}^3$. Кроме того, они должны преобразовываться специальным образом при вращениях $\mathbb{R}^3$. В простейшем случае, который мы далее будем называть сферически симметричным, и который является объектом изучения в настоящей работе, они должны преобразовываться ковариантным образом при действии элементов группы $\mathbb{O}_3$, как ее тензорные представления (см., например, [8]). Однако в этих работах не ставился вопрос об обладании решениями конструируемых систем дифференциальных уравнений физически «разумных» свойств, необходимых для возможности их использования при моделировании эволюции тех физических систем, для которых они, собственно, предназначены. Настоящая работа посвящена нахождению таких условий для элементов класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, состоящего из квазилинейных уравнений первого порядка дивергентного типа, которые описывают векторное поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$, при изменении $t\in\mathbb{R}$, и таких, которые удовлетворяют указанным выше условиям, а именно, коэффициенты этих уравнений не зависят явно ни от t, ни от $\boldsymbol{x}$, а сами уравнения преобразуются при вращениях $\mathbb{R}^3$ как векторы в $\mathbb{R}^3$.

Эволюционные уравнения первого порядка, которые используются при описании сплошных сред, как правило, не описывают влияния на их динамику свойственных им физических диссипативных механизмов. В связи с этим физически разумными представляются системы уравнений первого порядка уравнений гиперболического типа (см., например, [5, 10]). С физической тоски зрения требование гиперболичности системы уравнений первого порядка означает, что все решения $\omega_j(\boldsymbol{k})$, $j=1,2,3$, соответствующего ей «дисперсионного» уравнения для зависимости частоты изменения во времени поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ от волнового вектора $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3$ являются вещественными. В настоящей работе мы установим необходимые и достаточные условия гиперболичности для систем уравнений первого порядка указанного выше типа.

2. Ковариантные векторные уравнения.

Рассмотрим эволюционное уравнение дивергентного типа для векторного поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}$, которое имеет вид

$$\dot v_j(\boldsymbol{x},t)=(\nabla_k S_{jk}[\boldsymbol{v}])(\boldsymbol{x},t),\quad j=1,2,3 \tag{1}$$

($\nabla_j\equiv\partial/\partial x_j$, $j=1,2,3$), где $S_{jk}[\boldsymbol{v}]$ — функция от значений этого поля в текущей пространственно временной точке $\langle\boldsymbol{x},t\rangle$. В формуле (1) и далее используется правило тензорной алгебры, согласно которому наличие повторяющихся векторных индексов (в данном случае, нижних индексов k) подразумевает суммирование по всем их допустимым значениям 1, 2, 3. Таким образом, уравнение (1) является уравнением первого порядка и представляет собой систему трех квазилинейных уравнений.

Сформулируем требование ковариантности уравнения (1) относительно его преобразований посредством ортогональных матриц U, составляющих группу $\mathbb{O}_3$. При поворотах пространства $\mathbb{R}^3$, описываемых посредством этих матриц, каждый радиус-вектор $\boldsymbol{x}$ переходит в вектор $\boldsymbol{x}'=\mathsf{U}\boldsymbol{x}$. При этом значение матриц-функции $(S_{jk}[\boldsymbol{v}])(\boldsymbol{x},t)$, $j,k=1,2,3$, переходит в $(S_{jk}[\boldsymbol{v}'])(\boldsymbol{x}',t)=(S_{jk}[\mathsf{U}\boldsymbol{v}])(\mathsf{U}\boldsymbol{x},t)$ с реализациями векторного поля $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}',t)=\mathsf{U}\boldsymbol{v}(\mathsf{U}\boldsymbol{x},t)$. Тогда после поворота пространства уравнение (1) преобразуется в следующее

$$\dot v_j'(\boldsymbol{x},t)=(\nabla_k' S_{jk}[\boldsymbol{v}'])(\boldsymbol{x}',t),\quad j=1,2,3, \tag{2}$$

где $\nabla_k'(\cdot)=(\nabla_k' x_l)\cdot\nabla_l(\cdot)=U_{kl}\nabla_l(\cdot)$, так как для ортогональных матриц $(\mathsf{U}^{-1})_{lk}=U_{kl}\equiv(\mathsf{U})_{kl}$. После подстановки явных выражений для $\nabla_k' x_l=U_{kl}$ и функции $S_{jk}[\boldsymbol{v}']$ уравнение (2) превращается в уравнение

$$\dot v_m(\boldsymbol{x},t)=\nabla_l(U_{jm}U_{kl}S_{jk}[\mathsf{U}\boldsymbol{v}])(\boldsymbol{x},t),\quad j=1,2,3.$$

Требование ковариантности состоит в том, что уравнение (2) должно быть идентично уравнению (1), т.е. множества их решений должны совпадать. Это требование приводит к следующему условию на выбор функции $S_{jk}[\boldsymbol{v}]$:

$$U_{jm}U_{kl}S_{ml}[\boldsymbol{v}]=S_{jk}[\mathsf{U}\boldsymbol{v}]. \tag{3}$$

Обозначим посредством $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ класс уравнений (1) с матриц-функциями $S_{jk}[\boldsymbol{v}]$, которые обладают свойством (3), называемый нами классом сферически симметричных уравнений. Следующее утверждение дает описание класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $S_{jk}[\boldsymbol{v}]$ удовлетворяла уравнению (3), необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$S_{jk}[\boldsymbol{v}]=f(\boldsymbol{v}^2)\delta_{jk}+g(\boldsymbol{v}^2)v_jv_k, \tag{4}$$

где f, g — функции на $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Формула (4) при $\mathsf{U} = \mathbf{1}$ превращается в тождество. Тогда при произвольном преобразовании U группы, согласно (4), матрица $S_{jk}[\boldsymbol{v}]$ переходит в $U_{jm}U_{kl}S_{ml}[\boldsymbol{v}]$. Следовательно, $S_{jk}[\boldsymbol{v}]$ преобразуется как тензор (ковариантный) второго ранга. Представим этот тензор в виде разложения по какому-либо базису $w_{jk}^{(a)}[\boldsymbol{v}]$, $a = 1, \dots, 9$, тензорного представления группы $\mathbb{O}_3$ (см., например, [8]),

$$S_{jk}[\boldsymbol{v}] = \sum_{a=1}^{9} h^{(a)}(\boldsymbol{v}^2) w_{jk}^{(a)}[\boldsymbol{v}]$$

с коэффициентами $h^{(a)}$, которые являются функциями $h^{(a)} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ от единственного инварианта $\boldsymbol{v}^2$ вектора $\boldsymbol{v}$, а элементы базиса $w_{jk}^{(a)}[\boldsymbol{v}]$, $a = 1, \dots, 9$, являются, вообще говоря, функциями от $\boldsymbol{v}$. Эти базисные элементы, ввиду произвольности функций $h^{(a)}$, $a = 1, \dots, 9$, и соотношения (4), могут быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения $w_{jk}^{(a)}[\mathsf{U}\boldsymbol{v}] = U_{jm}U_{kl}w_{ml}^{(a)}[\boldsymbol{v}]$. Если элемент базиса не зависит от вектора $\boldsymbol{v}$, то он является инвариантным тензором второго ранга. Существует единственный такой тензор — символ Кронекера δ_{jk}. Если элемент базиса зависит от $\boldsymbol{v}$, то он может быть выбран в виде тензорного произведения вектора $\boldsymbol{v}$ и какого-либо другого вектора. Существует единственное тензорное произведение $w_{jk}^{(a)} = v_j v_k$, которое удовлетворяет соотношению $w_{jk}^{(a)}[\mathsf{U}\boldsymbol{v}] = U_{jm}U_{kl}w_{ml}^{(a)}[\boldsymbol{v}]$. □

Следствие. *Класс всех квазилинейных систем класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ описывается формулой*

$$\dot{v}_j(\boldsymbol{x}, t) = (\nabla_k [f(\boldsymbol{v}^2)\delta_{jk} + g(\boldsymbol{v}^2) v_j v_k])(\boldsymbol{x}, t), \quad j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где f и g — дифференцируемые функции на $\mathbb{R}_+$.

3. Понятие гиперболичности. Каждой системе (1) квазилинейных уравнений первого порядка, для каждого значения поля $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ сопоставим линеаризованную (касательную) систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для вариации $\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ векторного поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$,

$$\delta\dot{v}_j(\boldsymbol{x}, t) = A_{jl}^{(k)}[\boldsymbol{v}] \nabla_k \delta v_l, \tag{6}$$

где набор матриц $\mathsf{A}^{(k)}$, $A_{jl}^{(k)} = (\mathsf{A}^{(k)})_{jl}$, $k = 1, 2, 3$, составляет тензор третьего ранга

$$A_{jl}^{(k)}[\boldsymbol{v}] = \frac{\partial S_{jk}[\boldsymbol{v}]}{\partial v_l} = \frac{\partial}{\partial v_l}[f(\boldsymbol{v}^2)\delta_{jk} + g(\boldsymbol{v}^2) v_j v_k] = 2[f'(\boldsymbol{v}^2)\delta_{jk} + g'(\boldsymbol{v}^2) v_j v_k] v_l + g(\boldsymbol{v}^2)(\delta_{jl} v_k + \delta_{kl} v_j).$$

Сопоставим уравнению (6) однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left(\omega(\boldsymbol{k})\delta_{jl} + \sum_{m=1}^{3} k_m A_{jl}^{(m)}\right) v_l^{(0)} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

относительно компонент вектора $\boldsymbol{v}^{(0)}$, которая получается посредством подстановки $\delta v_j = v_j^{(0)} \exp(i\omega(\boldsymbol{k})t - i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}))$, $j = 1, 2, 3$ с постоянным вектором $\boldsymbol{v}^{(0)} = \langle v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)} \rangle$ в уравнение (6). Здесь ω — постоянная «частота» изменения поля, $\boldsymbol{k}$ — постоянный «волновой вектор». Условием существования ненулевого вектора $\boldsymbol{v}^{(0)}$ является равенство нулю детерминанта

$$\det\left(\omega(\boldsymbol{k})\delta_{jl} + \sum_{m=1}^{3} k_m A_{jl}^{(m)}\right) = 0. \tag{7}$$

Это уравнение будем называть *спектральным* (в теоретической физике оно называется *дисперсионным уравнением*). Результатом решения этого алгебраического уравнения третьей степени являются функции $\omega_j(\boldsymbol{k})$, $j = 1, 2, 3$ (т. н. *дисперсионные зависимости*).

Определение 1 (см. [5])**.** Система (1) называется гиперболической (по Петровскому), если функции $\omega_j(\boldsymbol{k})$, $j = 1, 2, 3$, принимают вещественные значения, и значения каждой пары этих функций не совпадают ни в одной точке $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$.

4. Критерий вещественности корней. В этом разделе мы приведем известный критерий вещественности корней кубического уравнения. Рассмотрим уравнение

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0. \tag{8}$$

относительно $z \in \mathbb{C}$ с вещественными коэффициентами a_1, a_2, a_3. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (см. [9]). *Для того чтобы все корни уравнения* (8) *были вещественны и различны, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант* Δ *был положителен, т.е. для коэффициентов* a_1, a_2, a_3 *выполнялось неравенство*

$$\Delta(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 a_2^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - 27a_3^2 + 18a_1 a_2 a_3 > 0. \tag{9}$$

Доказательство. Замена $z = y - a_1/3$ приводит уравнение (9) к виду $y^3 + py + q = 0$ с коэффициентами

$$p = a_2 - \frac{a_1^3}{3}, \quad q = 2\left(\frac{a_1}{3}\right)^3 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3.$$

Решениями этого уравнения являются (см., например, [13])

$$y_1 = \alpha + \beta, \quad y_{2,3} = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta),$$

где

$$\alpha = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}\right)^{1/3}, \quad \beta = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}\right)^{1/3}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

При этом все решения различны и вещественны, если $Q < 0$. Так как дискриминант Δ связан с Q соотношением $\Delta = -108Q$, то критерием вещественности и различности корней является $\Delta > 0$. Подставляя в выражение для Q явный вид коэффициентов p и q, получим неравенство (9). $\square$

5. Вычисление дискриминанта. В этом разделе мы вычислим дискриминант $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ спектрального уравнения (7), определяемого левой частью неравенства (9). Уравнение (7) представим в виде (8),

$$\omega^3 + a_1 \omega^2 + a_2 \omega + a_3 = 0, \tag{10}$$

где $\omega \equiv \omega(\boldsymbol{k})$ и (см., например, [4])

$$a_1 = \operatorname{Sp} \mathsf{A}, \quad a_2 = \frac{1}{2}[\operatorname{Sp}^2 \mathsf{A} - \operatorname{Sp} \mathsf{A}^2], \quad a_3 = \frac{1}{6}[2 \operatorname{Sp} \mathsf{A}^3 - 3 \operatorname{Sp} \mathsf{A} \cdot \operatorname{Sp} \mathsf{A}^2 + \operatorname{Sp}^3 \mathsf{A}] \tag{11}$$

с матрицей $\mathsf{A} = \mathsf{A}^{(l)} k_l$. Воспользовавшись явным видом (6), представим матрицу A в виде суммы $\mathsf{A} = 2\mathsf{B} + g\mathsf{C}$ матриц с матричными элементами

$$B_{jm} = b_j v_m, \quad C_{jm} = \zeta \delta_{jm} + v_j k_m, \quad b_j = f' k_j + \zeta g' v_j, \quad \zeta = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}).$$

Вычислим следы степеней матрицы C: $c_1 = \operatorname{Sp} \mathsf{C} = 4\zeta$,

$$(\mathsf{C}^2)_{jl} = \zeta(\zeta \delta_{jl} + 3 v_j k_l), \quad \operatorname{Sp} \mathsf{C}^2 = 6\zeta^2, \tag{12}$$

$$(\mathsf{C}^3)_{jl} = \zeta(\zeta \delta_{jm} + 3 v_j k_m)(\zeta \delta_{lm} + v_m k_l) = \zeta^2(\zeta \delta_{jl} + 7 v_j k_l), \quad \operatorname{Sp} \mathsf{C}^3 = 10\zeta^3. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что

$$c_2 \equiv [\operatorname{Sp}^2 \mathsf{C} - \operatorname{Sp} \mathsf{C}^2]/2 = 5\zeta^2, \quad c_3 \equiv [2 \operatorname{Sp} \mathsf{C}^3 - 3 \operatorname{Sp} \mathsf{C} \cdot \operatorname{Sp} \mathsf{C}^2 + \operatorname{Sp}^3 \mathsf{C}]/6 = 2\zeta^3. \tag{14}$$

Кроме того, так как

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}) = \zeta(f' + \boldsymbol{v}^2 g'), \quad (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}) = f' \boldsymbol{k}^2 + g' \zeta^2, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, то

$$(\mathsf{C}\boldsymbol{b})_j = C_{jl} b_l = \zeta b_j + v_j (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}), \quad (\boldsymbol{v}, \mathsf{C}\boldsymbol{b}) = \zeta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{v}^2 (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}), \tag{16}$$

$$(\mathsf{C}^2 \boldsymbol{b})_j = (\mathsf{C}^2)_{jl} b_l = \zeta(\zeta b_j + 3 v_j (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b})), \quad (\boldsymbol{v}, \mathsf{C}^2 \boldsymbol{b}) = \zeta(\zeta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}) + 3\boldsymbol{v}^2 (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b})). \tag{17}$$

Теперь мы в состоянии вычислить коэффициенты a_1, a_2, a_3 спектрального уравнения (10) по формулам (11). Учитывая разложение матрицы A, находим

$$a_1 = \operatorname{Sp}\mathsf{A} = 2\operatorname{Sp}\mathsf{B} + c_1 g = 2d_0 + c_1 g, \quad d_0 \equiv (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}). \tag{18}$$

Далее, поскольку

$$\mathsf{A}^2 = (2\mathsf{B} + g\mathsf{C})^2 = 4\mathsf{B}^2 + 2g(\mathsf{BC} + \mathsf{CB}) + g^2\mathsf{C}^2, \quad \mathsf{B}^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})\mathsf{B}, \quad \operatorname{Sp}\mathsf{B}^2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})^2,$$

то

$$(\mathsf{A}^2)_{jl} = 4(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})\mathsf{B}_{jl} + 2g(b_j(\mathsf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})_l + (\mathsf{C}\boldsymbol{b})_j v_l) + g^2(\mathsf{C}^2)_{jl}, \tag{19}$$

$$\operatorname{Sp}\mathsf{A}^2 = 4d_0^2 + 4gd_1 + g^2\operatorname{Sp}\mathsf{C}^2, \quad d_1 \equiv (\boldsymbol{v}, \mathsf{C}\boldsymbol{b}). \tag{20}$$

Следовательно, согласно (11),

$$a_2 = \frac{1}{2}[(2d_0 + c_1 g)^2 - g^2\operatorname{Sp}\mathsf{C}^2] - 2(d_0^2 + gd_1) = g^2 c_2 + 2g(d_0 c_1 - d_1). \tag{21}$$

Наконец, вычислим коэффициент a_3. Так как

$$\mathsf{A}^3 = 8\mathsf{B}^3 + 4g(\mathsf{B}^2\mathsf{C} + \mathsf{BCB} + \mathsf{CB}^2) + 2g^2(\mathsf{BC}^2 + \mathsf{CBC} + \mathsf{C}^2\mathsf{B}) + g^3\mathsf{C}^3,$$

то

$$(\mathsf{A}^3)_{jl} = 8(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})^2 b_j v_l + 4g\Big[(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})b_j(\mathsf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_l) + (\boldsymbol{v}, \mathsf{C}\boldsymbol{b})b_j v_l + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})(\mathsf{C}\boldsymbol{b})_j v_l\Big] + \\ + 2g^2\Big[b_j(\mathsf{C}^{2\mathrm{T}}\boldsymbol{v})_l + (\mathsf{C}\boldsymbol{b})_j(\mathsf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})_l + (\mathsf{C}^2\boldsymbol{b})_j \boldsymbol{v}_l\Big] + g^3(\mathsf{C}^3)_{jl},$$

$$\operatorname{Sp}\mathsf{A}^3 = 8d_0^3 + 12gd_0 d_1 + 6g^2 d_2 + g^3\operatorname{Sp}\mathsf{C}^3, \quad d_2 = (\boldsymbol{v}, \mathsf{C}^2\boldsymbol{b}). \tag{22}$$

Тогда, используя формулы (16), (19), (21), получаем выражение для коэффициента a_3 на основе его определения (11),

$$a_3 = \operatorname{Sp}\mathsf{A}^3 + \operatorname{Sp}\mathsf{A}[a_2 - \operatorname{Sp}\mathsf{A}^2] = \frac{1}{3}\Big[8d_0^3 + 12gd_0 d_1 + 6g^2 d_2 + g^3\operatorname{Sp}\mathsf{C}^3\Big] + \\ + \frac{1}{3}(2d_0 + c_1 g)\Big[g^2(c_2 - \operatorname{Sp}\mathsf{C}^2) + 2gd_0 c_1 - 4d_0^2 - 6gd_1\Big] = g^3 c_3 + 2g^2(d_2 + d_0 c_2 - d_1 c_1), \tag{23}$$

где мы воспользовались тождеством $\operatorname{Sp}\mathsf{C}^3 + c_1(c_2 - \operatorname{Sp}\mathsf{C}^2) = 3c_3$.

Выразим коэффициенты a_1, a_2, a_3 в терминах функций f и g. Следуя формуле (18), находим $d_0 = \zeta(f' + \boldsymbol{v}^2 g')$. Далее, на основе (20) и (15), (16), получаем

$$d_1 = \zeta^2(f' + 2\boldsymbol{v}^2 g') + \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{v}^2 f';$$

точно так же, используя формулы (22) и (17), (15), имеем

$$d_2 = \zeta\Big[\zeta^2(f' + 4\boldsymbol{v}^2 g') + 3\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{k}^2 f'\Big].$$

Тогда

$$d_2 + d_0 c_2 - d_1 c_1 = \zeta\Big[2\zeta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b})\Big] = \zeta\Big[\zeta^2(2f' + \boldsymbol{v}^2 g') - \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{v}^2 f'\Big]$$

и, следовательно, на основании (23),

$$a_3 = 2\zeta g^2\Big[\zeta^2(2f' + \boldsymbol{v}^2 g' + g) - \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{v}^2 f'\Big] \equiv |\boldsymbol{k}|^3|\boldsymbol{v}|^3(\eta^3 e_3 - \eta r_3), \tag{24}$$

где выделена явно зависимость от угла между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}$, $\eta = \cos(\widehat{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}})$ с коэффициентами $e_3 = 2g^2(2f' + \boldsymbol{v}^2 g' + g)$, $r_3 = 2g^2 f'$. Далее, согласно формулам (14) и (21), а также найденным выше выражениям для d_0 и d_1, находим аналогичные представления для коэффициентов a_2 и a_1

$$a_2 = g\big[\zeta^2(5g + 6f' + 4\boldsymbol{v}^2 g') - 2\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{v}^2 f'\big] \equiv \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{v}^2\big(\eta^2 e_2 - r_2\big), \tag{25}$$

$$e_2 = g(5g + 6f' + 4\boldsymbol{v}^2 g'), \quad r_2 = 2gf'; \tag{26}$$

$$a_1 = 2\zeta(f' + \boldsymbol{v}^2 g' + 2g) = |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{v}|\eta e_1, \quad e_1 = 2(2g + f' + \boldsymbol{v}^2 g'). \tag{27}$$

После подстановки полученных выражений (25)–(27) для коэффициентов a_1, a_2, a_3 в (9) приходим к выводу, что справедлива

Теорема 3. *Дискриминант* $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ *уравнения* (8) *равен*

$$\Delta(a_1, a_2, a_3) = \boldsymbol{k}^6 \boldsymbol{v}^6 \Delta(\eta e_1, \eta^2 e_2 - r_2, \eta^3 e_3 - \eta r_3), \tag{28}$$

где функции e_1, e_2, r_2, e_3, r_3 *даются формулами* (24), (26), (27). *Он представляет собой бикубический полином по переменной* $\eta = \cos(\widehat{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}})$.

6. Вещественность спектра. Принимая во внимание формулу (28), необходимым и достаточным условием гиперболичности уравнения (5), т.е. вещественности решений $\omega_j(\boldsymbol{k})$, $j = 1, 2, 3$, спектрального уравнения (10) и отсутствия их вырождения, является выполнимость неравенства $\Delta(\eta e_1, \eta^2 e_2 - r_2, \eta^3 e_3 - \eta r_3) > 0$. Проведем анализ возможности выполнения этого неравенства для бикубического по η полинома.

Рассмотрим при $u \in \mathbb{R}$ кубический полином $P(u) = \alpha_0 u^3 + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u + \alpha_3$ и исследуем, какие возникают ограничения на коэффициенты α_0, α_1, α_2, α_3 этого полинома в том случае, когда для него выполняется неравенство $P(u) > 0$ на интервале $[0, 1]$. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы $P(0) > 0$ и $P(1) > 0$. Эти же условия являются и достаточными в том случае, если на $(0, 1)$ не имеется такой точки u_*, что $P'(u_*) = 0$, $P''(u_*) > 0$, где $P'(u) = 3\alpha_0 u^2 + 2\alpha_1 u + \alpha_2$, $P''(u) = 6\alpha_0 + 2\alpha_1$. Если существует такая точка, то необходимо, чтобы $P(u_*) > 0$ и это условие, в сочетании с неравенствами $P(0) > 0$, $P(1) > 0$, составляет полный набор необходимых и достаточных условий. Изучим представляющиеся при этом возможности.

Будем различать следующие случаи:

I. $\alpha_0 = 0$;
II. $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1^2 \leqslant 3\alpha_0\alpha_2$;
III. $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1^2 > 3\alpha_0\alpha_2$.

В первом случае $P(u) = 2\alpha_1$, $u_* = -\alpha_2/2\alpha_1$. Тогда, если $\alpha_1 = 0$, то точка u_* заведомо не существует. Если $\alpha_1 \neq 0$ и существует точка $u_* \in (0, 1)$, то $-\alpha_2/2\alpha_1 \in (0, 1)$. При этом ввиду условия $P(u_*) > 0$ получаем, что $\alpha_1 > 0$. Следовательно, в этом случае $\alpha_2 < 0$ и $\alpha_2 + 2\alpha_1 > 0$. Если точка u_* не принадлежит $(0, 1)$, то либо $\alpha_1 < 0$ и имеет место по крайней мере одно из неравенств $\alpha_2 \leqslant 0$, $\alpha_2 + 2\alpha_1 \leqslant 0$, либо $\alpha_1 > 0$ и выполняется одно из неравенств $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_2 + 2\alpha_1 \geqslant 0$. Наконец, если точка u_* находится на интервале $(0, 1)$, то $\alpha_1 > 0$ и одновременно имеют место $\alpha_2 < 0$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 > 0$.

В случае II точка u_* заведомо отсутствует (в случае $\alpha_1^2 \leqslant 3\alpha_0\alpha_2$, $u_* = -\alpha_1/3\alpha_0$ и $P''(u_*) = 0$, т.е. u_* не является точкой минимума).

В случае III существование точки u_* возможно, и она может принимать одно из двух значений

$$u_\pm = \frac{1}{3\alpha_0}(-\alpha_1 \pm R), \quad R = \sqrt{\alpha_1^2 - 3\alpha_2\alpha_0}.$$

Если $u_* \in (0, 1)$, то условию $P(u_*) > 0$ нужно удовлетворить только при $u_* = u_+$, так как $P''(u_\pm) = \pm 2R$, и для точки u_- неравенство $P''(u_*) > 0$ невозможно. Таким образом, нужно изучить только возможность принадлежности $u_+ \in (0, 1)$, так как если $u_+ \notin (0, 1)$, то условия $P(0) > 0$ и $P(1) > 0$ являются достаточными для выполнимости неравенства $P(u) > 0$ при $u \in [0, 1]$. Рассмотрим два случая $\mathrm{III}_\pm$, в зависимости от выбора знака у коэффициента α_0.

В случае III_+ при $\alpha_0 > 0$, для того чтобы $u_+ \in (0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_1 < R < \alpha_1 + 3\alpha_0$. Тогда для выполнения левого неравенства необходимо и достаточно, чтобы выполнялись либо $\alpha_1 \leqslant 0$, либо $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Правое же неравенство выполняется в том и только в том случае, если $3\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $\alpha_2 + 2\alpha_1 + 3\alpha_0 > 0$.

В случае III_- неравенство $0 < u_+ < 1$ удовлетворяется в двух случаях: либо при $R < \alpha_1$, либо при $3\alpha_0 + \alpha_1 < R$. Первое неравенство дает $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 < 0$. Выполнимость второго неравенства возможна только либо при $3\alpha_0 + \alpha_1 \leqslant 0$, либо при $3\alpha_0 + \alpha_1 > 0$ и $3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 > 0$.

Исследуем возможность реализации неравенства $P(u_+) > 0$ при $u_+ \in (0, 1)$ в случае III. Так как имеет место равенство

$$3P(u) = (3u + \alpha_1)P'(u) + 2u(3\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + 9\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2,$$

то на основании условий $P(u_+) > 0$, $P'(u_+) = 0$ находим

$$2u_+R^2 < 9\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2.$$

Для того чтобы имело место $P(u_+) > 0$ при $u_+ \in (0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы $2u_+R < 9\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2$, и поэтому $9\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 > 0$. Отсюда следует, что при выполнении последнего неравенства необходимо и достаточно, чтобы в случае III_+ имело место неравенство $2R^3 < S$, где $S \equiv 3\alpha_0(9\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + 2\alpha_1R^2 = 27\alpha_0\alpha_3 - 9\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$, а в случае III_- имело место обратное неравенство $2R^3 > S$. Проанализируем эти возможности.

В случае III_+ обязательно должно выполняться $S > 0$. Тогда запишем неравенство $2R^3 < S$ в эквивалентной форме $4R^6 < S^2$, которая не содержит радикалов. Последнее неравенство преобразуется с учетом $\alpha_0 > 0$ к виду

$$4\alpha_0^2\alpha_2^3 + \alpha_0(27\alpha_3^2 - 18\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2\alpha_2^2) + 4\alpha_1^3\alpha_3 > 0. \tag{29}$$

В случае III_- неравенство $2R^3 > S$ всегда выполняется при $S < 0$, а при $S > 0$ оно эквивалентно неравенству $4R^6 > S^2$, не содержащему радикалов. Последнее после деления на $\alpha_0 < 0$ превращается снова в неравенство (29). Результаты проведенного анализа сформулируем в виде отдельного утверждения.

Лемма 1. *Для того чтобы значения кубического полинома $P(u) = \alpha_0u^3 + \alpha_1u^2 + \alpha_2u + \alpha_3$ были строго положительны на отрезке $[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы:*

$$P(0) = \alpha_3 > 0, \quad P(1) = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0,$$

а также выполнялись условия, перечисленные по крайней мере в одном из пп. I–III.

I. *Если $\alpha_0 = 0$, то*

либо $\alpha_1 = 0$;
либо $\alpha_1 < 0$ и ($\alpha_2 \leqslant 0$ или $\alpha_2 + 2\alpha_1 \leqslant 0$);
либо $\alpha_1 > 0$ и ($\alpha_2 \geqslant 0$ или $\alpha_2 + 2\alpha_1 \geqslant 0$);
либо одновременно $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_2 + 2\alpha_1 > 0$.

II. $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1^2 \leqslant 3\alpha_0\alpha_2$.

III. *Если $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1^2 > \alpha_0\alpha_2$, то в случае* III_+, *когда $\alpha_0 > 0$, должна реализоваться одна из следующих возможностей:*

(i) *$\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 \leqslant 0$ или нарушается по крайней мере одно из неравенств*

$$3\alpha_0 + \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 + 2\alpha_1 + 3\alpha_0 > 0.$$

(ii) *$\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, а также одновременно выполняются неравенства*

$$3\alpha_0 + \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 + 2\alpha_1 + 3\alpha_0 > 0, \quad 9\alpha_3 > \alpha_1\alpha_2, \quad 27\alpha_0\alpha_3 - 9\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 > 0$$

и неравенство (29).

В случае же III_-, *когда $\alpha_0 < 0$, должна реализоваться одна из следующих возможностей:*

(i) *Выполняется по крайней мере одно из неравенств $\alpha_1 \leqslant 0$; $\alpha_2 \geqslant 0$;*

$$3\alpha_0 + \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 + 2\alpha_1 + 3\alpha_0 \leqslant 0.$$

(ii) *Одновременно выполняются условия $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, а также реализуется либо $3\alpha_0 + \alpha_1 \leqslant 0$, либо*

$$3\alpha_0 + \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 + 2\alpha_1 + 3\alpha_0 > 0.$$

Кроме того, вместе с неравенством (29) *должны выполняться неравенства*

$$9\alpha_3 > \alpha_1\alpha_2, \quad 27\alpha_0\alpha_3 - 9\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 < 0.$$

Применим теперь результаты анализа неравенства $P(u) > 0$ на $[0,1]$ к описанию области выполнимости неравенства

$$\Delta(\eta e_1, \eta^2 e_2 - r_2, \eta^3 e_3 - \eta r_3) > 0.$$

С этой целью разложим $\Delta(\eta e_1, \eta^2 e_2 - r_2, \eta^3 e_3 - \eta r_3)$ по степеням η. Заметим, что дискриминант (9) обладает тем свойством, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\Delta(\lambda a_1, \lambda^2 a_2, \lambda^3 a_3) = \lambda^6 \Delta(a_1, a_2, a_3).$$

Тогда справедливо тождество

$$\Delta(\eta e_1, \eta^2 e_2 - r_2, \eta^3 e_3 - \eta r_3) = \eta^6 \Delta(e_1, e_2 - \eta^{-2} r_2, e_3 - \eta^{-2} r_3).$$

Искомое разложение получается разложением в ряд Тейлора функции $\Delta(e_1, e_2 - \eta^{-2} r_2, e_3 - \eta^{-2} r_3)$ по степеням η^{-2}, которое содержит четыре слагаемых. Тогда

$$\Delta\Big(\eta e_1, \eta^2 e_2 - r_2, \eta^3 e_3 - \eta r_3\Big) = \eta^6 \Big(\Delta(e_1, e_2, e_3) + \eta^{-2} \Delta_1 + \eta^{-4} \Delta_2 + \eta^{-6} \Delta_3\Big),$$

где, используя явный вид $\Delta(a_1, a_2.a_3)$ и явные выражения для функций r_2 и r_3, находим, что

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -r_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a_2}\right)_{a_2 = e_2} - r_3 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a_3}\right)_{a_3 = e_3} = \\
&= 4 g f' [6 e_2^2 - 9 e_1 e_3 - e_1^2 e_2 + g (2 e_1^3 + 27 e_3 - 9 e_1 e_2)], \\
\Delta_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_2^2} r_2^2 + 2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_2 \partial a_3} r_2 r_3 + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_3^2} r_3^2\right)_{a_2 = e_2, a_3 = r_3} = \\
&= 4 g^2 f'^2 [e_1^2 - 12 e_2 - 27 g^2 + 18 g e_1] = \\
&= 4 g^2 f'^2 [g^2 + 4 (f'^2 + \boldsymbol{v}^2 g g' + \boldsymbol{v}^4 g'^2) + 8 \boldsymbol{v}^2 f' g' - 20 g f'], \\
\Delta_3 &= -\frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \Delta}{\partial a_2^3}\right)_{a_2 = e_2} r_2^3 = 32 g^3 f'^3.
\end{aligned}$$

Подстановкой явных выражений для функций e_1, e_2, e_3 получаем следующие формулы для Δ_1 и Δ_2:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 8 g^2 f'^2 \Big[(8 f' - 4 \boldsymbol{v}^2 g' - g) g - 4 (f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big], \\
\Delta_2 &= 4 g^2 f'^2 \Big[(g + 4 \boldsymbol{v}^2 g' - 20 f') g + 4 (f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big].
\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}
2\Delta_1 + \Delta_2 &= 12 g^2 f'^2 \Big[(4 f' - 4 \boldsymbol{v}^2 g' - g) g - 4 (f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big]. \\
\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 &= 4 g^2 f'^2 \Big[(4 f' - 4 \boldsymbol{v}^2 g' - g) g - 4 (f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big].
\end{aligned}$$

Положим теперь $u = \eta^2$, $\alpha_0 = \Delta(e_1, e_2, e_3)$, $\alpha_1 = \Delta_1$, $\alpha_2 = \Delta_2$, $\alpha_3 = \Delta_3$ и воспользуемся формулами

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \Delta(e_1, e_2 - r_2, e_3 - r_3) = \Delta(e_1, e_2 - 2 g f', e_3 - 2 g^2 f').$$

В результате на основании леммы убеждаемся в справедливости следующего утверждения, доказательство которого составляет цель настоящей работы.

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение* (1) *с тензор-функцией* (4) *представляло собой систему гиперболических по Петровскому квазилинейных уравнений первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$g f' > 0, \quad \Delta(e_1, e_2 - 2 g f', e_3 - 2 g^2 f') > 0,$$

а также условия, перечисленные по крайней мере в одном из следующих пп. I–III:

I. *Если* $\Delta(e_1, e_2, e_3) = 0$, *то*

либо $(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 = 0$;
либо $(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 < 0$
и $\Big((g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 \leqslant 0$ *или* $(4f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 \leqslant 0\Big)$;
либо $(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 > 0$
и $\Big((g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 \geqslant 0$ *или* $(4f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 \geqslant 0\Big)$;
либо одновременно

$$\begin{gathered}
(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 > 0,\\
(g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 > 0,\\
(4f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 > 0.
\end{gathered}$$

II. *Если* $\Delta(e_1, e_2, e_3) \neq 0$, *то*

$$\begin{aligned}
16g^2 f'^2 \Big[(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big]^2 &\leqslant \\
&\leqslant 3\Delta(e_1, e_2, e_3)\Big[(g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big].
\end{aligned}$$

III. *Если* $\Delta(e_1, e_2, e_3) \neq 0$,

$$16g^2 f'^2 [(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2]^2 > 3\Delta(e_1, e_2, e_3)\Big[(g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big],$$

то в случае III_+, *когда* $\Delta(e_1, e_2, e_3) > 0$, *должна реализоваться одна из следующих возможностей*:

(i) $(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 > 0$, $(g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 \leqslant 0$ *или нарушается по крайней мере одно из неравенств*

$$\begin{gathered}
3\Delta(e_1, e_2, e_3) + 8(gf')^2\Big[(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big] > 0,\\
3\Delta(e_1, e_2, e_3) + 12(gf')^2\Big[(4f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big] > 0.
\end{gathered}$$

(ii) $(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 > 0$ *и* $(g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2 > 0$, *а также одновременно выполняются неравенства*

$$\begin{gathered}
3\Delta(e_1, e_2, e_3) + 8(gf')^2\Big[(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big] > 0,\\
3\Delta(e_1, e_2, e_3) + 12(gf')^2\Big[(4f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big] > 0,\\
9 > gf'\Big[(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big]\Big[(g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big],\\
\begin{aligned}
9\Delta(e_1, e_2, e_3)\Big(3 - (gf')\Big[(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big] &\times \\
\times\Big[(g + 4\boldsymbol{v}^2 g' - 20f')g + 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big]\Big) &+ \\
+32(gf')^3\Big[(8f' - 4\boldsymbol{v}^2 g' - g)g - 4(f' + \boldsymbol{v}^2 g')^2\Big]^3 &> 0,
\end{aligned}
\end{gathered} \tag{30}$$

и вытекающее из (29) *неравенство*

$$
\begin{aligned}
&\Delta^2(e_1,e_2,e_3)\Big[(g+4\boldsymbol{v}^2g'-20f')g+4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]^3+\\
&\quad+4\Delta(e_1,e_2,e_3)\Big(27-18(gf')\Big[(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]\Big[(g+4\boldsymbol{v}^2g'-20f')g+\\
&\quad+4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]-(gf')^2\Big[(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]^2\Big[(g+4\boldsymbol{v}^2g'-20f')g+\\
&\quad+4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]^2\Big)+4^4(gf')^3\Big[(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]^3>0. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

В случае же III_-, *когда* $\Delta(e_1,e_2,e_3)<0$, *должна реализоваться одна из следующих возможностей*:

(1) *Выполняется по крайней мере одно из неравенств*

$$
\begin{gathered}
(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\leqslant 0;\\
(g+4\boldsymbol{v}^2g'-20f')g+4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\geqslant 0;\\
3\Delta(e_1,e_2,e_3)+8(gf')^2\Big[(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]>0;\\
3\Delta(e_1,e_2,e_3)+12(gf')^2\Big[(4f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]\leqslant 0.
\end{gathered}
$$

(2) $(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2>0$ *и* $(g+4\boldsymbol{v}^2g'-20f')g+4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2>0$, *а также реализуется либо*

$$
3\Delta(e_1,e_2,e_3)+8(gf')^2\Big[(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]\leqslant 0,
$$

либо

$$
\begin{gathered}
3\Delta(e_1,e_2,e_3)+8(gf')^2\Big[(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]\leqslant 0,\\
3\Delta(e_1,e_2,e_3)+12(gf')^2\Big[(4f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]>0.
\end{gathered}
$$

Кроме того, должны выполняться неравенства (30) *и*

$$
\begin{aligned}
&9\Delta(e_1,e_2,e_3)\Big(3-(gf')\Big[(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]\times\\
&\quad\times\Big[(g+4\boldsymbol{v}^2g'-20f')g+4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]\Big)+32(gf')^3\Big[(8f'-4\boldsymbol{v}^2g'-g)g-4(f'+\boldsymbol{v}^2g')^2\Big]^3<0
\end{aligned}
$$

вместе с неравенством (31).

7. Гиперболичность по Фридрихсу. Ввиду технической сложности установления необходимых и достаточных условий гиперболичности систем квазилинейных уравнений первого порядка даже в том относительно простом случае, который был исследован выше, часто объектом исследования систем квазилинейных уравнений первого порядка является установление наличия у них более слабого свойства, чем гиперболичность, а именно, так называемой t-гиперболичности (гиперболичности по Фридрихсу) (см. [5, 13]). Согласно определению понятия t-гиперболичности квазилинейных систем первого порядка, для каждой из таких систем существует положительно определенная симметричная матрица $\mathsf{U}^{(0)}$, для которой матрицы $\mathsf{U}^{(0)}\mathsf{U}^{(l)}$, $l=1,2,3$, являются симметричными. Такое определение понятия t-гиперболичности связано со следующим утверждением (ниже мы приводим разъяснения, касающиеся сформулированного утверждения, так как в известной книге [5] в его формулировке, по нашему мнению, допущена существенная неточность).

Теорема 5. *Если для системы квазилинейных уравнений первого порядка*

$$
\frac{\partial u_j}{\partial t}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}A^{(l)}_{jk}\frac{\partial u_j}{\partial x_l},\quad j=1,\dots,n
$$

относительно набора функций $u_j(x_1,\dots,x_m,t)$, $j=1,\dots,n$, у которой каждая матрица $\mathsf{A}^{(l)}$ из набора матриц $(\mathsf{A}^{(l)})_{jk}=A^{(l)}_{jk}$, $l=1,\dots,m$, которые зависят от значений этих функций в текущей точке $\langle x_1,\dots,x_m;t\rangle$, существует такая положительно определенная симметричная матрица $\mathsf{A}^{(0)}$, $(\mathsf{A}^{(0)})_{jk}=A^{(0)}_{jk}$, что матрицы $(\mathsf{A}^{(0)}\mathsf{A}^{(l)})_{jk}$, $l=1,\dots,m$, являются симметричными, то спектральное уравнение

$$\det\left(\lambda-\sum_{l=1}^{m}\xi_l A^{(l)}_{jk}\right)=0 \tag{32}$$

матрицы

$$\sum_{l=1}^{m}\xi_l A^{(l)}_{jk}$$

имеет только вещественные решения при любых вещественных наборах ξ_l, $l=1,\dots,m$.

Доказательство. Матрица $\mathsf{A}^{(0)}\mathsf{A}$ симметрична при любом наборе чисел ξ_j, $j=1,\dots,m$,

$$\mathsf{A}=\sum_{l=1}^{m}\xi_l\mathsf{A}^{(l)},\quad (\mathsf{A}^{(l)})_{jk}=A^{(l)}_{jk}.$$

Рассмотрим матричный пучок $\lambda\mathsf{A}^{(0)}-\mathsf{A}^{(0)}\mathsf{A}$ с положительно определенной матрицей $\mathsf{A}^{(0)}$. Тогда при любом выборе набора чисел ξ_j, $j=1,\dots,m$, все решения спектрального уравнения $\det(\lambda\mathsf{A}^{(0)}-\mathsf{A}^{(0)}\mathsf{A})=0$ для матричного пучка вещественны (см., например, [4]). Поскольку

$$\det{\mathsf{A}^{(0)}}^{-1}\cdot\det(\lambda\mathsf{A}^{(0)}-\mathsf{A}^{(0)}\mathsf{A})=\det(\lambda-\mathsf{A}),$$

т.е. спектральное уравнение (32) пучка совпадает с уравнением $\det(\lambda-\mathsf{A})=0$, заключаем, что все решения этого уравнения также вещественны. □

Выясним, какие необходимые и достаточные ограничения на выбор функций f и g необходимо наложить для того, чтобы соответствующее паре этих функций уравнение (5) было t-гиперболическим. Для решения поставленной задачи нужно найти такую симметричную положительно определенную матрицу $\mathsf{A}^{(0)}$, для которой матрица

$$A_{jk}=\sum_{l=1}^{3}k_l A^{(0)}_{jm}A^{(l)}_{mk}$$

симметрична.

Положим, что матрица $(\mathsf{A}^{(0)})_{jm}=A^{(0)}_{jm}$ имеет вид $A^{(0)}_{jm}=f^{(0)}(\boldsymbol{v}^2)\delta_{jm}+g^{(0)}(\boldsymbol{v}^2)v_jv_m$ с некоторыми дифференцируемыми функциями $f^{(0)}$ и $g^{(0)}$ от $\boldsymbol{v}^2$. Вычислим соответствующие произведения матриц:

$$\begin{aligned}A^{(0)}_{jm}A^{(l)}_{mk}&=\Big(f^{(0)}\delta_{jm}+g^{(0)}v_jv_m\Big)\Big(2\Big[f'\delta_{ml}+g'v_mv_l\Big]v_k+g\Big(\delta_{mk}v_l+\delta_{kl}v_m\Big)\Big)=\\&=2f^{(0)}f'\delta_{jl}v_k+f^{(0)}g\Big(\delta_{jk}v_l+\delta_{kl}v_j\Big)+\boldsymbol{v}^2g^{(0)}gv_j\delta_{kl}+\Big[2(f^{(0)}g'+g^{(0)}f')+g^{(0)}(g+2g'\boldsymbol{v}^2)\Big]v_jv_kv_l.\end{aligned}$$

Из полученного выражения следует, что матрица $A^{(0)}_{jm}A^{(l)}_{mk}$ симметрична по индексам j, k в том и только в том случае, когда относительно этих индексов симметричен тензор

$$2f^{(0)}f'\delta_{jl}v_k+\Big(f^{(0)}+\boldsymbol{v}^2g^{(0)}\Big)gv_j\delta_{lk},$$

т.е. коэффициенты при линейно независимых тензорах $\delta_{jl}v_k$ и $\delta_{lk}v_j$ при каждом $l=1,2,3$ совпадают. Отсюда имеем равенство

$$2f^{(0)}f'=g\Big(f^{(0)}+g^{(0)}\boldsymbol{v}^2\Big).$$

Найдем теперь условия, при которых симметричная 3×3-матрица

$$A^{(0)}_{jm}=f^{(0)}(\boldsymbol{v}^2)\delta_{jm}+g^{(0)}(\boldsymbol{v}^2)v_jv_m$$

является положительно определенной. Для этого вычислим полином $\det(\lambda - \mathsf{A}^{(0)})$. Коэффициентами этого полинома являются $\operatorname{Sp}\mathsf{A}^{(0)} > 0$, $(\operatorname{Sp}^2\mathsf{A}^{(0)} - \operatorname{Sp}\mathsf{A}^{(0)2})/2$ и $\det\mathsf{A}^{(0)} > 0$,

$$\operatorname{Sp}\mathsf{A}^{(0)} = 3f^{(0)} + \boldsymbol{v}^2 g^{(0)} > 0, \quad \det\mathsf{A}^{(0)} = f^{(0)2}(f^{(0)} + \boldsymbol{v}^2 g^{(0)}) > 0. \tag{33}$$

Так как

$$\operatorname{Sp}\mathsf{A}^{(0)2} = 2f^{(0)2} + \Big(f^{(0)} + \boldsymbol{v}^2 g^{(0)}\Big)^2,$$

то на основании (33) второй коэффициент определяется выражением

$$\frac{1}{2}\Big(\operatorname{Sp}^2\mathsf{A}^{(0)} - \operatorname{Sp}\mathsf{A}^{(0)2}\Big) = f^{(0)}\Big(3f^{(0)} + 2\boldsymbol{v}^2 g^{(0)}\Big),$$

и уравнение для собственных чисел матрицы $\mathsf{A}^{(0)}$ принимает вид

$$\lambda^3 - \Big(3f^{(0)} + \boldsymbol{v}^2 g^{(0)}\Big)\lambda^2 + f^{(0)}\Big(3f^{(0)} + 2\boldsymbol{v}^2 g^{(0)}\Big)\lambda - f^{(0)2}\Big(f^{(0)} + \boldsymbol{v}^2 g^{(0)}\Big) = 0.$$

Записав его в виде

$$\Big(\lambda - f^{(0)}\Big)^3 - \boldsymbol{v}^2 g^{(0)}\Big(\lambda - f^{(0)}\Big)^2 = 0,$$

находим собственные числа $\lambda = f^{(0)}, f^{(0)} + \boldsymbol{v}^2 g^{(0)}$ матрицы $\mathsf{A}^{(0)}$. Таким образом, матрица $\mathsf{A}^{(0)}$ положительно определена при выполнении неравенств $f^{(0)} > 0$, $f^{(0)} + \boldsymbol{v}^2 g^{(0)} > 0$.

Запишем теперь условие (6) в виде

$$g = 2f'\left(1 + \frac{\boldsymbol{v}^2 g^{(0)}}{f^{(0)}}\right)^{-1}.$$

Так как функции $g^{(0)}$ и $f^{(0)}$ могут быть выбраны произвольно с соблюдением указанных для них ограничений, то, вводя произвольную строго положительную функцию $h(\boldsymbol{v}^2) = 2(1 + \boldsymbol{v}^2 g^{(0)}/f^{(0)})^{-1}$, получаем необходимое и достаточное условие t-гиперболичности уравнения векторного (5). Таким образом, мы убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 6. *Для того чтобы квазилинейные уравнения класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, вся совокупность которых описывается уравнением (5) с произвольными функциями $f(\boldsymbol{v}^2)$ и $g(\boldsymbol{v}^2)$, обладали свойством t-гиперболичности, необходимо и достаточно, чтобы $g = hf'$, где h — произвольная дифференцируемая, строго положительная функция на $\mathbb{R}_+$.*

8. Заключение. В работе дано полное описание класса всех гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка для векторного поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, которые допустимо использовать для описания временнóй эволюции этого поля в условиях пренебрежения физическими механизмами диссипации, в частности, энергии. Решение задачи, представленное в работе, показывает, что установление гиперболичности конкретной системы квазилинейных уравнений первого порядка, несмотря на принципиальную разрешимость этой задачи, представляет собой довольно трудоемкий процесс. Более того, несмотря на рутинность предложенного в работе решения и сложность полученного результата, процесс решения удалось довести до конца, не прибегая к каким-либо приближениям. Это связано с тем, что решенная задача является все же довольно простой из всей совокупности такого рода задач, которые могут возникнуть в процессе конструирования физически адекватных математических моделей, когда исследуемые системы дифференциальных уравнений не конкретизированы, а, наоборот, зависят от большого набора параметров, и смысл проводимого анализа как раз и состоит в том, чтобы определить допустимые области изменения этих параметров. В более сложных случаях неизбежно придется прибегать к применению в процессе решения каких-либо приближений. В этом смысле использование более слабого понятия t-гиперболичности, которое используется в большинстве исследований задач математической физики, связанных с квазилинейными уравнениями первого порядка (см., например, [6, 7, 12]), может оказаться более предпочтительным. Если дополнительно проводить исследование на возможность пересечения различных ветвей $\omega_j(\boldsymbol{k})$ спектральных зависимостей, то, совместно с установлением областей изменения параметров системы, в которых она обладает свойством t-гиперболичности, это дает достаточное условие для гиперболичности системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Плесканев А. F.* Гиперболические сферически симметричные уравнения первого порядка дивергентного типа для векторного поля// Науч. вед. БелГУ. Сер. мат. физ. — 2019. — *51*, № 2. — С. 280–294.
2. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Математические задачи конструирования эволюционных уравнений динамики конденсированных сред// Мат. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 25–29 июня 2018 г.). — Уфа: Риц БашГУ, 2018. — С. 262–264.
3. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения// Мат. V Междунар. науч. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 4–7 декабря 2018 г.). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
6. *Гордиенко В. М.* Системы Фридрихса для трехмерного волнового уравнения// Сиб. мат. ж. — 2010. — *51*, № 6. — С. 1282–1297.
7. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
8. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применения в физике. — М.: Госфизматлит, 1958.
9. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. — М.: Физматлит, 1962.
10. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
11. *Субботин А. В., Вирченко Ю. П.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Мат. IV Всеросс. науч.-практ. конф. «Современные проблемы физико-математических наук» (Орел, 22–25 ноября 2018 г.). — Орел: ОГУ им. ни И. С. Тургенева, 2018. — С. 83–86.
12. *Чиркунов Ю. А.* Системы фридрихса для систем волновых уравнений и волны сдвига в трехмерной упругой среде// Прикл. мех. техн. физ. — 2010. — *51*, № 6. — С. 121–132.
13. *Majda A.* The existence of multi-dimensional shock fronts// Mem. Am. Math. Soc. — 1983. — *43*, № 281. — P. 1–94.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Субботин Андрей Валерьевич
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
E-mail: `subbotin@gmail.com`