УДК 330.4 DOI: 10.36871/2618-9976.2021.02.002

К ВОПРОСУ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРОДВИЖЕНИЯ УНИВЕРСИТЕТОВ В ГЛОБАЛЬНЫХ УНИВЕРСИТЕТСКИХ РЕЙТИНГАХ

Блажевич Сергей Владимирович[1]

[1] *Профессор, доктор физико-математических наук, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия, e-mail: blazh@bsu.edu.ru*

Московкин Владимир Михайлович[2]

[2] *Профессор, доктор географических наук, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия, e-mail: moskovkin@bsu.edu.ru*

Чжан Хэ[3]

[3] *Аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия, e-mail: 2695694838@qq.com*

ИНФОРМАЦИЯ

Ключевые слова:
университетские рейтинги
THE
Overall Score
межуниверситетская конкуренция
уравнения Лотки–Вольтерра
уравнения популяционной динамики
уравнение Ферхюльста

АННОТАЦИЯ

Предложен подход к описанию результатов конкурентного взаимодействия университетов, входящих в какой-либо мировой университетский рейтинг на основе решения уравнений популяционной динамики (уравнений Лотка–Вольтерра), представляющих собой нелинейную многомерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Фазовыми переменными в этих уравнениях являются значения интегрального показателя университетского рейтинга, который называется Overall или Total Score в зависимости от рейтинга. Подход состоит в редукции этой системы к системе независимых уравнений Ферхюльста, имеющих аналитические решения в экспонентах по времени, и переходу от них к стационарным решениям, представленным значениями фазовых переменных в момент времени стремящийся к бесконечности. Показано, что при таком подходе и заданном коэффициенте роста Overall (Total) Score можно однозначно находить симметричные коэффициенты межуниверситетской конкуренции для не более, чем трех конкурирующих университетов, использование которых приводит к системе уравнений, стационарное решение которых представляет известные значения интегрального показателя рейтинга для выбранных трех университетов, а в качестве начальных значений – интегральные показатели предыдущего рейтинга. В этом случае система дифференциальных уравнений описывает процесс изменения интегрального показателя в течение периода между двумя рейтингами. Используя найденные значения коэфициентов межуниверситетской конкуренции, система решается последовательно для всех этапов рейтинга, при чем решения на предыдущем этапе используются в качестве начальных условий последующего. В качестве примера численные решения системы уравнений получены и представлены на одном графике для первых трех университетов рейтинга THE. Развитие подхода, основанного на уравнениях популяционной динамики, может состоять в обращении к концепции конку-

рентно-кооперационных университетских взаимодействий и в разработке калибровочных процедур для решения таких нелинейных динамических систем.

ON THE ISSUE OF PREDICTING THE ADVANCEMENT OF UNIVERSITIES IN GLOBAL UNIVERSITY RANKINGS

Blazhevich Sergey Vladimirovich[1]

[1] *Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Belgorod National Research University, Department of Informatics, Natural Scientific Disciplines and Teaching Methods, Belgorod, Russian Federation, e-mail: blazh@bsu.edu.ru*

Moskovkin Vladimir Mikhailovich[2]

[2] *Doctor of Geographical Sciences, Professor, Belgorod National Research university, Department of the Word Economy, Belgorod, Russian Federation, e-mail: moskovkin@bsu.edu.ru*

Zhang He[3]

[3] *Graduate Student, Belgorod National Research University, Department of Applied Economics and Economic Security, Belgorod, Russian Federation, e-mail: 2695694838@qq.com*

ARTICLE INFO

Keywords:
university rankings
THE
Overall Score
Interuniversity competition
Lotka–Volterra equations
Population dynamics equation
Verhulst equation

ABSTRACT

A simplified approach to solving the equations of population dynamics (Lotka–Volterra equations), which is a nonlinear multidimensional system of ordinary differential equations of the first order, describing the competitive interaction of universities included in some world university ranking, is proposed. The phase variables in these equations are the values of the integral indicator of the university ranking, which is called Overall or Total Score. The simplification consists in reducing this system to a system of independent Verhulst equations with analytic solutions in exponents of time and passing from them to stationary solutions when time tends to infinity. It is shown that with this approach and a given growth rate Overall (Total) Score, it is possible to find symmetric coefficients of inter-university competition for no more than three competing universities. When finding such coefficients for the first three universities in the THE ranking, numerical solutions of the original system of population dynamics equations were obtained using the Runge–Kutta method in MatLab. It is shown that the development of this approach, based on the equations of population dynamics, can consist in turning to the concept of competitive – cooperative university interactions. The system of differential equations describes the process of changing the integral indicator during the period between two ratings. Using the found values of the coefficients of inter-university competition, the system is solved sequentially for all stages of the ranking, and the decisions at the previous stage are used as the initial conditions for the next one.

Введение

После запуска в России публикационной гонки возник интерес к построению математических моделей, описывающих продвижения университетов в глобальных университетских рейтингах. Ниже рассмотрим такие модели, основанные на решении обыкновенных дифференциальных уравнений или их систем первого порядка. Первые такие простейшие уравнения были предложены в работах исследователей Уральского федерального университета [1, 2].

Они соответствовали популяционным моделям мальтузианского роста, когда коэффициент роста рассматривался обратно пропорциональным времени [1] или брался постоянной величиной, но в правую часть уравнения мальтузианского роста вводился свободный член, равный постоянной величине [2]. В качестве прогнозируемой переменной в этих моделях использовался показатель Overall (Total) Score глобальных университетских рейтингов, ранжируя который администраторы рейтинговых агентств выстраивают места университетов в своих рейтингах. Эти уравнения мы подробно рассматривали в работе [3], а также предложили использовать для решения таких задач уравнение Ферхульста, которое является развитием уравнения (модели) Мальтуса за счет введения в него тормозящего квадратичного члена, не дающего решениям уравнения уходить на бесконечность.

Решение этого уравнения используется во многих областях знаний, в которых изучаются процессы самоограниченного роста, и оно называется логистической функцией, графически представляющую собой логистическую кривую. История создания этого уравнения изложена нами в работе [4]. Так как часто уравнения Ферхульста используется в многомерных нелинейных уравнениях популяционной динамики, которые называются уравнениями Лотка – Вольтерра, то мы предложили использовать эти уравнения для совместного конкурентного моделирования множества университетов [3, 5].

В этой системе уравнений, помимо коэффициентов роста и внутриуниверситетской конкуренции, присутствующих в одномерной модели Ферхульста, имеет место множество коэффициентов межуниверситетской конкуренции, количество которых определяется числом университетов.

Помимо данного подхода при прогнозировании университетов в глобальных университетских рейтингах, основанного на уравнениях популяционной динамики, в десятых годах этого века возник подход, основанный на уравнениях системной динамики. Он зародился в Саратовском государственном техническом университете им. Ю.А. Гагарина [6–8], а в последнее время эти исследования стали проводится в кооперации исследователей этого университета с учеными Института проблем точной механики и управления РАН (Саратов) [9–11]. Кроме того, в рамках этого подхода, в 2018 году была опубликована работа исследователей Уральского федерального университета [12], один из которых участвовал в ранних работах [1, 2], которые мы отнесли к подходу, основанному на уравнениях популяционной динамики.

До запуска публикационной гонки исследователи строили уравнения системной динамики на основе переменных (показателей) аккредитации вузов [6–8], а в последующем эти переменные стали привязываться к индикаторам глобальных университетских рейтингов [9–12]. Отметим, что в работах [9–11] решалась и анализировалась одна и та же многомерная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, состоящая из 31 уравнения, в соответствии с 31-им индикатором рейтинга U-Multirank, а в работе [12] моделировались 6 индикаторов, на основе которых рассчитывается Overall Score рейтинга QS.

В отличие от моделей популяционной динамики, которые имеют определенный вид и физический смысл, модели системной динамики представляют собой модели "черного ящика" и имеют различный вид в зависимости от исследовательской позиции авторов. Если модель популяционной динамики описывает динамику конкурентных взаимодействий множества университетов для одного интегрального показателя университетского рейтинга (Overall (Total) Score), а в более общем случае и конкурентно –

кооперационных взаимодействий в зависимости от знака коэффициента, стоящего перед попарными произведениями переменных модели, то модель системной динамики описывает динамику множества переменных аккредитации университета или индикаторов университетского рейтинга для одного университета.

Уравнения системной динамики представляют собой, как отмечалось выше, систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для некоторого множества переменных, в которых производные по времени, характеризующие изменения переменных, приравниваются сумме некоторых "потоковых" функций, первая из которых отвечает за рост переменной, а вторая за убыль. Эти "потоковые" функции, в общем случае, могут зависеть от всех переменных модели, но, чтобы учесть в этих функциях наиболее значимые прямые и обратные связи, строиться ориентированный граф причинно-следственных связей. Далее, на имеющихся ретроспективных данных эти связи, методом наименьших квадратов, определяются в явном виде, а, следовательно, определяются и "потоковые" функции, обычно в виде полиномов невысокой степени. После чего, полученная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка приводится к задаче Коши (задача на начальные условия), которая численно решается стандартным методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности. В таком виде задача рассматривалась в работах [9–11], а в других работах методом наименьших квадратов строились регрессионные уравнения не в виде полинома от искомых переменных, а в виде полинома от времени для правых частей системы уравнений [7], и тогда решение задачи становится на много проще.

Отметим, что за рубежом такого рода задачи вообще не ставятся, что показывают наши эксперименты в Google Scholar. Теперь мы обратимся к развитию нашего подхода по моделированию позиционирования университетов в глобальных университетских рейтингах.

Пути упрощения модели популяционной динамики применительно к динамике рейтинга университетов

Предложенная в [3] система уравнений для рейтинга университетов, записанная в несколько другом виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1(t)}{dt} = k_1 \cdot y_1(t) - \beta_1 \cdot y_1(t) \cdot y_1(t) - y_1(t) \cdot \left(\gamma_{12} \cdot y_2(t) + \gamma_{13} \cdot y_3(t) + \cdots \gamma_{1N} \cdot y_N(t)\right)\\
&\frac{dy_2(t)}{dt} = k_2 \cdot y_2(t) - \beta_2 \cdot y_2(t) \cdot y_2(t) - y_2(t) \cdot \left(\gamma_{21} \cdot y_1(t) + \gamma_{23} \cdot y_3(t) + \cdots \gamma_{2N} \cdot y_N(t)\right)\\
&\cdots\\
&\frac{dy_N(t)}{dt} = k_N \cdot y_N(t) - \beta_N \cdot y_N(t) \cdot y_N(t) - y_N(t) \cdot \left(\gamma_{N1} \cdot y_1(t) + \gamma_{N2} \cdot y_2(t) + \cdots \gamma_{NN-1} \cdot y_{(N-1)}(t)\right)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющую процесс набора баллов $y_1(t)$, $y_2(t)$,…,$y_N(t)$ (в терминологии рейтинговых агентств эти баллы называются Overall или Total Score) каждым из N университетов, участвующих в процессе подготовки к очередному рейтингу. При заданных начальных значениях функций $y_1(0)$, $y_2(0)$,…,$y_N(0)$ эта система может быть решена численно с использованием одного из множества существующих математических программных пакетов. Коэффициенты k_i, β_i и $\gamma_{i,j}$ в системе уравнений (1) описывают соответственно генерацию, ограничение в результате внутриуниверситетской конкуренции и ограничение в результате межуниверситетской конкуренции баллов $y_1(t)$, $y_2(t)$,…,$y_N(t)$, набираемых университетами в результате очередного рейтингования университетов. Каждое из уравнений, при определенном упрощении, может быть решено также и аналитически, после чего задача сведется к системе нелинейных функций следующего вида:

$$y_i = \frac{Z_i \cdot a_i}{k_i + Z_i \cdot \exp(-a_i \cdot t)}\ , \tag{2}$$

где

$$a_i = k_i - \sum_{j=1}^{N}(\gamma_{i,j} \cdot y_j)\ ,$$

$i=1...N$; $\gamma_{i,i}=0$; $Z_i=k_i/\beta_i=100$; $y_1=y_1(t)$, $y_2=y_2(t)$,… $y_N=y_N(t)$.

Коэффициенты $\gamma_{i,j}$, отражающие конкуренцию между университетами, изменяются в зависимости от политики развития университетов и могут быть определены по результатам рейтинга. Для этого необходимы допущения о взаимном влиянии на процесс набора баллов каждой из пар университетов. Очевидно, что в процессе продвижения университета к улучшению его позиции в рейтинге основное влияние на его политику оказывают предыдущие результаты университетов, наиболее близко расположенных к нему в рейтинге. С другой стороны, большое количество коэффициентов $\gamma_{i,j}$ не только сложно определить, но и сложно потом интерпретировать. В этом смысле возможны следующие этапы упрощения системы (1), а значит и системы (2):

первый – определение усредненного влияния всех конкурентов, то есть вычисление одного параметра конкуренции i-того университета с другими университетами G_i:

$$a_i = k_i - G_i\,. \tag{3}$$

второй – это рассмотрение взаимного влияния лишь ближайших конкурентов, пренебрегая влиянием всех остальных. При этом G_i разлагается на слагаемые, описывающие влияния конкуренции с конкретными университетами.

Коэффициенты усредненной конкуренции университетов

В общем случае величины G_i являются функциями независимой переменной t, так как определяются зависящими от t величинами y_j. Поскольку решение системы (1) в виде функций $y_1(t)$, $y_2(t)$,…,$y_N(t)$ представляют лишь переходный процесс к их стационарным значениям $y_1(\infty)$, $y_2(\infty)$,…,$y_N(\infty)$, то смысл имеют лишь эти стационарные значения. Это значит, что если в качестве окончательного значения баллов университета в рейтинге принимать стационарные значения, то система (1) практически будет развязана, поскольку при достаточно большом значении t функции $y_1(t)$, $y_2(t)$,…,$y_N(t)$ в системе:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1(t)}{dt} &= k_1 \cdot y_1(t) - \beta_1 \cdot y_1(t) \cdot y_1(t) - y_1(t) \cdot G_1 \\
\frac{dy_2(t)}{dt} &= k_2 \cdot y_2(t) - \beta_2 \cdot y_2(t) \cdot y_2(t) - y_2(t) \cdot G_2 \\
&\dots \\
\frac{dy_N(t)}{dt} &= k_N \cdot y_N(t) - \beta_N \cdot y_N(t) \cdot y_N(t) - y_N(t) \cdot G_N
\end{aligned} \tag{4}$$

практически станут константами. Константами (по отношению к t) станут и коэффициенты G_i. Изменяя G_i в каждом уравнении независимо, найдем такие их значения, при которых $y_1(t) \approx y_1(\infty)$, $y_2(t) \approx y_2(\infty)$,…,$y_N(t) \approx y_N(\infty)$ совпадут с результатом этапа реального рейтинга. Полученный вектор коэффициентов G_i, где i=1…N, может быть использован при анализе динамики успехов университетов в рейтинге. Рассматриваемый подход значительно облегчает задачу исследования процесса конкуренции, поскольку каждому университету он предписывает лишь один постоянный параметр, который определяет его успех в рейтинге и позволяет прогнозировать его дальнейшее продвижение. Следует заметить, что если бы мы не переходили к стационарным решениям, то за счет зависимости G_i от t происходило бы рассогласование между присвоенным одному из этих коэффициентов значения и соответствующим стационарным решением после присвоения значений другим коэффициентам $G_{j\neq i}$, то есть возникла бы сложность в подборе значений элементов вектора G для описания результатов реальных рейтингов.

Значения $y_1(\infty)$, $y_2(\infty)$,…,$y_N(\infty)$ в выражении (2) соответствуют N равенствам, полученным при $\exp(-a_i \cdot t) = 0$, что при подстановке в системе функций (2) G_i вместо $\sum_{j=1}^{N}\left(\gamma_{i,j} \cdot y_j\right)$ и $a_i = k_i - G_i$ (формула 3), дает следующую функциональную связь между результатом рейтинга y_i и значением усредненного коэффициента конкуренции G_i:

$$y_i = \frac{Z_i \cdot (k_i - G_i)}{k_i}. \tag{5}$$

Для известного результата рейтинга y_i из (5) можно определить коэффициент G_i:

$$G_i = k_i \cdot \left(1 - \frac{y_i}{Z_i}\right). \tag{6}$$

Величина $Z_i = \frac{k_i}{\beta_i}$ в рейтинге обозначает максимальное число баллов, которые может получить университет в рейтинге, и обычно принимают $Z_i = Z = 100$.

В качестве примера мы рассмотрели результаты для десяти университетов, занимающих первые места в рейтинге в THE за 2011–2020 гг. (табл. 1), а также группы университетов, занимающие места от 90 до 110 (табл. 2), и рассчитали соответствующие коэффициенты G_i по формуле (6) при k_i = 1.

Таблица 1

Баллы первых десяти университетов в рейтинге THE в 2011–2020 годах (верхняя цифра в ячейке) и соответствующие им коэффициенты G_i (нижняя цифра)

THE 2010–2011	University	2010	2010–2011	2011–2012	2012–2013	2013–2014	2014–2015	2015–2016	2016–2017	2017–2018	2018–2019	2019–2020
1	"Harvard University"	96,1 0,039	93,9 0,061	93,6 0,064	93,9 0,061	93,3 0,067	91,6 0,084	92,7 0,073	91,8 0,082	93,6 0,064	93 0,07	94,8 0,052

Окончание Таблицы 1

2	"California Institute of Technology"	96 0,04	94,8 0,052	95,5 0,045	94,9 0,051	94,3 0,057	95,2 0,048	94,3 0,057	93 0,07	94,1 0,059	94,5 0,055	94,5 0,055
3	"Massachusetts Institute of Technology"	95,6 0,044	92,3 0,077	93,1 0,069	93 0,07	91,9 0,081	92 0,08	93,4 0,066	92,5 0,075	94,2 0,058	93,6 0,064	94,4 0,056
4	"Stanford University"	94,3 0,057	93,9 0,061	93,7 0,063	93,8 0,062	92,9 0,071	93,9 0,061	93,8 0,062	93 0,07	94,7 0,053	94,3 0,057	94,9 0,051
5	"Princeton University"	94,2 0,058	92,9 0,071	92,7 0,073	92,7 0,073	90,9 0,091	90,1 0,099	90,2 0,098	91,1 0,089	92,3 0,077	93,2 0,068	91,5 0,085
6	"University of Cambridge"	91,2 0,088	92,4 0,076	92,6 0,074	92,3 0,077	92 0,08	92,8 0,072	93,6 0,064	93,2 0,068	94,8 0,052	94,4 0,056	94 0,06
7	"University of Oxford"	91,2 0,088	93,6 0,064	93,7 0,063	93,9 0,061	93,2 0,068	94,2 0,058	95 0,05	94,3 0,057	96 0,04	95,4 0,046	95,6 0,044
8	"University of California, Berkeley"	91,1 0,089	89,8 0,102	90,5 0,095	89,8 0,102	89,5 0,105	87,2 0,128	88,9 0,111	84,3 0,157	87,7 0,123	88,3 0,117	92,2 0,078
9	"Imperial College London"	90,6 0,094	90,7 0,093	90,6 0,094	87,5 0,125	87,5 0,125	89,1 0,109	90 0,1	89,2 0,108	90,3 0,097	89,8 0,102	89,4 0,106
10	"Yale University"	89,5 0,105	89,1 0,109	89,2 0,108	87,4 0,126	87,5 0,125	87,4 0,126	88,2 0,118	87,6 0,124	91,3 0,087	91,7 0,083	91,6 0,084

Таблица 2

Усредненные коэффициенты конкуренции G_i (число в нижней части ячейки), рассчитанные на основе данных рейтинга THE в 2011–2020 годах (верхнее число) для университетов, занимающих места в рейтинге от 90 до 110

THE 2010-2011	University	2010	2010–2011	2011–2012	2012–2013	2013–2014	2014–2015	2015–2016	2016–2017	2017–2018	2018–2019	2019–2020
90	University of Zurich	57,7 0,423	61,9 0,381	58,8 0,412	51,2 0,488	53,9 0,461	57,8 0,422	59,5 0,405	57,4 0,426	63 0,37	62,8 0,372	65,6 0,344
91	Wake Forest University	57,7 0,423	45,8 0,542	47,3 0,527	45,7 0,543	47,1 0,529	47,1 0,529	48,4 0,516	46,7 0,533	47,9 0,521	51,9 0,481	49,3 0,507
92	McMaster University	57,6 0,424	61 0,39	59 0,41	54,5 0,455	55,3 0,447	58,8 0,412	58,7 0,413	63,4 0,366	64,4 0,356	65,4 0,346	67,5 0,325
93	University College Dublin	57,5 0,425	45,9 0,541	47,9 0,521	46,7 0,533	48,7 0,513	50,6 0,494	48,4 0,516	50,0 0,5	51,3 0,487	51,9 0,481	49,3 0,507
94	George Washington University	57,3 0,427	49 0,51	49,4 0,506	44,8 0,552	45,6 0,544	47,0 0,53	48,4 0,516	50,0 0,5	54,5 0,455	53,8 0,462	54,9 0,451
95	University of Arizona	57,3 0,427	54,2 0,458	57,7 0,423	52,4 0,476	56,5 0,435	51,7 0,483	54,5 0,455	54,9 0,451	56,2 0,438	61,8 0,382	59,8 0,402
96	University of Basel	57,3 0,427	52,2 0,478	52,8 0,472	57,7 0,423	58,4 0,416	57,9 0,421	60,3 0,397	60,9 0,391	61,5 0,385	62,4 0,376	62,9 0,371
97	University of Maryland, College Park	57,2 0,428	54,5 0,455	57,9 0,421	52,2 0,478	51,9 0,481	56,7 0,433	65,3 0,347	65,7 0,343	63,7 0,363	62,7 0,373	63,1 0,369
98	Dartmouth College	57,1 0,429	54,9 0,451	54,4 0,456	50,5 0,495	50,0 0,5	57,8 0,422	62 0,38	62 0,38	62,4 0,376	62,4 0,376	61,7 0,383

Окончание Таблицы 2

99	École Normale Supérieure de Lyon	57 0,43	47,6 0,524	49,2 0,508	47,5 0,525	49,0 0,51	48,7 0,513	48,4 0,516	53,6 0,464	51,25 0,488	51,9 0,481	49,3 0,507
100	Technical University of Munich	56,9 0,431	55,1 0,449	56,8 0,432	55,2 0,448	54,6 0,454	69,4 0,306	71,6 0,284	73,5 0,265	73,7 0,263	74,1 0,259	74,8 0,252
101	University of Helsinki	56,6 0,434	54,8 0,452	56,4 0,436	52,6 0,474	53,9 0,461	61,9 0,381	61,2 0,388	61,7 0,383	62,4 0,376	62,3 0,377	62,1 0,379
102	University of St Andrews	56,5 0,435	55,7 0,443	56,5 0,435	51,6 0,484	53,6 0,464	60,4 0,396	58,9 0,411	56,6 0,434	55,8 0,442	53,8 0,462	52,4 0,476
103	Rensselaer Polytechnic Institute	56,4 0,436	47,4 0,526	48,9 0,511	45,6 0,544	45,3 0,547	45,3 0,547	44,9 0,551	43,8 0,562	42,8 0,572	40,55 0,595	38,1 0,619
104	Rutgers, the State University of New Jersey	56,3 0,437	56,8 0,432	57,5 0,425	52,4 0,476	50,5 0,495	56 0,44	56,2 0,438	54,3 0,457	54,9 0,451	56 0,44	56,4 0,436
105	Purdue University West Lafayette	56,2 0,438	54 0,46	63,8 0,362	60,7 0,393	54 0,46	57 0,43	64,5 0,355	68,2 0,318	67,4 0,326	63,1 0,369	62,5 0,375
106	University of Cape Town	56,1 0,439	53,2 0,464	55,8 0,486	50,5 0,508	52,6 0,53	56,1 0,54	55,3 0,551	54,4 0,562	56,5 0,606	58,2 0,566	57,3 0,554
107	University of Cape Town	56,1 0,439	53,2 0,468	55,8 0,442	50,5 0,495	52,6 0,474	56,1 0,439	55,3 0,447	54,4 0,456	56,5 0,435	58,2 0,418	57,3 0,427
108	Penn State (Main campus)	56 0,44	64,9 0,351	65,8 0,342	64,2 0,358	62,9 0,371	62,3 0,377	65 0,35	64,6 0,354	63,8 0,362	64,2 0,358	60,9 0,391
109	Seoul National University	56 0,44	50,1 0,499	65,9 0,341	65,2 0,348	64,8 0,352	60,5 0,395	64,2 0,358	64,9 0,351	67,5 0,325	68 0,32	69,7 0,303

Видно, что чем меньше количество баллов, набранных *i*-ым университетом, тем больше значение параметра конкуренции G_i, определяющего влияние на его положение в рейтинге результатов других университетов.

Матрица попарного взаимного конкурентного влияния университетов в рейтинге

Имея значения коэффициентов G_i усредненной конкуренции *i*-го университета с остальными университетами, можно пытаться определить "вклады" попарного конкурентного взаимодействия в группе университетов. Эта задача сводится к разложению усредненного коэффициента конкуренции для *i*-го университета G_i на слагаемые, соответствующие вкладам n-1 основных конкурентов:

$$G_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_{i,j} \cdot y_j \right). \qquad (7)$$

Считая величины y_i и G_i известными, решаем линейную систему уравнений (7) относительно коэффициентов $\gamma_{i,j}$ Очевидно, что при увеличении количества уравнений n число этих неизвестных коэффициентов растет гораздо быстрее чем n. Используя симметричность матрицы $(\gamma_{i,j})$ можно однозначно решить эту задачу для трех конкурирующих университетов. При необходимости увеличения их числа необходимо для расчета коэффициентов $\gamma_{i,j}$ привлекать дополнительные условия.

Рассмотрим для примера конкуренцию трех университетов, лидирующих в рейтинге. Три уравнения для определения коэффициентов взаимной конкуренции, представляющих матрицу ($\gamma_{i,j}$) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} \cdot y_2 + \gamma_{1,3} \cdot y_3 &= G_1 \\ \gamma_{2,1} \cdot y_1 + \gamma_{2,3} \cdot y_3 &= G_2 \\ \gamma_{3,1} \cdot y_1 + \gamma_{3,2} \cdot y_2 &= G_3 \end{aligned} \tag{8}$$

Дополнительными условиями для решения этой системы относительно элементов матрицы $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,3} \\ \gamma_{2,1} & 0 & \gamma_{2,3} \\ \gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$ являются равенство нулю значений диагональных элементов ($\gamma_{0,0} = \gamma_{1,1} = \gamma_{2,2} = 0$) и симметричность матрицы: $\gamma_{1,2} = \gamma_{2,1}$; $\gamma_{1,3} = \gamma_{3,1}$; $\gamma_{2,3} = \gamma_{3,2}$. Три независимых элемента $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,3}$ и $\gamma_{1,3}$ найдем, переписав систему (8) в виде:

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} \cdot y_2 + \gamma_{1,3} \cdot y_3 &= G_1 \\ \gamma_{1,2} \cdot y_1 + \gamma_{2,3} \cdot y_3 &= G_2 \\ \gamma_{1,3} \cdot y_1 + \gamma_{2,3} \cdot y_2 &= G_3 \end{aligned} \tag{9}$$

или в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} y_2 & 0 & y_3 \\ y_1 & y_3 & 0 \\ 0 & y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,3} \\ \gamma_{1,3} \end{pmatrix} = \mathbf{G},$$

откуда указанные коэффициенты могут быть найдены в виде вектора:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,3} \\ \gamma_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & 0 & y_3 \\ y_1 & y_3 & 0 \\ 0 & y_2 & y_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{G}. \tag{10}$$

где $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_2 \end{pmatrix}$

В таблице 3 представлены результаты расчета значения базовых элементов матрицы ($\gamma_{i,j}$) по данным трех первых строк таблицы 1.

Для любого этапа рейтинга выбранных университетов мы можем найти решение системы (1), подставляя найденные значения $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,3}$ и $\gamma_{1,3}$.

Начальными значениями для каждого этапа следует брать результаты предыдущего. Тогда решение системы будет описывать процесс перехода результатов предыдущего этапа рейтинга в результат рассматриваемого. Используя значения $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,3}$ и $\gamma_{1,3}$ матрицы коэффициентов попарной конкуренции, рассчитанные для каждого этапа рейтинга, мы опишем весь процесс изменения показателей (набор баллов) университетов, участвующих в рейтинге.

Таблица 3

Расчет элементов $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,3}$ и $\gamma_{1,3}$ матрицы коэффициентов попарной конкуренции для группы из трех университетов, занимающих лидирующее положение в рейтинге университетов THE, проведенный на основе набранных ими баллов y_i и коэффициентов усредненной конкуренции G_i, где i=1…3.

THE 2010–2020	University	2010–2011		2011–2012		2012–2013		2013–2014		2014–2015	
1	Harvard University	y_1 = 93,9 G_1 = 0,061		y_1 = 93,6 G_1 = 0,064		y_1 = 93,9 G_1 = 0,061		y_1 = 93,3 G_1 = 0,067		y_1 = 91,6 G_1 = 0,084	
2	California Institute of Technology	y_2 = 94,8 G_2 = 0,052	$\gamma_{1,2} = 1,99\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 3,61\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 4,56\cdot10^{-4}$	y_2 = 95,5 G_2 = 0,045	$\gamma_{1,2} = 2,07\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 2,69\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 4,63\cdot10^{-4}$	y_2 = 94,9 G_2 = 0,051	$\gamma_{1,2} = 2,18\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 3,21\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 4,21\cdot10^{-4}$	y_2 = 94,3 G_2 = 0,057	$\gamma_{1,2} = 2,38\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 3,79\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 4,85\cdot10^{-4}$	y_2 = 95,2 G_2 = 0,048	$\gamma_{1,2} = 2,81\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 2,42\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 6,22\cdot10^{-4}$
3	Massachusetts Institute of Technology	y_3 = 92,3 G_3 = 0,077		y_3 = 93,1 G_3 = 0,069		y_3 = 93 G_3 = 0,07		y_3 = 91,9 G_3 = 0,081		y_3 = 92,0 G_3 = 0,08	

Окончание Таблицы 3

THE 2010–2020	University	2015–2016		2016–2017		2017–2018		2018–2019		2019–2020	
1	Harvard University	y_1 = 92,7 G_1 = 0,073		y_1 = 91,8 G_1 = 0,082		y_1 = 93,6 G_1 = 0,064		y_1 = 93 G_1 = 0,07		y_1 = 94.8 G_1 = 0,052	
2	California Institute of Technology	y_2 = 94,3 G_2 = 0,057	$\gamma_{1,2} = 3,42\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 2,71\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 4,36\cdot10^{-4}$	y_2 = 93 G_2 = 0,07	$\gamma_{1,2} = 4,16\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 3,44\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 4,68\cdot10^{-4}$	y_2 = 94,1 G_2 = 0,059	$\gamma_{1,2} = 2,74\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 3,14\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 2,76\cdot10^{-4}$	y_2 = 94,5 G_2 = 0,055	$\gamma_{1,2} = 3,25\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 2,64\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 4,19\cdot10^{-4}$	y_2 = 94,5 G_2 = 0,055	$\gamma_{1,2} = 2,74\cdot10^{-4}$ $\gamma_{2,3} = 3,14\cdot10^{-4}$ $\gamma_{1,3} = 2,76\cdot10^{-4}$
3	Massachusetts Institute of Technology	y_3 = 93,4 G_3 = 0,066		y_3 = 92,5 G_3 = 0,075		y_3 = 94,2 G_3 = 0,058		y_3 = 93,6 G_3 = 0,064		y_3 = 94,4 G_3 = 0,056	

Изменение начальных условий задачи не влияет на решение (рис. 1), поскольку коэффициенты G_i определяют его однозначно (особые точки системы (1), рассчитанные на каждом временном этапе, являются устойчивыми узлами).

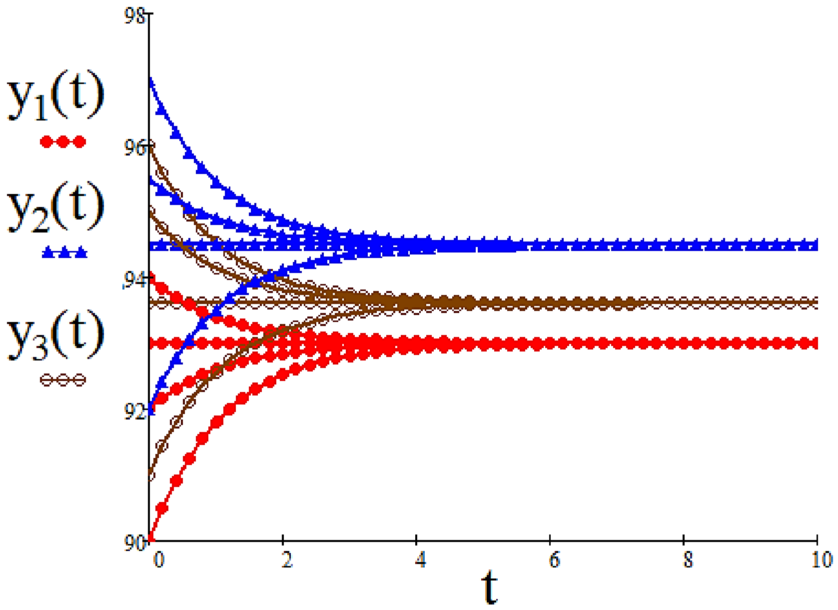

Рис. 1. Решение системы уравнений (1) для одного из этапов (k_i, $\gamma_{i,j}$) рейтинга выбранных университетов (три первые уравнений) для различных начальных условий

Решая систему (1) последовательно для всех годовых этапов рейтинга и используя решения на предыдущем этапе в качестве начальных условий для последующего этапа, представим все решения на одном графике (рис. 2).

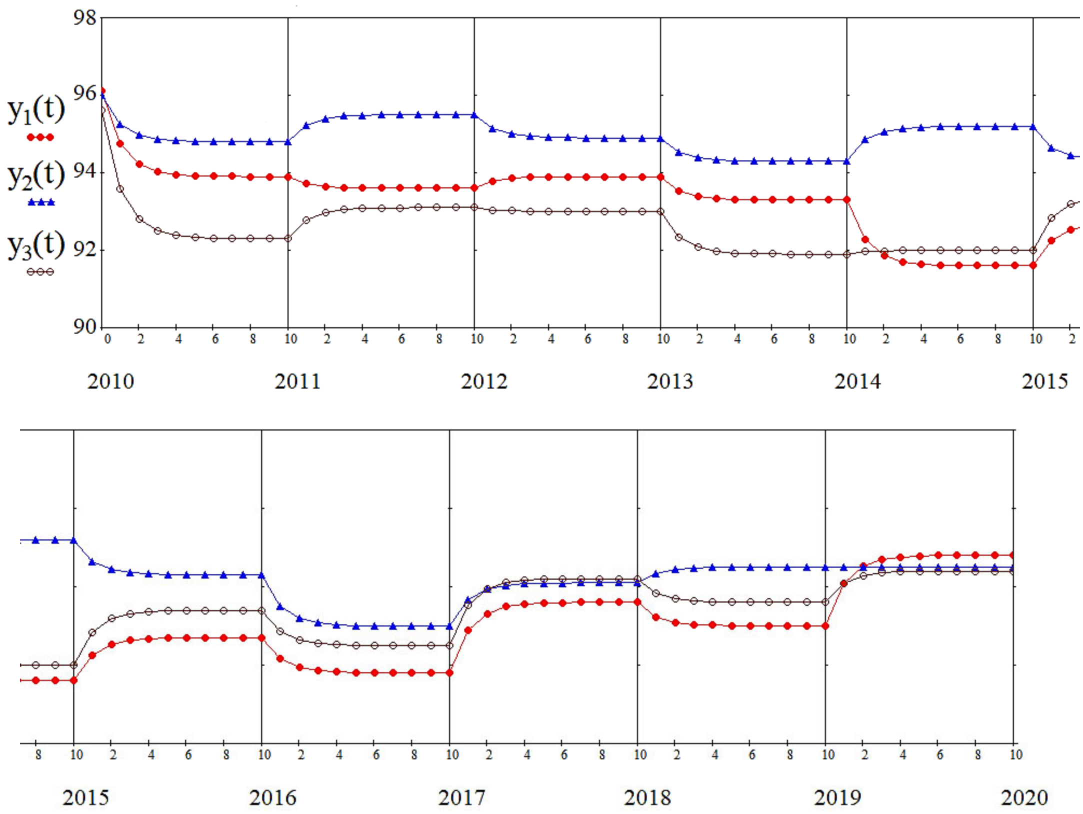

Рис. 2. Решения системы дифференциальных уравнений (1) для всех этапов рейтинга 2011-го, 2012-го…2020-го годов трех лидирующих университетов. В качестве начальных условий для каждого этапа использованы результаты предыдущего этапа (соответственно 2010-го, 2011-го, …2019-го годов)

Видно, что на каждом этапе рейтинга решение системы (1) описывает переход от результата предыдущего к результату следующего этапа рейтинга. Исходные баллы рейтингов университетов точно совпадают со значениями $y_1(t)$, $y_2(t)$ и $y_3(t)$ на вертикальных линиях рисунка. Быстрый выход на всех этапах на стационарные или близкие к ним решения системы (1) связан с относительно высоким заданным значением коэффициента роста, равный единице для всех университетов.

Заключение

Таким образом, в работе предложен подход формирования и решения уравнений популяционной динамики, представляющих собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка произвольной размерности, описывающей конкурентное взаимодействие множества университетов какого-либо мирового университетского рейтинга. Фазовыми переменными в этих уравнениях являются значения интегрального показателя этого рейтинга, который называется Overall или Total Score в зависимости от названия рейтинга. Предлагаемый подход состоит в редукции этой системы к системе независимых уравнений Ферхюльста, имеющих аналитические решения в экспонентах от времени и переходу от них к стационарным решениям, когда время стремится к бесконечности. Данный подход иллюстрирован на примере рейтинга THE для университетов, занимавших места с 1 по 10, 90–109 в 2011–2012 году и дальнейшей динамики этого рейтинга до 2020 – 2021 года.

Показано, что при таком подходе при заданном коэффициенте роста Overall (Total) Score можно находить симметричные коэффициенты межуниверситетской конкуренции для трех конкурирующих университетов. При увеличении числа конкурирующих университетов для определения всех коэффициентов потребуются дополнительные условия. Используя значения коэффициентов межуниверситетской конкуренции, найденные для первых трех университетов рейтинга THE, получены численные решения исходной системы уравнений популяционной динамики (1) на годовых интервалах времени, когда рассчитанный Overall Score на конце интервала равняется начальному Overall Score следующего интервала. Для численных расчетов (метод Рунге – Кутта) использовались средства программных математических пакетов MathCad и MatLab.

Развитие подхода, основанного на уравнениях популяционной динамики, может состоять в обращении к концепции конкурентно – кооперационных университетских взаимодействий и в разработке калибровочных процедур для решения таких нелинейных динамических систем.

Заявление о конфликте интересов

Автор(ы) заявляют, что у них нет известных конкурирующих финансовых интересов или личных отношений, которые могли бы повлиять на научные результаты, описанные в этой статье.

Источники

[1] *Неудачин И.Г., Рогович В.И.* Алгоритм оптимизации места университета в мировых рейтингах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2013. № 6. С. 23–29. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/algoritm-optimizatsii-mesta-universiteta-v-mirovyh-reytingah.

[2] *Неудачин И.Г., Рогович В.И.* Инновационная модель роста университета в глобальных рейтингах // Гаудеамус. 2013. № 2. С. 226–230. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/innovatsionnaya-model-rosta-universiteta-v-globalnyh-reytingah.

[3] *Московкин В.М., Чжан Хэ.* Методы математического моделирования в задаче прогнозирования вхождения университетов в TOP-100 глобальных университетских

рейтингов // Экономический анализ: теория и практика. 2020. Том 19, № 7. С. 1360–1384. DOI:10.24891/ea.19.7.1360.

[4] *Московкин В.М., Журавка А.В.* Пьер Франсуа Ферхюльст – забытый первооткрыватель закона логистического роста и один из основателей экономической динамики // Оригинальные Исследования. 2020. Том 10. № 7. С. 207–218. URL: http://ores.su/ru/journals/oris-jrn/2020-oris-7-2020/a230051.

[5] *Московкин В.М., Чжан Хэ.* Математические модели управления процессом продвижения университетов в TOP-N мировых университетских рейтингов // Оригинальные Исследования. 2020. Том 10, № 9. С. 129–134. URL: http://ores.su/ru/journals/oris-jrn/2020-oris-7-2020/a230051.

[6] *Яндыбаева Н.В., Кушников В.А.* Оценка качества образовательного процесса в вузе на основе модели Форрестера // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011.Т. 2. №. 1 (55). С. 176–181. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-kachestva-obrazovatelnogo-protsessa-v-vuze-na-osnove-modeli-forrestera.

[7] *Кушников В.А., Яндыбаева Н.В.* Модель Форрестера в управлении качеством образовательного процесса вуза // Прикладная информатика. 2011. №. 3 (33). С. 65–73. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/model-forrestera-v-upravlenii-kachestvom-obrazovatelnogo-protsessa-vuza.

[8] *Яндыбаева Н.В., Кушников В.А.* Математическая модель для прогнозирования аккредитационных показателей вуза // Управление большими системами. 2012. №. 40. С. 314–343. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-model-dlya-prognozirovaniya-pokazateley-akkreditatsii-vuza.

[9] *Тихонова О.М., Кушников В.А., Резчиков А.Ф., Иващенко В.А.* Разработка математической модели прогнозирования показателей аккредитации технических вузов в Российской Федерации // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. №. 2. С. 27–38. DOI: 10.24143/2072-9502-2017-2-27-38.

[10] *Tikhonova O.M., Dolinina O.N., Kushnikov O.V., Shulga T.E., Kushnikov V.A., Fominykn D.S., Rezchikov A.F., Ivashchenko V.A., Bogomolov A.S., Filimonyuk L.Y., Tverdokhlebov V.A.* Mathematical model for prediction of efficiency indicators of educational activity in high school // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2018. Т. 1015. №. 3. Pp. 1–5. DOI: 10.1088/1742-6596/1015/3/032143.

[11] *Glukhova O., Rezchikov A., Kushnikov V., Kushnikov O., Sytnik I.* Dynamic System Model for Predicting Changes in University Indicators in the World University Ranking U-Multirank // International Conference on Information Technologies. – Springer, Cham, 2019. Pp. 79-90. DOI: 10.1007/978-3-030-12072-6_8.

[12] *Генералов А.А., Рогович В.И.* Моделирование показателей Уральского федерального университета в глобальном рейтинге университетов QS // Информационные системы и технологии. 2018. №. 5. С. 22–27. URL: http://science.urfu.ru/ru/publications/моделирование-показателей-уральского-федерального-университета-в-.

References

[1] *Neudachin I.G., Rogovich V.I.* Algorithm for optimizing a university's place in world rankings. *Actual problems of humanities and science.* 2013, no. 6, pp. 23–29. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/algoritmoptimizatsii-mesta-universiteta-v-mirovyh-reytingah/viewer

[2] *Neudachin I.G., Rogovich V.I.* An innovative model of university growth in global rankings. *Gaudeamus.* 2013, no. 2, pp. 226–230. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/innovatsionnaya-model-rosta-universiteta-vglobalnyh-reytingah/viewer.

[3] *Moskovkin V.M., Zhang He.* Methods of mathematical modeling for predicting university entry into TOP-100 world university rankings. *Economic Analysis: Theory and Practice.* 2020, vol. 19, no. 7, pp. 1360–1384. DOI:10.24891/ea.19.7.1360.

[4] *Moskovkin V.M., Zhuravka A.V.* Pierre Francois Verhulst – the forgotten pioneer of the law of logistic growth and one of the creators of economic dynamics. *Original Research.* 2020, vol. 10, no. 7, pp. 207–218. Available at: http://ores.su/ru/journals/oris-jrn/2020-oris-7-2020/a230051.

[5] *Moskovkin V.M., Zhang He.* Mathematical models for managing the process of promoting universities in the TOP-N world university rankings. *Original Research.* 2020, vol. 10, no. 9, pp. 129–134. Available at: http://ores.su/ru/journals/oris-jrn/2020-oris-7-2020/a230051.

[6] *Yandybaeva N.V., Kushnikov V.A.* Evaluation of the quality of the educational process in high school on the Forrester model base. *Saratov State Technical University Bulletin.* 2011, vol. 10. no. 1(55), pp. 176–181. Available at: http://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-kachestva-obrazovatelnogo-protsessa-v-vuze-na-osnove-modeli-forrestera.

[7] *Kushnikov V., Yandybaeva N.* Applying forrester model for higher school educational process quality control. *Journal of Applied Informatics.* 2011, no. 3(33), pp. 65–73. Available at: http://cyberleninka.ru/article/n/model-forrestera-v-upravlenii-kachestvom-obrazovatelnogo-protsessa-vuza.

[8] *Yandybaeva N.V.* Mathematical model to predict higher school accreditation rates. *Large-Scale Systems Control.* 2012, no. 40, pp. 314–343. Available at: http://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-model-dlya-prognozirovaniya-pokazateley-akkreditatsii-vuza.

[9] *Tikhonova O.M., Kushnikov V.A., Rezchikov A.F., Ivashchenko V.A.* The development of the mathematical model of predicting the indicators of accreditation of technical universities in the russian federation. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Sciences and Informatics.* 2017, no. 2, pp. 27–38. DOI: 10.24143/2072-9502-2017-2-27-38.

[10] *Tikhonova O.M., Dolinina O.N., Kushnikov O.V., Shulga T.E., Kushnikov V.A., Fominykn D.S., Rezchikov A.F., Ivashchenko V.A., Bogomolov A.S., Filimonyuk L.Y., Tverdokhlebov V.A.* Mathematical model for prediction of efficiency indicators of educational activity in high school. *Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing.* 2018, vol. 1015, no. 3, pp. 1–5. DOI: 10.1088/1742-6596/1015/3/032143.

[11] *Glukhova O., Rezchikov A., Kushnikov V., Kushnikov O., Sytnik I.* Dynamic System Model for Predicting Changes in University Indicators in the World University Ranking U-Multirank. *International Conference on Information Technologies.* – Springer, Cham. 2019, pp. 79–90. DOI: 10.1007/978-3-030-12072-6_8.

[12] *Generalov A.A., Rogovich V.I.* Modeling of Ural Federal University metrics in QS world university rankings. *Information systems and technologies*, 2018, no. 5, pp. 22–27. Available at: http://science.urfu.ru/ru/publications/моделирование-показателей-уральского-федерального-университета-в-.