

УДК 537.531.3

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЕ И ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ ВЫСТУПЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

© 2019 г. В. В. Сыщенко<sup>1</sup>, \*, Э. А. Ларикова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
308015 Белгород, Россия

\*E-mail: syshch@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.12.2018 г.

После доработки 14.02.2019 г.

Принята к публикации 27.03.2019 г.

Вычислены поляризационные характеристики дифракционного излучения, возникающего при пролете равномерно движущейся нерелятивистской заряженной частицы мимо идеально проводящей сферы, а также полусферического выступа в проводящей плоскости. Использован ранее развитый авторами подход, основанный на известном из электростатики методе изображений. Показано, что в области низких частот излучение на полусфере всегда поляризовано линейно, тогда как излучение на сфере характеризуется, в общем случае, эллиптической поляризацией.

**Ключевые слова:** дифракционное излучение, проводящая сфера, полусферический выступ, метод изображений, поляризация.

**DOI:** 10.1134/S0207352819100196

### ВВЕДЕНИЕ

Равномерно движущаяся частица может породить излучение электромагнитных волн либо в однородной среде, если выполняется условие черенковского излучения, либо при взаимодействии с неоднородностями среды. В последнем случае принято разделять переходное излучение, возникающее при пересечении движущейся частицей двух сред, и дифракционное излучение, отвечающее случаю движения частицы вблизи пространственно локализованной неоднородности среды (мишени) без пересечения ее границы.

В [1–3] был развит подход к описанию переходного и дифракционного излучения нерелятивистской частицы на проводящей сфере и также на полусферическом выступе в проводящей плоскости, основанный на известном в электростатике методе изображений [4, 5], а также исследованы различные предельные случаи, допускающие построение простых асимптотических формул, описывающих спектрально-угловую плотность излучения. В настоящей работе исследуется поляризация дифракционного излучения на сфере и полусферическом выступе.

Отметим, что метод изображений на сфере был использован в [6] для описания переходного излучения, возникающего при пролете заряженной части-

цы через центр проводящей сферы, в дипольном приближении. Авторы [7] использовали этот подход для описания дифракционного излучения, возникающего при пролете заряженной частицы вблизи проводящей сферы, но тоже в дипольном приближении, что приводит к завышенному результату.

### МЕТОДИКА

В методе изображений [4, 5] влияние проводящей поверхности на распределение электрического поля в пространстве имитируется введением, наряду с реальным точечным зарядом, одного или нескольких фиктивных зарядов (“изображений” реального заряда). В частности, распределение электрического поля точечного заряда в присутствии заземленной сферы будет таким же (вне сферы), как поле двух точечных зарядов, реального и фиктивного (расположенного внутри сферы) (рис. 1а). Реальный  $e_0$  и фиктивный  $e = -e_0 R/r_0$  заряды должны располагаться на одной прямой с центром сферы радиуса  $R$ , где  $r_0$  – расстояние от реального заряда до центра сферы, а расстояние от фиктивного заряда до центра сферы составляет  $r = R^2/r_0$ . В случае полусферического выступа в проводящей плоскости граничные условия требуют введения уже трех фиктивных зарядов: по-

мимо двух зарядов, упомянутых выше (реального и фиктивного), присутствуют также их зеркальные отражения относительно плоскости (рис. 1б).

Рассмотрим ситуацию, когда реальный заряд движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $\mathbf{v}_0$  под некоторым прицельным параметром  $b$  мимо центра сферы. Очевидно, что в этом случае движение фиктивного заряда будет ускоренным, что и приведет к возникновению излучения. Спектрально-угловая плотность излучения произвольно движущегося заряда описывается известными формулами [8, 9]:

$$\left(\frac{dE}{d\omega d\Omega}\right)_{1,2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} |\mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{I}|^2, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота излученной волны,  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  – единичные векторы поляризации, ортогональные волновому вектору  $\mathbf{k}$  излученной волны и друг другу,  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме, а вектор

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)\mathbf{v}(t) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t))] dt \quad (2)$$

представляет собой фурье-образ плотности тока точечной частицы. При выводе (1) используется то обстоятельство, что фурье-компонента электрического поля излученной волны  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  пропорциональна фурье-компоненте векторного потенциала, взятого в запаздывающий момент времени, а тот, в свою очередь, пропорционален фурье-компоненте плотности тока частицы (2). Таким образом, проекция электрического поля на выбранный вектор поляризации  $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{E}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) будет пропорциональна скалярному произведению  $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{I}$ . С учетом этого поляризационный тензор [10]

$$\rho_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{E})(\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{E})^* / ((\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E})(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E})^* + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E})(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E})^*), \quad (3)$$

определяющий поляризационные характеристики излучения, можно переписать в виде:

$$\rho_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{I})(\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{I})^* / ((\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{I})(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{I})^* + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{I})(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{I})^*). \quad (4)$$

С компонентами этого тензора связаны параметры Стокса  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  [10]:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

причем  $\xi_1 = l \sin 2\alpha$ ,  $\xi_2 = A$ ,  $\xi_3 = l \cos 2\alpha$ , где  $l$  – степень максимальной линейной поляризации,  $\alpha$  – угол между направлением максимальной ли-

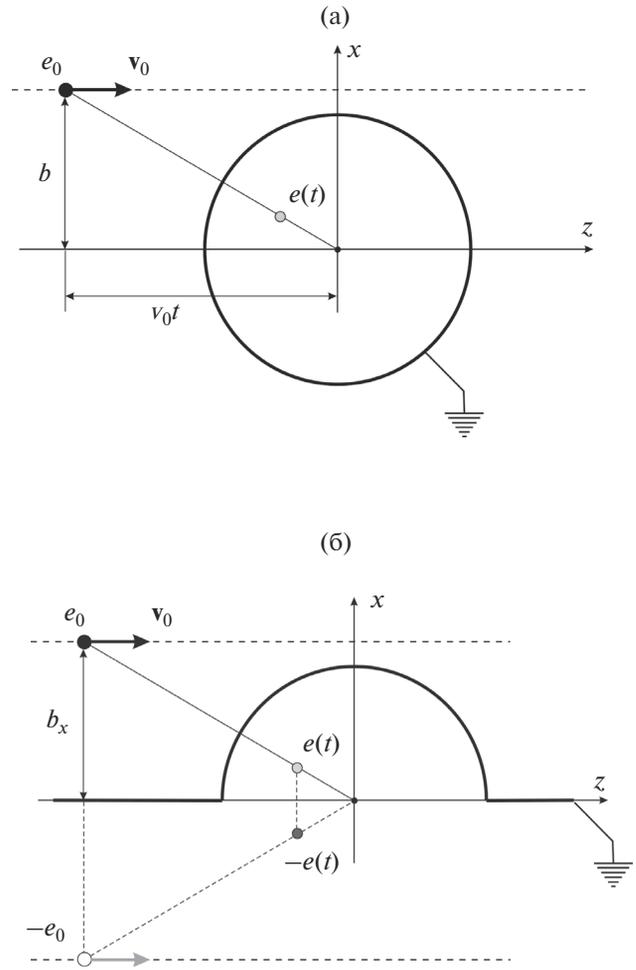


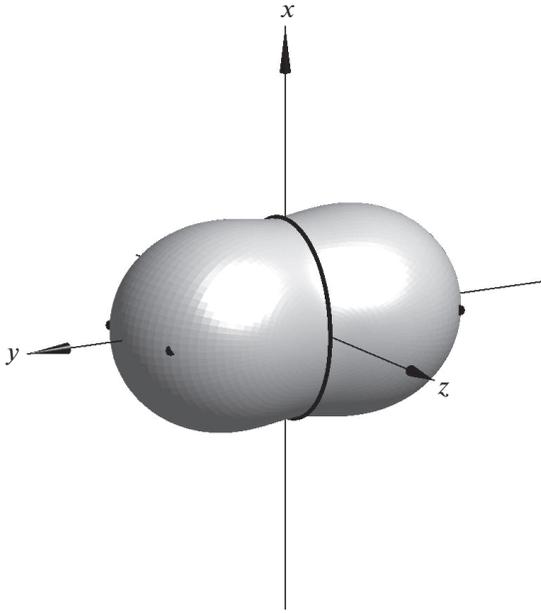
Рис. 1. Положения: а – реального заряда  $e_0$  и его “изображения”  $e$  относительно заземленной проводящей сферы радиуса  $R$ ; б – реального заряда  $e_0$  и трех фиктивных зарядов относительно полусферического выступа в проводящей плоскости.

нейной поляризации и вектором  $\mathbf{e}_1$ ,  $A$  – степень циркулярной поляризации.

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим сначала излучение на сфере. Выберем начало координат в центре сферы, ось  $z$  – в направлении скорости налетающей частицы  $\mathbf{v}_0$ , ось  $x$  – в плоскости, содержащей траекторию налетающей частицы (рис. 1а). Поскольку единственным выделенным направлением в данной задаче является направление скорости  $\mathbf{v}_0$ , векторы поляризации удобно выбрать в виде:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{v}_0}{|\mathbf{k} \times \mathbf{v}_0|} = \mathbf{e}_x \sin \varphi - \mathbf{e}_y \cos \varphi, \quad (6)$$



**Рис. 2.** Диаграмма направленности излучения на сфере частицы, движущейся со скоростью  $v_0 = 0.1c$  при  $R\omega/v_0 = 2$  согласно (3), (9), (10). Линией в плоскости  $(x, z)$  отмечены направления 100% линейной поляризации, точками в плоскости  $(y, z)$  – направления 100% циркулярной поляризации.

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1}{k} = \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{e}_z \sin \theta. \quad (7)$$

Поскольку траектория фиктивного заряда лежит в плоскости  $(x, z)$ , отличными от нуля будут только компоненты вектора  $I_x$  и  $I_z$ . Как было показано в [1, 2], в пределе малых частот излучения (на которые приходится максимум интенсивности дифракционного излучения нерелятивистской частицы):

$$\omega \ll cb/R^2 \quad (8)$$

или, в терминах длины волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$ ,

$$\lambda \gg 2\pi R/b.$$

Интеграл (2) вычисляется аналитически:

$$I_x = i \frac{4}{3} e_0 R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right), \quad (9)$$

$$I_z = -\frac{4}{3} e_0 R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) - \frac{2}{3} e_0 R^3 \frac{\omega}{v_0 b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right), \quad (10)$$

где  $K_0(x)$  и  $K_1(x)$  – модифицированные функции Бесселя третьего рода (функции Макдональда). В этом пределе величина  $I_x$  оказывается чисто мнимой, а  $I_z$  – вещественной. С учетом этого получаем следующие выражения для параметров Стокса:

$$\xi_1 = \frac{2 \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2}{\left( \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \right) \left( K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2 + \sin^2 \theta \left( K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) + \frac{v_0}{2\omega b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2}, \quad (11)$$

$$\xi_2 = \frac{-2 \sin \theta \sin \varphi K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \left( K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) + \frac{v_0}{2\omega b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)}{\left( \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \right) \left( K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2 + \sin^2 \theta \left( K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) + \frac{v_0}{2\omega b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2}, \quad (12)$$

$$\xi_3 = \frac{\left( \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \right) \left( K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2 - \sin^2 \theta \left( K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) + \frac{v_0}{2\omega b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2}{\left( \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \right) \left( K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2 + \sin^2 \theta \left( K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) + \frac{v_0}{2\omega b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right)^2}. \quad (13)$$

Легко проверить, что  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ , т.е. излучение полностью поляризовано, в общем случае эллиптически. Точки, в которых достигается полная циркулярная поляризация и полная линейная поляризация, отмечены на диаграмме направленности излучения на рис. 2. Степени

циркулярной поляризации излучения  $A = \xi_2$  и линейной поляризации  $l = (\xi_1^2 + \xi_3^2)^{1/2}$  в различных направлениях иллюстрирует рис. 3.

Обратимся теперь к случаю излучения на полусферическом выступе в проводящей плоско-

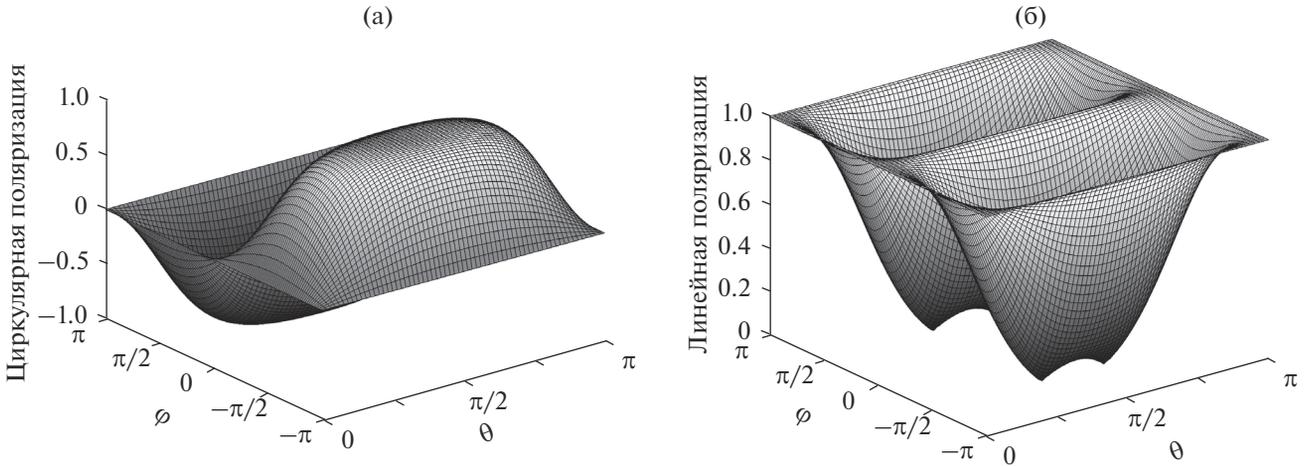


Рис. 3. Степень циркулярной (а) и линейной поляризации (б) в различных направлениях в условиях рис. 2.

сти. В этом случае двигаться с ускорением и, как следствие, вносить вклад в интеграл (2) будут два фиктивных заряда из трех (рис. 1б). Как показано в [3], даже в случае пролета частицы не над вершиной сферы (т.е. при ненулевой компоненте  $b_y$  двумерного прицельного параметра) в пределе малых частот (8) отлична от нуля будет только величина  $I_x$ :

$$I_x = i \frac{8}{3} e_0 R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \frac{b_x^2}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \right), \quad (14)$$

что приведет к симметричному относительно оси  $x$  распределению интенсивности (рис. 4). Излучение будет линейно поляризованным, причем параметры Стокса будут зависеть исключительно от направления излучения:

$$\xi_1 = \frac{2 \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}, \quad (15)$$

$$\xi_2 = 0, \quad (16)$$



Рис. 4. Диаграмма направленности излучения на полусфере частицы, движущейся со скоростью  $v_0 = 0.1c$  при  $R\omega/v_0 = 2$  согласно (3), (14).

$$\xi_3 = \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}. \quad (17)$$

Направление поляризации излучения иллюстрирует рис. 5. Нетрудно убедиться, что излучение всегда будет поляризовано в плоскости, содержащей волновой вектор излученной волны  $\mathbf{k}$  и ось  $x$ , вдоль которой направлен вектор  $\mathbf{I}$ . Для этого достаточно выбрать вместо (6), (7) векторы поляризации в виде:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_x}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_x|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1}{k}. \quad (18)$$

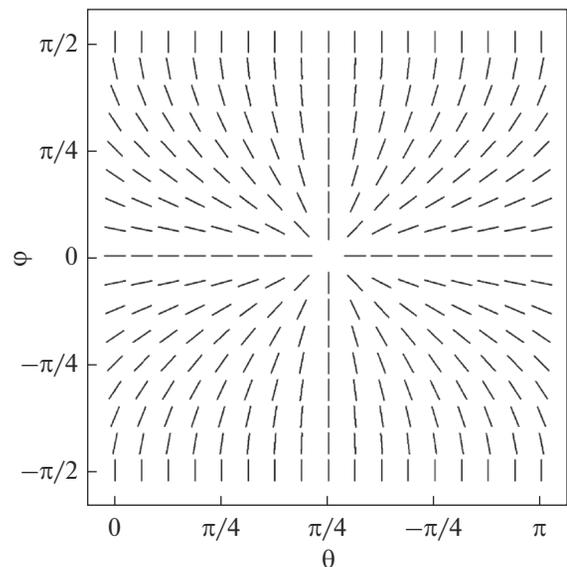


Рис. 5. Ориентация плоскости поляризации излучения на полусфере в различных направлениях в условиях рис. 4.

Для такого выбора параметры Стокса будут равны:  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ,  $\xi_3 = -1$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены формулы, описывающие поляризацию дифракционного излучения нерелятивистской заряженной частицы на идеально проводящих мишенях: сфере и полусферическом выступе в проводящей плоскости. Установлено, что в первом случае излучение поляризовано (в общем случае эллиптически). В частности же, излучение, направленное в плоскости, содержащей центр сферы и траекторию налетающей частицы, будет поляризовано линейно и именно в этой плоскости. В случае направления излучения, перпендикулярного этой плоскости и близкого к нему (в весьма широких пределах), поляризация излучения будет близка к циркулярной – правой либо левой, в зависимости от знака величины (12): правой при  $y < 0$  и левой при  $y > 0$ . Это создает принципиальную возможность для мониторинга траектории пролетающей частицы. Действительно, пусть теперь в плоскости  $(x, z)$  лежат центр сферы и детектор излучения (под углом  $\theta > 0$ ), чувствительный к поляризации. Тогда, если траектория частицы лежит в той же плоскости, детектор будет регистрировать линейную поляризацию, а если проходит параллельно плоскости

справа или слева – то циркулярную поляризацию соответствующего знака. Напротив, в случае излучения на полусфере такой детектор не обнаружит отличия  $b_y$  от нуля.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shul'ga N.F., Syshchenko V.V., Larikova E.A.* // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B. 2017. V. 402. P. 167. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2017.03.013>
2. *Сыщенко В.В., Ларикова Э.А.* // Поверхность. 2018. В печати.
3. *Syshchenko V.V., Larikova E.A., Gladkih Yu.P.* // J. Instrum. 2017. V. 12. P. C12057. <https://doi.org/10.1088/1748-0221/12/12/C12057>
4. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, Физматлит, 1992. 664 с.
6. *Аскарьян Г.А.* // ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 388.
7. *Аматуни А.Ц., Оганесян А.Н.* // Изв. Акад. Арм. ССР. 1961. Т. XIV. № 5. С. 99.
8. *Базылев В.А., Жеваго Н.К.* Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. М.: Наука, 1987. 272 с.
9. *Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф.* Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: Наука, Физматлит, 1993. 344 с.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, Физматлит, 1988. 512 с.

## Polarization of Diffraction Radiation on a Conducting Sphere and Hemispheric Bulge in a Conducting Plane

V. V. Syshchenko, E. A. Larikova

Polarization characteristics of the diffraction radiation generated during the uniform motion of the nonrelativistic charged particle near the perfectly conducting sphere as well as hemispherical bulge on the conducting plane are calculated. A previously developed approach based on the method of images, known from electrostatics is used. It is shown that in the low-frequency region, the radiation on the hemisphere is linearly polarized while the radiation on the sphere, in general case, is polarized elliptically.

**Keywords:** diffraction radiation, conducting sphere, hemispherical bulge, method of images, polarization.