Ю. П. Вирченко, А. В. Субботин, Ковариантные дифференциальные операторы первого порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 187, 19–30

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-187-19-30

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 19–30
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-19-30

УДК 517.956

КОВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2020 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. В. СУББОТИН**

Аннотация. Дается внутреннее описание класса всех нелинейных дифференциальных операторов первого порядка на пространстве наборов, состоящих из непрерывно дифференцируемых векторных и скалярных полей на $\mathbb{R}^3$. Операторы этого класса инвариантны относительно сдвигов $\mathbb{R}^3$ и преобразуются ковариантным образом при вращениях $\mathbb{R}^3$.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, дивергентный дифференциальный оператор, векторное поле, псевдовекторное поле, ковариантность.

FIRST-ORDER COVARIANT DIFFERENTIAL OPERATORS

© 2020 **YU. P. VIRCHENKO, A. V. SUBBOTIN**

Abstract. An internal description of the class of all nonlinear differential operators of the first order on the space of collections consisting of continuously differentiable vector and scalar fields on $\mathbb{R}^3$ is given. Operators of this class are invariant with respect to translations of $\mathbb{R}^3$ and are transformed by the covariant way under rotations of $\mathbb{R}^3$.

Keywords and phrases: first-order differential operator, divergence differential operator, vector field, pseudo-vector field, covariance.

AMS Subject Classification: 35F50

1. Введение. В теоретической физике при решении задач, которые формулируются в терминах дифференциальных уравнений в частных производных, ключевым вопросом является задача конструирования адекватных эволюционных уравнений на основе физически оправданных положений. Решение таких задач, в конечном счете, основано на описании классов уравнений, удовлетворяющих поставленным физическим условиям. При наличии внутреннего описания каждого из таких классов, физик получает возможность выбора подходящего уравнения для решения конкретных задач посредством постановки экспериментов и сравнения полученных результатов с предсказаниями, полученными в результате решения математических задач, которые моделируют физическую ситуацию. Именно таким образом решались физические проблемы и развивалась связанная с их решением математическая физика. Именно на этом пути в математической физике возникли: уравнение теплопроводности, система уравнений гидродинамики ньютоновских жидкостей, система уравнений Максвелла и т.д., которые представляются в настоящее время в достаточной степени обоснованными с физической точки зрения.

Настоящая работа посвящена проблеме конструирования подходящих эволюционных дифференциальных уравнений, предназначенных для описания динамики конденсированных сред в терминах полей на $\mathbb{R}^3$. Конкретно, в работе предлагается описание определенного класса эволюционных подходящих уравнений в частных производных первого порядка по пространственным координатам. Таковыми являются уравнения математической физики, при конструировании которых пренебрегают физическими механизмами энергетической диссипации. В ситуации, когда среда не подвергается внешним воздействиям, как стационарным, так и нестационарным, коэффициенты таких уравнений не зависят явным образом ни от времени, ни от пространственных переменных. Кроме того, такие уравнения обладают свойством независимости их вида от конкретной системы координат, в которой описываются физические поля. Математически это выражается в виде их свойства ковариантности при действии преобразований группы $\mathcal{O}_3$. Такие уравнения мы будем называть *изотропными.*

Требование ковариантности приводит к тому, что поля на $\mathbb{R}^3$ при действии преобразований группы $\mathcal{O}_3$ должны преобразовываться по представлениям этой группы (см., например, [9]), и, точно так же, по представлениям этой группы должны преобразовываться коэффициенты дифференциальных операторов, определяющих уравнение. Эти требования накладывают довольно значительные ограничения на общий вид эволюционных дифференциальных уравнений.

Проблеме создания общего метода конструирования такого сорта уравнений посвящено множество работ математической физики (см., например, [1–7, 13–17, 20]). Подавляющее их большинство основано на модификациях традиционных в теоретической физике формализмов Лагранжа или Гамильтона. Однако, по-видимому, такие подходы не являются адекватными при построении эволюционных уравнений для описания конденсированных сред, обладающих внутренними степенями свободы. По этой причине возникает вопрос о более общем подходе к конструированию уравнений неравновесной термодинамики. В связи с этим, в настоящей работе предлагается решение задачи об описании класса любых систем динамических уравнений первого порядка по пространственным координатам, изотропных в указанном выше смысле, для векторных и скалярных полей на $\mathbb{R}^3$.

2. Ковариантные системы уравнений. Рассмотрим линейное многообразие наборов $\mathsf{Y}(\boldsymbol{x},t) = \langle Y_a(\boldsymbol{x},t);\ a = 1,\ldots,N\rangle$ функций на $\mathbb{R}^3$ со значениями в $\mathbb{R}$, т.е. функций Y: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^N$. Кроме того, будем считать, что функции, составляющие каждый из наборов, зависят от параметра $t \in \mathbb{R}_+$, которому будем приписывать физический смысл времени.

Далее, будем предполагать, что функции $Y_a(\boldsymbol{x},t)$, $a = 1,\ldots,N$, дифференцируемы по $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и по $t \in \mathbb{R}_+$. Это означает, что рассматриваемое нами многообразие является линейным топологическим пространством $[C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$ со счетно-нормированной топологией. В рамках этого пространства имеется возможность изучать решения дифференциальных уравнений первого порядка, которым удовлетворяют элементы $\mathsf{Y}(\boldsymbol{x},t)$ этого пространства. Нашей целью является описание многообразия всех допустимых систем эволюционных уравнений на пространстве $[C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$, имеющих следующий вид:

$$\dot{\mathsf{Y}}(\boldsymbol{x},t) = \big(\mathsf{L}[\mathsf{Y}]\big)(\boldsymbol{x},t) \tag{2.1}$$

и удовлетворяющих формулируемому ниже условию ковариантности. Здесь точка обозначает дифференцирование по t и L: $[C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N \mapsto [C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^N$ — дифференциальный оператор первого порядка по компонентам вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, в общем случае нелинейный. Он определяется формулой

$$(\mathsf{L}[\mathsf{Y}])(\boldsymbol{x},t) = \big(\mathcal{A}_k(\mathsf{Y})\nabla_k\mathsf{Y} + \mathsf{H}(\mathsf{Y})\big)(\boldsymbol{x},t). \tag{2.2}$$

Здесь и далее ∇_k, $k = 1,2,3,$ — дифференциальная операция градиента в $\mathbb{R}^3$, а $\mathcal{A}_k(\mathsf{Y})$, $k = 1,2,3,$ — тройка матриц-функций от $\mathsf{Y} \in \mathbb{R}^N$ со значениями в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Они не зависят от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и t и при каждом фиксированном $\mathsf{Y} \in \mathbb{R}^N$ и $k = 1,2,3$ матрица $\mathcal{A}_k(\mathsf{Y})$ действует на набор

$$\nabla_k\mathsf{Y}(\boldsymbol{x},t) = \Big\langle \nabla_k Y_a(\boldsymbol{x},t);\ a = 1,\ldots,N\Big\rangle.$$

Набор $\mathsf{H}(\mathsf{Y}) = \langle H_a(\mathsf{Y}); a = 1,\ldots,N\rangle$ состоит из непрерывных функций на $\mathbb{R}^N$, которые не зависят явно ни от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, ни от t. Кроме того, здесь и далее принимается алгебраическое соглашение о суммировании по двукратно повторяющимся векторным индексам. В данном случае осуществляется суммирование по $k = 1,2,3$. Линейное многообразие всех таких операторов обозначим посредством $\mathfrak{K}_1$. Заметим также, что употребленный выше термин *системы эволюционных уравнений* указывает только лишь на то, что эти системы имеют вид (2.1), и он не несет какого-либо физического смысла.

Предположим теперь, что линейное пространство наборов Y преобразуется по, вообще говоря, приводимому представлению группы $\mathcal{O}_3$ или ее подгруппы $\mathcal{O}_{3,+}$ непрерывных вращений пространства $\mathbb{R}^3$ (см., например, [9]). Далее в этой работе мы будем рассматривать только случай, когда пространство $\mathbb{R}^N$ наборов Y представляется в виде прямой суммы линейных пространств, каждое из которых преобразуется по неприводимому векторному представлению по отношению к непрерывным вращениям $\mathbb{R}^3$, в частности, псевдовекторному, либо является одномерным пространством скаляров, которое мы рассматриваем как преобразующееся по тривиальному представлению. При таком разложении каждый из наборов Y представляется в виде пары $\mathbf{Y} = \langle \mathsf{W}, \mathsf{Z}\rangle$, где набор $\mathsf{W} = \langle Y_a; a = 1, \ldots, 3n\rangle$ состоит только из компонент векторных представлений, число которых полагается равным n, так что W представляется в виде набора $\langle \boldsymbol{W}^{(a)}; a = 1, \ldots, n\rangle$, компоненты которого являются векторами (псевдовекторами). Набор

$$\mathsf{Z} = \left\langle Z^{(a)};\ a = 1, \ldots, r\right\rangle = \left\langle Y_a;\ a = 3n+1, \ldots, N\right\rangle, \quad Z^{(a)} = Y_{a-2n}$$

состоит из $r = N - 3n$ скаляров.

Компоненты наборов $\mathsf{Y}(\boldsymbol{x}, t)$ функций распределяются так, чтобы их значения были согласованы с указанным расщеплением наборов $\mathsf{Y} \in \mathbb{R}^N$. В результате, они представляются в виде $\mathsf{Y}(\boldsymbol{x}, t) = \langle \mathsf{W}(\boldsymbol{x}, t), \mathsf{Z}(\boldsymbol{x}, t)\rangle$.

Уравнение (2.1) с оператором $\mathsf{L}[\mathsf{Y}]$ вида (2.2), при таком расщеплении набора Y, записывается в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathsf{W}}(\boldsymbol{x}, t) &= \big(\mathcal{A}_k^{(w)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\nabla_k \mathsf{W} + \mathcal{A}_k^{(wz)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\nabla_k \mathsf{Z} + \mathsf{F}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\big)(\boldsymbol{x}, t), \\ \dot{\mathsf{Z}}(\boldsymbol{x}, t) &= \big(\mathcal{A}_k^{(zw)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\nabla_k \mathsf{W} + \mathcal{A}_k^{(z)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\nabla_k \mathsf{Z} + \mathsf{G}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\big)(\boldsymbol{x}, t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где введено разложение $\mathsf{H}(\mathsf{Y}) = \langle \mathsf{F}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}), \mathsf{G}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})\rangle$, соответствующие разложению пространства $\mathbb{R}^N$, и соответствующим образом распределены на блоки $\mathcal{A}_k^{(w)}$, $\mathcal{A}_k^{(wz)}$, $\mathcal{A}_k^{(zw)}$, $\mathcal{A}_k^{(z)}$ с размерами $n \times n$, $n \times r$, $r \times r$, $r \times n$, соответственно, значения матриц-функций $\mathcal{A}_k(\mathsf{Y})$:

$$\mathcal{A}_k(\mathsf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_k^{(w)}(\mathsf{Y}) & \mathcal{A}_k^{(wz)}(\mathsf{Y}) \\ \mathcal{A}_k^{(zw)}(\mathsf{Y}) & \mathcal{A}_k^{(z)}(\mathsf{Y}) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Так как каждая компонента набора $\nabla_k \mathsf{W}(\boldsymbol{x}, t)$, на который действуют матрицы $\mathcal{A}_k^{(w)}$, $k = 1, 2, 3$, представляет собой вектор в $\mathbb{R}^3$, каждый элемент $(\mathcal{A}_k^{(w)})_{a,b}$, $a, b = 1, \ldots, n$ этой матрицы есть некоторая (3×3)-матрица, $((\mathcal{A}_k^{(w)})_{a,b})_{jl} \equiv T_{jkl}^{(a,b)}$, $j, l = 1, 2, 3$. По этой же причине каждый элемент матриц $\mathcal{A}_k^{(wz)}$, $\mathcal{A}_k^{(zw)}$ представляется трехмерным вектором. В связи с этим для любого $k = 1, 2, 3$ каждый элемент $(\mathcal{A}_k^{(wz)})_{a,b}$, $a = 1, \ldots, n$, $b = n+1, \ldots, n+r$, и каждый элемент $(\mathcal{A}_k^{(zw)})_{a,b}$, $a = n+1, \ldots, r$, $b = 1, \ldots, n$, представляет собой некоторый вектор. Введем обозначения

$$\big((\mathcal{A}_k^{(wz)})_{a,b}\big)_j \equiv T_{jk}^{(a,b)}, \quad j = 1, 2, 3; \qquad \big((\mathcal{A}_k^{(zw)})_{a,b}\big)_l \equiv \tilde{T}_{kl}^{(a,b)}, \quad l = 1, 2, 3,$$

для соответствующих значений a и b. Наконец, для любого фиксированного $k = 1, 2, 3$ матричные элементы $(\mathcal{A}_k^{(w)})_{a,b} \equiv T_k^{(a,b)}$, $a, b = n+1, \ldots, n+r$, представляются числами из $\mathbb{R}$. При этом мы опустили указание зависимостей матричных элементов от наборов W и Z. В терминах этих матричных элементов, восстанавливая указание зависимости введенных матричных элементов от наборов W и Z, можем записать систему уравнений (2.3) в виде

$$\begin{aligned}
\dot W_j^{(a)}(\boldsymbol{x},t) &= \left(\sum_{b=1}^{n} T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\nabla_k W_l^{(b)} + \sum_{b=n+1}^{n+r} T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\nabla_k Z^{(b)} + F_j^{(a)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\right)(\boldsymbol{x},t),\\
\dot Z^{(a)}(\boldsymbol{x},t) &= \left(\sum_{b=1}^{n} \tilde T_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\nabla_k W_l^{(b)} + \sum_{b=n+1}^{n+r} T_{k}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\nabla_k Z^{(b)} + G^{(a)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\right)(\boldsymbol{x},t),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

соответственно, для $a = 1,\dots,n$ и $a = n+1,\dots,n+r$, где в первом уравнении, соответствующем номерам $a = 1,\dots,n$, мы использовали покомпонентную запись трехмерных векторов для значений векторных полей $\boldsymbol{W}^{(a)}(\boldsymbol{x},t) = \langle W_j^{(a)},\ j = 1,2,3\rangle$.

Для определения понятия ковариантности систем уравнений типа (2.5) дополнительно распределим компоненты набора векторов W на два типа так, что компоненты $\boldsymbol{W}^{(a)}$ с номерами $a = 1,\dots,p$ преобразуются как векторы по отношению к преобразованиям из группы $\mathcal{O}_3$, а компоненты с номерами $a = p+1,\dots,p+q = n$ преобразуются как векторы только по отношению к непрерывным вращениям пространства $\mathbb{R}^3$ и остаются неизменными при дискретных преобразованиях группы $\mathcal{O}_3$, т.е. являются псевдовекторами. Распределим, в соответствии с таким расщеплением, компоненты векторных полей из набора $\mathsf{W}(\boldsymbol{x},t)$ так, что значения полей $\boldsymbol{W}^{(a)}(\boldsymbol{x},t)$, $a = 1,\dots,p$, преобразуются как векторы, а значения полей $\boldsymbol{W}^{(a)}(\boldsymbol{x},t)$, $a = p+1,\dots,p+q$, преобразуются как псевдовекторы.

Определение 2.1. Тензор-функцию $T_{j_1\dots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ со значениями на пространстве тензоров (псевдотензоров) ранга $l \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ назовем ковариантной[1] по отношению к преобразованиям группы $\mathcal{O}_3$ (группы $\mathcal{O}_{3,+}$), если для любой ортогональной матрицы $\mathcal{Q}$ этой группы имеет место соотношение

$$\mathcal{Q}_{j_1k_1}\dots\mathcal{Q}_{j_lk_l}T_{k_1\dots k_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = T_{j_1\dots j_l}(\mathcal{Q}\mathsf{W},\mathsf{Z}). \tag{2.6}$$

Если функция принимает псевдотензорные значения, то для любой матрицы $\mathcal{Q}$, представляющей полное отражение $\mathbb{R}^3$, выполняется соотношение

$$\mathcal{Q}_{j_1k_1}\dots\mathcal{Q}_{j_lk_l}T_{k_1\dots k_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = (-1)^{l-1}T_{j_1\dots j_l}(\mathcal{Q}\mathsf{W},\mathsf{Z}). \tag{2.7}$$

При $l = 0$ такая функция называется скалярной (псевдоскалярной).

Определение 2.2. Систему уравнений (2.5) назовем ковариантной по отношению к преобразованиям группы $\mathcal{O}_3$, если для любых наборов W и Z коэффициенты системы $F_j^{(a)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T_k^{(a,b)}$, $T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ представляют собой ковариантные функции, соответственно, с $l = 1,2,3$ и являются:

(1) $T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ — тензорами третьего ранга по индексам j, k, l, если $a,b = 1,\dots,p$ и $a,b = p+1,\dots,p+q$, и псевдотензорами третьего ранга, если $a = 1,\dots,p$, $b = p+1,\dots,p+q$, либо $a = p+1,\dots,p+q$, $b = 1,\dots,p$;

(2) $T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ — тензорами второго ранга по индексам j, k при $a = 1,\dots,p$ и псевдотензорами второго ранга при $a = p+1,\dots,n$, $b = n+1,\dots,n+r$;

(3) $\tilde T_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ с $a = n+1,\dots,n+r$ — тензорами второго ранга по k, l при $b = 1,\dots,p$ и псевдотензорами второго ранга при $b = p+1,\dots,n$;

(4) $T_k^{(a,b)}$ — векторами с компонентами $k = 1,2,3$ при $a,b = n+1,\dots,n+r$;

(5) $F_j^{(a)}$ — векторами компонентами $j = 1,2,3$ при $a = 1,\dots,p$ и псевдовекторами при $a = p+1,\dots,n$;

(6) $G^{(a)}$, $a = n+1,\dots,n+r$, являются скалярными функциями.

[1] В монографиях [8, 12] ковариантные функции называются комитантами. По поводу используемой терминологии тензорного анализа см., например, [18]. В работе мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными тензорами.

Как уже было сказано выше, в следующих разделах будет дано описание линейного многообразия операторов вида (2.2), ковариантных при преобразованиях группы $\mathcal{O}_3$. Из приведенного выше определения следует, что решение такой задачи сводится к описанию линейных многообразий каждой из ковариантных функций, которые представляют коэффициенты системы (2.5), т.е. линейных многообразий непрерывных (псевдо)тензор-функций $T^{(a,b)}_{jkl}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T^{(a,b)}_{jk}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T^{(a,b)}_{kl}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ и вектор-функций $T^{(a,b)}_{k}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$.

3. Ковариантные тензор-функции. В этом разделе предлагается подход к описанию любых ковариантных тензор-функций на $\mathbb{R}^3$ и, в частности, тензор-функций $T^{(a,b)}_{jkl}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T^{(a,b)}_{jk}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $T^{(a,b)}_{kl}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ и вектор-функций $T^{(a,b)}_{k}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$, $F^{(a)}_{k}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$. Для простоты, мы ограничиваемся только случаем, когда эти функции представляются полиномами от компоненты векторов наборов W. При этом мы не будем интересоваться характером зависимости этих функций от компоненты набора Z.

Определение 3.1. Ковариантную (псевдо)тензор-функцию $T_{j_1\dots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ ранга l назовем полиномиальной на $\mathbb{R}^N$, если она определяется формулой

$$T_{j_1\dots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} A^{(a_1,\dots,a_d)}_{j_1\dots j_l k_1\dots k_d}(\mathsf{Z}) W^{(a_1)}_{k_1}\dots W^{(a_d)}_{k_d}. \tag{3.1}$$

Введем теперь в рассмотрение инвариантные тензоры (псевдотензоры) на $\mathbb{R}^3$.

Определение 3.2. Тензор (псевдотензор) $A^{(a_1,\dots,a_d)}_{j_1,\dots,j_m}$ ранга $m \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется инвариантным относительно преобразований группы $\mathcal{O}_3$ (группы $\mathcal{O}_{3,+}$), если для любой ортогональной матрицы из этой группы имеет место

$$\mathcal{Q}_{j_1k_1}\dots\mathcal{Q}_{j_mk_m} A^{(a_1,\dots,a_d)}_{k_1,\dots,k_m} = A^{(a_1,\dots,a_d)}_{j_1,\dots,j_m}\,. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть $T_{j_1\dots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ — ковариантная полиномиальная (псевдо)тензор-функция ранга l. Тогда ее коэффициенты в формуле* (3.1) *являются инвариантными (псевдо)тензорами при каждом фиксированном Z.*

Доказательство. На основании (3.1), используя ортогональность матрицы $\mathcal{Q}$, с одной стороны, получаем, что

$$\mathcal{Q}_{i_1j_1}\dots\mathcal{Q}_{i_lj_l} T_{j_1\dots j_l}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} \mathcal{Q}_{i_1j_1}\dots\mathcal{Q}_{i_lj_l} A^{(a_1,\dots,a_d)}_{j_1\dots j_l k_1\dots k_d}(\mathsf{Z}) W^{(a_1)}_{k_1}\dots W^{(a_d)}_{k_d} =$$

$$= \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} \mathcal{Q}_{i_1j_1}\dots\mathcal{Q}_{i_lj_l} (\mathcal{Q}_{s_1k_1}\mathcal{Q}_{s_1m_1})\dots(\mathcal{Q}_{s_dk_d}\mathcal{Q}_{s_dm_d}) A^{(a_1,\dots,a_d)}_{j_1\dots j_l k_1\dots k_d}(\mathsf{Z}) W^{(a_1)}_{m_1}\dots W^{(a_d)}_{m_d} =$$

$$= \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} \mathcal{Q}_{i_1j_1}\dots\mathcal{Q}_{i_lj_l} \mathcal{Q}_{s_1k_1}\dots\mathcal{Q}_{s_dk_d} A^{(a_1,\dots,a_d)}_{j_1\dots j_l k_1\dots k_d}(\mathsf{Z}) (\mathcal{Q}_{s_1m_1}W^{(a_1)}_{m_1})\dots(\mathcal{Q}_{s_dm_d}W^{(a_d)}_{m_d}),$$

а, с другой стороны,

$$T_{i_1\dots i_l}(\mathcal{Q}\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\dots,a_d\rangle \in I_n^d} A^{(a_1,\dots,a_d)}_{i_1\dots i_l s_1\dots s_d}(\mathsf{Z}) (\mathcal{Q}_{s_1m_1}W^{(a_1)}_{m_1})\dots(\mathcal{Q}_{s_dm_d}W^{(a_d)}_{m_d})\,.$$

Подставляя эти разложения в (2.6) и сравнивая обе их части, пользуясь произвольностью выбора векторов (псевдовекторов) $\boldsymbol{W}^{(a)}$, $a = 1,\dots,n$, составляющих набор W, находим

$$\mathcal{Q}_{i_1j_1}\dots\mathcal{Q}_{i_lj_l} \mathcal{Q}_{s_1k_1}\dots\mathcal{Q}_{s_dk_d} A^{(a_1,\dots,a_d)}_{j_1\dots j_l k_1\dots k_d}(\mathsf{Z}) = A^{(a_1,\dots,a_d)}_{i_1\dots i_l s_1\dots s_d}(\mathsf{Z}). \qquad \square$$

Ввиду доказанного утверждения, для решения поставленной задачи описания ковариантных функций необходимо установить общую структуру инвариантных тензоров. Множество всех инвариантных тензоров в $\mathbb{R}^3$ описывается следующим утверждением.

Теорема 3.1 (см., например, [9, с. 198]). *Каждый инвариантный относительно преобразований группы $\mathcal{O}_3$ и, в частности, относительно преобразований группы $\mathcal{O}_{3,+}$, тензор $A_{j_1,\dots,j_n}$ четного ранга n принадлежит линейной оболочке тензоров $\delta_{j_{k_1}j_{k_2}}\dots\delta_{j_{k_{n-1}}j_{k_n}}$, а каждый инвариантный относительно преобразований группы $\mathcal{O}_{3,+}$ тензор $A_{j_1,\dots,j_n}$ нечетного ранга n принадлежит линейной оболочке тензоров $\varepsilon_{j_{k_1}j_{k_2}j_{k_3}}\delta_{j_{k_4}j_{k_5}}\dots\delta_{j_{k_{n-1}}j_{k_n}}$, где ε_{jkl} — символ Леви-Чивита (полностью антисимметричный псевдотензор третьего ранга), где $\langle k_1,\dots,k_n\rangle$ — перестановки множества $I_n=\{1,\dots,n\}$. Не существует инвариантных относительно преобразований полной группы $\mathcal{O}_3$ псевдотензоров четного ранга и тензоров нечетного ранга.*

Опишем базисы в каждой из указанных линейных оболочек. Пусть n — четное натуральное число. Будем обозначать посредством $\mathfrak{c}$ каждый из наборов $\{k_i,k_{i+1}\}$, $i\in\{1,3,\dots,n-1\}$, составленных из непересекающихся пар номеров $k_j\in I_n$, $j=1,\dots,n$, которые будем называть *попарными разбиениями* I_n. Семейство всех попарных разбиений множества I_n обозначим как $\mathfrak{C}(I_n)$. На основе теоремы 3.1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Совокупность тензоров вида*

$$A^{(+)}_{j_1\dots j_n}(\mathfrak{c})=\prod_{\{p,q\}\in\mathfrak{c}}\delta_{j_pj_q},\quad \mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n),$$

составляет базис в линейном многообразии инвариантных относительно группы $\mathcal{O}_3$ тензоров четного ранга, а совокупность псевдотензоров

$$A^{(-)}_{j_1\dots j_n}(\mathfrak{c};l_1,l_2,l_3)=\varepsilon_{j_{l_1},j_{l_2},j_{l_3}}\prod_{\{p,q\}\in\mathfrak{c}}\delta_{j_pj_q},\quad \mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{l_1,l_2,l_3\}),\quad \{l_1,l_2,l_3\}\subset I_n,$$

где l_1,l_2,l_3 выбраны упорядоченными по возрастанию, составляет базис в линейном многообразии инвариантных относительно группы $\mathcal{O}_{3,+}$ псевдотензоров нечетного ранга так, что любой инвариантный относительно группы $\mathcal{O}_{3,+}$ (псевдо)тензор $A_{j_1,\dots,j_n}$ представляется в виде

$$A_{j_1,\dots,j_n}=\sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)}\lambda^{(+)}(\mathfrak{c})A^{(+)}_{j_1,\dots j_n}(\mathfrak{c})+\sum_{\{l_1,l_2,l_3\}\subset I_n}\ \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{l_1,l_2,l_3\})}\lambda^{(-)}(\mathfrak{c})A^{(-)}_{j_1\dots j_n}(\mathfrak{c};l_1,l_2,l_3),\tag{3.3}$$

где коэффициенты $\lambda^{(+)}(\mathfrak{c})=0$, если n нечетно, и $\lambda^{(-)}(\mathfrak{c})=0$, если n четно.

Доказательство. Согласно теореме 3.1, необходимо доказать, по отдельности, линейную независимость всех тензоров $A^{(+)}_{j_1\dots j_n}$ при четном значении n и линейную независимость всех псевдотензоров $A^{(-)}_{j_1\dots j_n}$ нечетном значении n.

Рассмотрим случай четного ранга n. Доказательство проводится индукцией по $n/2$. Предположим, что имеется линейная независимость тензоров $A^{(+)}_{j_1\dots j_{n-2}}$. Допустим, что имеется такой набор коэффициентов $\lambda(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)$, для которого имеет место соотношение

$$\sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)}\lambda(\mathfrak{c})A^{(+)}_{j_1\dots j_n}(\mathfrak{c})=0.$$

Для каждой пары $\{s_1,s_2\}\subset I_n$ выделим из этого равенства сумму

$$D^{(s_1,s_2)}_{n-2}=\sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{s_1,s_2\})}\lambda(\mathfrak{c},\{s_1,s_2\})\prod_{\{k,l\}\in\mathfrak{c}}\delta_{j_k,j_l}$$

и запишем соотношение линейной зависимости в виде

$$\delta_{j_{s_1}j_{s_2}} D_{n-2}^{(s_1,s_2)} + \sum_{\{k_1,k_2\}\in I_n\setminus\{s_1,s_2\}} \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{s_1,s_2,k_1,k_2\})} \prod_{\{l,m\}\in\mathfrak{c}} \delta_{j_l j_m} \times \\ \times \Big[\delta_{j_{s_1}j_{k_1}}\delta_{j_{k_2}j_{s_2}}\lambda\big(\mathfrak{c}\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\big) + \delta_{j_{s_1}j_{k_2}}\delta_{j_{k_1}j_{s_2}}\lambda\big(\mathfrak{c}\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\big)\Big] = 0.$$

Произведем операцию свертывания выражения в левой части равенства по индексам j_{s_1} и j_{s_2}:

$$3D_{n-2}^{(s_1,s_2)} + \sum_{\{k_1,k_2\}\in I_n\setminus\{s_1,s_2\}} \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{s_1,s_2,k_1,k_2\})} \delta_{j_{k_1}j_{k_2}} \prod_{\{l,m\}\in\mathfrak{c}} \delta_{j_l j_m} \times \\ \times \Big(\lambda\big(\mathfrak{c}\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\big) + \lambda\big(\mathfrak{c}\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\big)\Big) = 0.$$

После этого перепишем второе слагаемое в следующей форме, изменив порядок суммирования:

$$\sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{s_1,s_2\})} \prod_{\{l,m\}\in\mathfrak{c}} \delta_{j_l j_m} \sum_{\{k_1,k_2\}\in I_n\setminus\{s_1,s_2\}:\{k_1,k_2\}\in\mathfrak{c}} \times \\ \times \Big(\lambda\Big(\big(\mathfrak{c}\setminus\{\{k_1,k_2\}\}\big)\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\Big) + \lambda\Big(\big(\mathfrak{c}\setminus\{\{k_1,k_2\}\}\big)\cup\big\{\{s_1,k_1\},\{s_2,k_2\}\big\}\Big)\Big).$$

В силу индуктивного предположения о линейной независимости совокупности всех тензоров $A^{(+)}_{j_1,\dots,j_{n-2}}$, приравнивая нулю коэффициенты при различных тензорах этой совокупности, получаем систему линейных уравнений для $(n-1)!!$ коэффициентов $\lambda(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)$,

$$\big[(3\cdot\mathbf{1}+\mathsf{R})\lambda\big](\mathfrak{c}';s) = 3\lambda(\mathfrak{c}';s) + \sum_{\substack{\{k_1,k_2\}\subset I_n\setminus\{1,s\}:\\ \{k_1,k_2\}\in\mathfrak{c}'}} \Big(\lambda(\mathfrak{c}';k_1)\big|_{k_2=s} + +\lambda(\mathfrak{c}';k_2)\big|_{k_1=s}\Big) = 0. \qquad (3.4)$$

Здесь коэффициенты $\lambda(\mathfrak{c}';s)\equiv\lambda(\mathfrak{c}'\cup\{\{1,s\}\})$ занумерованы $(n-3)!!$ разбиениями $\mathfrak{c}'\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{1,s\})$ и $s=2,\dots,n$. Следовательно, система состоит из $(n-3)!!(n-1)$ уравнений, число которых совпадает с числом неизвестных коэффициентов $\lambda(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_n)$.

Система уравнений (3.4) представлена как равенство нулю образа преобразования оператором $(3\cdot\mathbf{1}+\mathsf{R})$ заданного набора коэффициентов $\{\lambda(\mathfrak{c}';s)\}$, который действует в пространстве $\mathbb{R}^{(n-1)!!}$ наборов $\{\lambda(\mathfrak{c}';s);\mathfrak{c}'\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{1,s\}), s=2,\dots,n\}$. Этот оператор состоит, естественным образом, из двух слагаемых, первое из которых представляет собой умножение набора коэффициентов на 3. Матричные элементы второго слагаемого R не равны нулю в том и только том случае, когда в наборе $\mathfrak{c}'$ отсутствует пара $\{1,s\}$. Если такая пара отсутствует, то матричный элемент равен 1. Ввиду этого факта, сумма всех матричных элементов по фиксированному столбцу матрицы оператора $3\cdot\mathbf{1}+\mathsf{R}$ равна $(n+1)$, то есть не зависит от строки матрицы. Тогда, если в наборе $\{\lambda(\mathfrak{c}');\mathfrak{c}'\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{1,s\})\}$ отличны от нуля только те компоненты, у которых в характеризующем каждую из них разбиении $\mathfrak{c}'$ присутствует пара $\{1,s\}$ с фиксированным $s\in\{2,\dots,n\}$, то этот набор переводится оператором $\mathbf{1}+\mathsf{R}$ в набор $\{\lambda(\mathfrak{c}';s)\}$ с таким же свойством. При этом все эти новые ненулевые коэффициенты равны

$$\sum_{\mathfrak{c}'\in\mathfrak{C}(I_n\setminus\{1,s\})} \lambda(\mathfrak{c}';s).$$

Это означает, что оператор $(\mathbf{1}+\mathsf{R})/(n-1)$ обладает свойством *идемпотентности*, $(\mathbf{1}+\mathsf{R})^2=\mathbf{1}+\mathsf{R}$. Следовательно, его собственными числами могут быть только 0 и/или 1. Отсюда следует, что $\det(3\cdot\mathbf{1}+\mathsf{R})\neq 0$. Тогда уравнение (3.4) имеет только тривиальное решение $\lambda(\mathfrak{c}';s)=0$.

Доказательство для случая нечетного n проводится по той же схеме, и мы его опускаем. □

4. Коэффициенты ковариантных дифференциальных операторов. В этом разделе мы сформулируем основные результаты работы. Будет дано описание общей тензорной структуры коэффициентов ковариантных дифференциальных операторов первого порядка.

Для фиксированного $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}(I_{l+d})$ рассмотрим свертки $W^{(a_1)}_{k_1} \ldots W^{(a_d)}_{k_d}$: с тензором $A^{(+)}_{j_1,\ldots j_l k_1 \ldots k_d}(\mathfrak{c})$,

$$A^{(+)}_{j_1,\ldots j_l k_1 \ldots k_d}(\mathfrak{c}) W^{(a_1)}_{k_1} \ldots W^{(a_d)}_{k_d} = \\ = \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}:\\ \{p,q\}\subset I_l}} \delta_{j_p j_q} \Big) \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}:\\ \{p,q\}\subset I_{l+d}\setminus I_l}} (\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}) \Big) \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}:\\ p\in I_l, q\in I_{l+d}\setminus I_l}} W^{(a_q)}_{j_p} \Big), \quad (4.1)$$

и с тензором $A^{(-)}_{j_1,\ldots j_l k_1 \ldots k_d}(\mathfrak{c})$,

$$A^{(-)}_{j_1,\ldots j_l k_1 \ldots k_d}(\mathfrak{c}) W^{(a_1)}_{k_1} \ldots W^{(a_d)}_{k_d} = \varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}:\\ \{p,q\}\subset I_l\setminus\{l_2,l_2,l_3\}}} \delta_{j_p j_q} \Big) \times \\ \times \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}:\\ \{p,q\}\subset I_{l+d}\setminus(I_l\cup\{l_1,l_2,l_3\})}} (\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}) \Big) \Big(\prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c}:\\ p\in I_l\setminus\{l_1,l_2,l_3\},\\ q\in I_{l+d}\setminus(I_l\cup\{l_1,l_2,l_3\})}} W^{(a_q)}_{j_p} \Big). \quad (4.2)$$

В последнем случае имеется четыре возможности, в зависимости от числа элементов s в пересечении $E(l_1,l_2,l_3) = (I_{l+d} \setminus I_l) \cap \{l_1,l_2,l_3\}$, так что

(1) $\varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) = \varepsilon_{j_{l_1} j_{l_2} j_{l_3}}$ при $s = 0$;

(2) $\varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) = \varepsilon_{j_{l_1} j_{l_2} k_{l_3}} W^{(a_{l_3})}_{k_{l_3}}$ при $s = 1$ и $l_3 \in E(l_1,l_2,l_3)$;

(3) $\varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) = \varepsilon_{j_{l_1} k_{l_2} k_{l_3}} W^{(a_{l_2})}_{k_{l_2}} W^{(a_{l_3})}_{k_{l_3}}$ при $s = 2$ с множеством $\{l_2,l_3\} \subset E(l_1,l_2,l_3)$;

(4) $\varepsilon_{l_1,l_2,l_3}(\mathsf{W}) = \varepsilon_{k_{l_1} k_{l_2} k_{l_3}} W^{(a_{l_1})}_{k_{l_1}} W^{(a_{l_2})}_{k_{l_2}} W^{(a_{l_3})}_{k_{l_3}}$ при $s = 3$ с $\{l_1,l_2,l_3\} = E(l_1,l_2,l_3)$.

Применим теперь полученные формулы к вычислению тензор-функций $T^{(a,b)}_k$, $T^{(a,b)}_{jk}$, $\tilde{T}^{(a,b)}_{kl}$, $T^{(a,b)}_{jkl}$. Представим $T^{(a,b)}_k$ в виде разложения в (3.1) с $l = 1$ при $a,b = n+1,\ldots,n+r$,

$$T^{(a,b)}_k(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle \in I_n^d} A^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}_{k k_1 \ldots k_d}(\mathsf{Z}) W^{(a_1)}_{k_1} \ldots W^{(a_d)}_{k_d}. \quad (4.3)$$

с коэффициентами в виде инвариантных тензоров. Эти инвариантные тензоры определяются формулой (3.3), где коэффициентами $\lambda^{(\pm)}_{a,b;a_1,\ldots,a_d}(\mathfrak{c},\mathsf{Z})$ являются функции от набора Z, так что имеют место формулы

$$A^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}_{k k_1,\ldots,k_d}(\mathsf{Z}) = \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1})} \lambda^{(+)}_{a,b;a_1,\ldots,a_d}(\mathfrak{c},\mathsf{Z}) A^{(+)}_{k k_1,\ldots k_d}(\mathfrak{c}),\ d \text{ нечетно}; \quad (4.4)$$

$$A^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}_{k k_1,\ldots,k_d}(\mathsf{Z}) = \sum_{\{l_1,l_2,l_3\}\subset I_{d+1}} \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1}\setminus\{l_1,l_2,l_3\})} \lambda^{(-)}_{a,b;a_1,\ldots,a_d}(\mathfrak{c},\mathsf{Z}) A^{(-)}_{k k_1 \ldots k_d}(\mathfrak{c}; l_1,l_2,l_3),\ d \text{ четно}. \quad (4.5)$$

Преобразование сумм в (4.3) с помощью формул (4.1) и (4.2) приводит к выражениям

$$T^{(a,b)}_k(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{c=1}^{n} W^{(c)}_k T^{(a,b;c)}_{+}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \sum_{a',b'=1}^{n} [\boldsymbol{W}^{(a')}, \boldsymbol{W}^{(b')}]_k T^{(a,b;a'b')}_{-}(\mathsf{W},\mathsf{Z}), \quad (4.6)$$

где использовано также обозначение векторного произведения пары векторов в $\mathbb{R}^3$. В формуле (4.6) коэффициенты $T^{(a,b;c)}_{+}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ и $T^{(a,b;a',b')}_{-}(\mathsf{W},\mathsf{Z})$ являются функциями, зависящими от набора скаляров Z и набора инвариантов[1], составленного из набора W векторов. Приведем их явную

[1]Здесь и далее мы не конкретизируем явно набор инвариантов, т.е. не обсуждаем вопрос о характере зависимости скалярных функций от элементов *целого рационального базиса* (см., например, [19]).

полиномиальную зависимость от векторов $\boldsymbol{W}^{(a)}$, $a = 1, \ldots, n$ следующая. Функция $T_{+}^{(a,b;c)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$ имеет вид

$$T_{+}^{(a,b;c)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle \in I_n^d} \sum_{s=1}^{d} \delta_{ca_s} \Bigg[\sum_{\substack{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1}):\\ \{0,s\}\in\mathfrak{c}}} \lambda^{(+)}_{a,b;a_1,\ldots,a_d}(\mathfrak{c}, \mathsf{Z}) \prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c};\\ \{p,q\}\in I_d}} \big(\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}\big) +$$
$$+ \sum_{\{l_1,l_2,l_3\}\subset I_d} \Big(\boldsymbol{W}^{(a_{l_1})}, \big[\boldsymbol{W}^{(a_{l_2})}, \boldsymbol{W}^{(a_{l_3})}\big]\Big) \times$$
$$\times \sum_{\substack{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1}\setminus\{l_1,l_2,l_3\}):\\ \{0,s\}\in\mathfrak{c}}} \lambda^{(-)}_{a,b;a_1,\ldots,a_d}(\mathfrak{c}, \mathsf{Z}) \prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c};\\ \{p,q\}\in I_d\setminus\{l_1,l_2,l_3\}}} \big(\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}\big)\Bigg], \quad (4.7)$$

где нулевой номер присвоен индексу k в исходом выражении и использованы обозначения скалярного и смешанного произведений векторов в $\mathbb{R}^3$. Так как $a, b = n+1, \ldots, n+r$, эта функция должна быть скалярной, если $c = 1, \ldots, p$ и псевдоскалярной, если $c = p+1, \ldots, p+q$. Последнее возможно только в том случае, если среди аргументов этой функции имеются псевдоскаляры. Для этого необходимо, чтобы $n > 1$ и при $n = 2$ набор W должен состоять из вектора $\boldsymbol{W}^{(1)}$ и псевдовектора $\boldsymbol{W}^{(2)}$, а при $n \geqslant 3$ в наборе W должно выполняться условие $p \neq 0$, т.е. в нем должен быть хотя бы один вектор. Функция определяется формулой

$$T_{-}^{(a,b;a',b')}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d\ \text{четно}}^{D} \sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle \in I_n^d} \sum_{\{l_2,l_3\}\subset I_d} \delta_{a_{l_2} a'} \delta_{a_{l_3} b'} \times$$
$$\times \sum_{\substack{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}(I_{d+1}\setminus\{l_2,l_3\}):\\ \{0,s\}\in\mathfrak{c}}} \lambda^{(-)}_{a,b;a_1,\ldots,a_d}(\mathfrak{c}, \mathsf{Z}) \prod_{\substack{\{p,q\}\in\mathfrak{c};\\ \{p,q\}\in I_d\setminus\{l_2,l_3\}}} \big(\boldsymbol{W}^{(a_p)}, \boldsymbol{W}^{(a_q)}\big). \quad (4.8)$$

Она может быть как скалярной, так и псевдоскалярной.

Для вектор-функции $F_k^{(a)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$, $a = 1, \ldots, n$, очевидно, имеет место формула

$$F_k^{(a)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{b=1}^{n} W_k^{(b)} F_{+}^{(a;c)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) + \sum_{b,c=1}^{n} [\boldsymbol{W}^{(b)}, \boldsymbol{W}^{(c)}]_k F_{-}^{(a;b,c)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}), \quad (4.9)$$

аналогичная (4.6), с коэффициентами $F_{+}^{(a;b)}$, $F_{-}^{(a;b,c)}$, обладающими точно такими же свойствами по отношению к операции полного отражения группы $\mathcal{O}_3$. Их явное выражение дается формулами, аналогичными (4.7)–(4.8).

Формулы для тензор-функций $T_{jk}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$, $\tilde{T}_{kl}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$, $T_{jkl}(\mathsf{W}, \mathsf{Z})$, аналогичные (4.3), получаются таким же методом на основе подстановки, соответственно, в формулы

$$T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle \in I_n^d} A_{jkk_1\ldots k_d}^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}(\mathsf{Z}) W_{k_1}^{(a_1)} \ldots W_{k_d}^{(a_d)}, \quad (4.10)$$

$$\tilde{T}_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle \in I_n^d} \tilde{A}_{klk_1\ldots k_d}^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}(\mathsf{Z}) W_{k_1}^{(a_1)} \ldots W_{k_d}^{(a_d)}, \quad (4.11)$$

$$T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W}, \mathsf{Z}) = \sum_{d=0}^{D} \sum_{\langle a_1,\ldots,a_d\rangle \in I_n^d} A_{jklk_1\ldots k_d}^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}(\mathsf{Z}) W_{k_1}^{(a_1)} \ldots W_{k_d}^{(a_d)}. \quad (4.12)$$

Приведем их окончательный вид, опуская явные выражения для коэффициентов разложения по элементам базиса соответствующего тензорного представления. Эти формулы получаются подстановкой в (4.10), (4.11), (4.12) выражений для коэффициентов $A_{jkk_1\ldots k_d}^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}(\mathsf{Z})$, $\tilde{A}_{klk_1\ldots k_d}^{(a,b;a_1,\ldots,a_d)}(\mathsf{Z})$,

$A_{jklk_1\dots k_d}^{(a,b;a_1,\dots,a_d)}(\mathsf{Z})$, аналогичных (4.4), (4.5), с последующим преобразованием их на основе (4.1) и (4.2). В результате получаются следующие формулы:

$$T_{jk}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \delta_{jk}S_{a,b}^{+}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \sum_{a',b'=1}^{n} W_j^{(a')}W_k^{(b')}S_{a,b;a',b'}^{(00)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \varepsilon_{jkm}\sum_{c=1}^{n} W_m^{(c)}S_{a,b;c}^{-}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + \sum_{a',b',c=1}^{n}\Big[W_j^{(c)}\varepsilon_{kpq}W_p^{(a')}W_q^{(b')}S_{a,b;c}^{(01)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + W_k^{(c)}\varepsilon_{jpq}W_p^{(a')}W_q^{(b')}S_{a,b;c}^{(10)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big]; \quad (4.13)$$

$$\tilde{T}_{kl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \delta_{kl}\tilde{S}_{a,b}^{+}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \sum_{a',b'=1}^{n} W_k^{(a')}W_l^{(b')}\tilde{S}_{a,b;a',b'}^{(00)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \varepsilon_{klm}\sum_{c=1}^{n} W_m^{(c)}\tilde{S}_{a,b;c}^{-}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + \sum_{a',b',c=1}^{n}\Big[W_k^{(c)}\varepsilon_{lpq}W_p^{(a')}W_q^{(b')}\tilde{S}_{a,b;c}^{(01)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + W_l^{(c)}\varepsilon_{kpq}W_p^{(a')}W_q^{(b')}\tilde{S}_{a,b;c}^{(10)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big]; \quad (4.14)$$

$$T_{jkl}^{(a,b)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) = \sum_{c=1}^{n}\Big[\delta_{jk}W_l^{(c)}U_{a,b;c}^{(1)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \delta_{jl}W_k^{(c)}U_{a,b;c}^{(2)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \delta_{kl}W_j^{(c)}U_{a,b;c}^{(3)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big] + \\ + \sum_{a',b',c'=1}^{n} W_j^{(a')}W_k^{(b')}W_l^{(c')}U_{a,b;a',b',c'}^{+}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \varepsilon_{jkl}U_{a,b}^{-}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + \sum_{a',b'=1}^{n}\Big[\delta_{jk}\varepsilon_{lpq}W_p^{(a')}W_q^{(b')}U_{a,b;a',b'}^{(01)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \delta_{jl}\varepsilon_{kpq}W_p^{(a')}W_q^{(b')}U_{a,b;a',b'}^{(02)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + \delta_{kl}\varepsilon_{kpq}W_p^{(a')}W_q^{(b')}U_{a,b;a',b'}^{(03)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + W_j^{(a')}\varepsilon_{klm}W_m^{(b')}U_{a,b;a',b'}^{(11)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + W_k^{(a')}\varepsilon_{ljm}W_m^{(b')}U_{a,b;a',b'}^{(12)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + W_l^{(a')}\varepsilon_{jkm}W_m^{(b')}U_{a,b;a',b'}^{(13)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big] + \\ + \sum_{a_1,b_1,a_2,b_2=1}^{n}\Big[W_j^{(a_1)}W_k^{(b_1)}\varepsilon_{lpq}W_p^{(a_2)}W_q^{(b_2)}U_{a,b;a_1,b_1,a_2,b_2}^{(21)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + W_j^{(a_1)}W_l^{(b_1)}\varepsilon_{kpq}W_p^{(a_2)}W_q^{(b_2)}U_{a,b;a_1,b_1,a_2,b_2}^{(22)}(\mathsf{W},\mathsf{Z}) + \\ + W_k^{(a_1)}W_l^{(b_1)}\varepsilon_{jpq}W_p^{(a_2)}W_q^{(b_2)}U_{a,b;a_1,b_1,a_2,b_2}^{(23)}(\mathsf{W},\mathsf{Z})\Big]. \quad (4.15)$$

Проанализируем полученные формулы. Коэффициенты $T_{jk}^{(a,b)}$ должны представлять собой при $a = 1,\dots,p$ тензоры и при $a = p+1,\dots,n$ псевдотензоры, где $b = n+1,\dots,n+r$. Точно так же, $\tilde{T}_{kl}^{(a,b)}$ должны быть тензорами при $b = 1,\dots,p$ и псевдотензорами при $b = p+1,\dots,n$, где $a = n+1,\dots,n+r$. При этом $T_{jkl}^{(a,b)}$ должны быть тензорами при $a,b = 1,\dots,p$, $a,b = p+1,\dots,n$ и псевдотензорами при $a = 1,\dots,p$, $b = p+1,\dots,n$, либо $a = p+1,\dots,n$, $b = 1,\dots,p$. В связи с этим возможно появление ограничений на выбор скалярных (псевдоскалярных) коэффициентов (4.13)–(4.15). Такие ограничения не возникают, если $n \geqslant 3$, так как при наличии такого числа векторов (псевдовекторов) имеются псевдоскалярные инварианты группы $\mathcal{O}_{3,+}$. Ограничения возникают как раз в самых востребованных с точки зрения приложений в физике случаях $n = 1, 2$.

Если $n = 1, 2$ и поля векторные, то для того, чтобы удовлетворить указанным условиям, нужно в тензоре $T_{jk}^{(a,b)}$ положить $S_{-}^{(a,b;c)} = 0$, а при $n = 1$ нужно положить также $S_{01}^{(a,b;c)} = S_{10}^{(a,b;c)} = 0$. То же самое имеет место для тензора $\tilde{T}_{kl}^{(a,b)}$: $\tilde{S}_{-}^{(a,b;c)} = 0$, и при $n = 1$ нужно положить $\tilde{S}_{01}^{(a,b;c)} = \tilde{S}_{10}^{(a,b;c)} = 0$. Для коэффициентов тензора $T_{jkl}^{(a,b)}$ при $n = 1, 2$ должно выполняться $U_{a,b}^{-} = 0$, $U_{\dots;\dots}^{(p,q)} = 0$, если $p = 0, 1, 2$, $q = 1, 2, 3$.

Если $n = 1, 2$ и поля псевдовекторные, то для того, чтобы удовлетворить указанным условиям, нужно положить $T_{jk}^{(a,b)} = 0$, $\tilde{T}_{kl}^{(a,b)} = 0$. Для коэффициентов тензора $T_{jkl}^{(a,b)}$ при $n = 1, 2$ должно выполняться $U^{(p,q)}_{\dots;\dots} = 0$, $p = 0, 1, 2$, $q = 1, 2, 3$, так как отсутствуют псевдоскалярные инварианты группы $\mathcal{O}_3$.

Наконец, рассмотрим случай $n = 2$, когда $\boldsymbol{W}^{(1)}$ — векторное поле, $\boldsymbol{W}^{(2)}$ — псевдовекторное поле. В этом случае $T^{(1,b)}_{jk}$, $\tilde{T}^{(a,1)}_{kl}$ — тензоры, $T^{(2,b)}$, $\tilde{T}^{(a,2)}_{kl}$ — псевдотензоры при $a, b = 3, \dots, 2 + r$; $T^{(a,a)}_{jkl}$, $a = 1, 2$ — тензоры, а $T^{(1,2)}_{jkl}$, $T^{(1,2)}_{jkl}$ — псевдотензоры. Тогда в коэффициентах $T^{(1,b)}_{jk}$, $\tilde{T}^{(a,1)}_{kl}$ нет тождественно равных нулю слагаемых. В коэффициентах $T^{(2,b)}_{jk}$, $\tilde{T}^{(a,2)}_{kl}$ должно быть выполнено условие $S^+_{1,b} = \tilde{S}^+_{a,2} = 0$. В тензорах же $T^{(a,a)}_{jkl}$, $a = 1, 2$, должно выполняться условие $U^-_{a,a} = 0$, а в тензорах $T^{(1,2)}_{jkl}$, $T^{(2,1)}_{jkl}$ могут присутствовать все слагаемые, представленные в (4.13), (4.15).

Замечание. Представленные результаты исследования дают общий вид ковариантного дифференциального оператора $\mathsf{L}[\cdot]$ первого порядка без наложения на операторы этого класса условий, гарантирующих гиперболичность систем уравнений (2.5).

5. Заключение. Формулы (4.6), (4.9), (4.13)–(4.15) решают вопрос о перечислении всех возможных ковариантных дифференциальных операторов первого порядка для векторных и скалярных полей на $\mathbb{R}^3$. Они предоставляют метод построения физически адекватных бездиссипативных эволюционных уравнений, так как скалярные и векторные поля являются основным типом полей, которые используются в теоретической физике. Значение полученного описания состоит в том, что на их основе имеется возможность составлять трансляционно инвариантные и ковариантные дифференциальные операторы в виде сумм элементарных дифференциальных операторов с коэффициентами, представляющимися некоторыми функциями от инвариантов полей, исключая из представленного списка те операторы, которые не удовлетворяют поставленным условиям. Хотя тензорные поля применяются при описании динамики конденсированных сред в значительно меньшей степени, было бы желательно провести для них аналогичное исследование. Более важно, однако, дать описание ковариантных дифференциальных операторов второго порядка, которые являются более реалистичными с точки зрения физических приложений, так как они позволяют учитывать диссипативные процессы. Такого рода исследования проведены в частных случаях, результаты которых представлены в [10, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. Ф., Марченко В. И.* Макроскопическая теория спиновых волн// ЖЭТФ. — 1976. — *70*, № 4. — С. 1522–1532.
2. *Андреев А. Ф., Марченко В. И.* Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков// Усп. физ. наук. — 1980. — *130 (1)*. — С. 37–63.
3. *Вирченко Ю. П., Пелетминский С. В.* Скобки Пуассона и дифференциальные законы сохранения в теории магнитоупругих сред// в кн.: Проблемы физической кинетики и физики твердого тела. — Киев: Наукова думка, 1990. — С. 63–77.
4. *Волков Д. В.* Феноменологические лагранжианы// Физ. эл. част. атом. ядра. — 1973. — *4*, № 1. — С. 3–41.
5. *Волков Д. В., Желтухин А. А.* Феноменологический лагранжиан спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах// Физ. низк. темп. — 1979. — *5*, № 11. — С. 1359–1363.
6. *Волков Д. В., Желтухин А. А., Блиох Ю. П.* Феноменологический лагранжиан спиновых волн// Физ. тв. тела. — 1971. — *13*, № 6. — С. 1668–1678.
7. *Воловик Г. Е., Кац Е. И.* Нелинейная гидродинамика жидких кристаллов// ЖЭТФ. — 1981. — *81*. — С. 240–248.
8. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
9. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее приложения в физике. — М.: ГИФМЛ, 1958.
10. *Понамарева А. Э., Вирченко Ю. П.* Построение общего эволюционного уравнения для псевдовекторного соленоидального поля с локальным законом сохранения// Науч. вед. Белгород. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2018. — *50*, № 2. — С. 224–232.
11. *Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Науч. вед. Белгород. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2018. — *50*, № 4. — С. 492–497.
12. *Dieudonne J. A. Carrell J. A.* Invariant theory. Old and new. — New York: Academic Press, 1971.

13. *Dzyaloshinskii I. E.* Macroscopic description of spin glasses// Lect. Notes Phys. — 1980. — *115*. — P. 204–224.
14. *Dzyaloshinskii I. E., Volovick G. E.* Poisson brackets in condensed matter physics// Ann. Phys. — 1980. — *125*, № 1. — P. 67–97.
15. *Golo V. L., Monastyrsky M. I., Novikov S. P.* Solutions to the Ginzburg–Landau equations for planar textures in superfluid ^{3}He// Commun. Math. Phys. — 1979. — *69*, № 3. — P. 237–246.
16. *Halperin B. I., Hohenberg P. C.* Hydrodynamic theory of spin waves// Phys. Rev. — 1969. — *88*, № 2. — P. 898–919.
17. *Leggett A. J.* A theoretical description of the new phases of liquid ^{3}He// Rev. Mod. Phys. — 1975. — *47*. — P. 331–414.
18. *McConnel A. J.* Application of tensor analysis. — New York: Dover, 1957.
19. *Spencer A. G. M.* Theory of Invariants// in: Continuum Physics (*Eringen A. C.*, eds.). — New York: Academic Press, 1971. — P. 239–353.
20. *Volovik G. E.* Relationship between molecule shape and hydrodynamics in a nematic substance// JETP Lett. — 1980. — *31*, № 5. — P. 273–275.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный университет
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Субботин Андрей Валерьевич
Белгородский государственный технологический университет
E-mail: `subbotin@gmail.com`