

01;03

К вопросу о влиянии внутреннего тепловыделения на движение нагретой твердой частицы в вязкой жидкости

© Н.В. Малай, А.А. Плесканев, Е.Р. Щукин¹Белгородский государственный университет,
308015 Белгород, Россия¹ Институт высоких температур РАН,

Москва, Россия

e-mail: malay@bsu.edu.ru

(Поступило в Редакцию 7 июня 2005 г.)

В стоковском приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле получено приближенное аналитическое решение задачи о влиянии внутреннего тепловыделения на движение нагретой твердой сферической частицы в вязкой жидкости при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. При решении уравнений гидродинамики использовался степенной вид зависимости коэффициента теплопроводности частицы от температуры и экспоненциально-степенной вид зависимости вязкости жидкости от температуры. Обсуждается возможность экспериментального наблюдения эффекта.

PACS: 44.05.+e

Введение

В статье рассматривается установившееся движение твердой неравномерно нагретой сферической частицы радиуса R в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Нагрев гидрозольной частицы происходит за счет неоднородно распределенных в ее объеме внутренних источников тепла плотностью $q_i(r, \theta)$, где r и θ — сферические координаты ($0 \leq \theta \leq \pi$). Наличие источников тепла внутри гидрозольной частицы можно связать, например, с протеканием объемной химической реакции; с процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д. Наличие источников (стоков) тепла внутри частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности может существенно отличаться от температуры окружающей жидкости вдали от нее. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики жидкости и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности. Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент вязкости наиболее сильно зависит от температуры [1]. Для учета зависимости динамической вязкости от температуры воспользуемся формулой (1), позволяющей описывать изменение вязкости жидкости в широком интервале температур (при $F_n = 0$ эту формулу можно свести к известному соотношению Рейнольдса [1]):

$$\mu_e = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right)^n \right] \exp \left\{ -A \left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right) \right\}, \quad (1)$$

где A и F_n — постоянные, $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, T_∞ — температура жидкости вдали от частицы. Например, для воды $A = 5.779$, $F_1 = -2.318$, $F_2 = 9.118$, $T_\infty = 273$ К,

а для глицерина $A = 17.29$, $F_1 = -1.228$, $F_2 = 7.022$, $T_\infty = 303$ К. Относительная погрешность формулы (1) в этом случае не превышает 3%. Коэффициенты F_n рассчитывались с помощью математического пакета Maple VIII. Здесь и далее индексы „e“ и „i“ будем относить соответственно к вязкой жидкости и частице; индексом „ ∞ “ обозначены параметры жидкости на бесконечности, т.е. вдали от частицы.

Жидкость, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением. Тепловое скольжение вызывает появление дополнительной силы, которую мы обозначим через F_q . Когда величина этой силы становится равной величине силы вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно. Таким образом, в случае значительных относительных перепадов температуры в окрестности частицы, т.е. когда $(T_{is} - T_\infty)/T_\infty \sim O(1)$, где T_{is} — средняя температура поверхности частицы в вязкой жидкости, может возникнуть установившееся движение твердой частицы.

Если нагрев частицы происходит за счет поглощения электромагнитного излучения, то в газе это явление хорошо известно, и оно называется фотофорезом [2,3]. При этом касательная составляющая скорости удовлетворяет на поверхности твердой аэрозольной частицы ($r = R$) условию скольжения [4]:

$$U_\theta = K_{ts} \frac{v_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta}. \quad (2)$$

Здесь U_θ — касательная компонента массовой скорости \mathbf{U} в сферической системе координат; v_e — коэффициент кинематической вязкости газа; T_e — температура газа; K_{ts} — коэффициент теплового скольжения, выражение для которого находится методами кинетической теории газа. При коэффициентах аккомодации танген-

циального импульса α_τ и энергии α_E , равных единице, газокинетический коэффициент $K_{\text{ts}} = 1.152$ [4].

Впервые задача о скольжении жидкости по поверхности твердой гидрозольной частицы была решена Бассе [5]. Он предположил, что тангенциальная скорость жидкости относительно твердого тела на его поверхности пропорциональна тангенциальным напряжениям. Постоянную пропорциональности K_{ts} , связывающую эти две величины, он назвал коэффициентом скольжения. Если этот коэффициент отличен от нуля, то предполагается, что он зависит только от природы жидкости и твердой поверхности. В случае если сфера находится в покое, и жидкость обтекает ее, эта гипотеза для осесимметричных течений принимает вид (гипотеза Бассе)

$$U_e = K_{\text{ts}} \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right).$$

Построение теории влияния внутреннего тепловыделения на движение твердой гидрозольной частицы сферической формы в вязкой неизотермической жидкости является достаточно сложная задача. Это связано с тем, что, во-первых, в жидкости движение конкретной частицы определяется как поверхностными явлениями, так и объемными эффектами, возникающими из-за неоднородных распределений гидродинамического и температурного полей; во-вторых, это движение возникает за счет скольжения жидкости вдоль твердой поверхности. Теория теплового скольжения жидкости вдоль твердой поверхности к настоящему времени изучена недостаточно полно. Причина этого в том, что отсутствует строгая математическая теория неоднородных жидкостей и, в-третьих, это — механизм распределения тепловой энергии внутри твердого тела, за счет которого и происходит неравномерный нагрев поверхности частицы. В последнем случае произошел существенный прогресс как в теоретическом, так и в экспериментальном плане [6,7].

1. Постановка задачи

Рассматривается установившееся движение твердой неравномерно нагретой сферической частицы радиуса R в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Нагрев гидрозольной частицы происходит за счет неоднородно распределенных в ее объеме внутренних источников тепла плотностью $q_i(r, \theta)$. При рассмотрении движения частицы предполагается, что фазовый переход отсутствует; коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности жидкости и степенной вид зависимости коэффициента теплопроводности частицы от температуры: $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\varphi$. Здесь $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_\infty)$, $t_i = T_i/T_\infty$. Движение частицы описывается в сферической системе координат r, θ, φ с началом в центре частицы.

В рамках сформулированных допущений в сферической системе координат уравнения и граничные условия для скорости \mathbf{U}_e , давления P_e и температур T_e, T_i

запишутся в виде [8,9]

$$\begin{aligned} \nabla P_e &= \mu_e \Delta \mathbf{U}_e + 2(\nabla \mu_e \nabla) \mathbf{U}_e + [\nabla \mu_e \times \text{rot} \mathbf{U}_e], \\ \text{div} \mathbf{U}_e &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Delta T_e = 0, \quad (1.2)$$

$$\text{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i. \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} r = R: \quad U_r &= 0, \quad U_\theta = K_{\text{ts}} \frac{\nu_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta}, \quad T_e = T_i, \\ \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} &= \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_\infty^4), \\ r \rightarrow \infty: \quad U_e &\rightarrow U_\infty \cos \theta \mathbf{e}_r - U_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ P_e &\rightarrow P_\infty, \quad T_e \rightarrow T_\infty, \\ r \rightarrow 0: \quad T_i &\neq \infty. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь U_r и U_θ — радиальная и касательная компоненты массовой скорости \mathbf{U}_e ; \mathbf{U}_∞ — скорость плоскопараллельного потока жидкости, обтекающего частицу ($\mathbf{U}_\infty \parallel OZ$); \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ — единичные векторы сферической системы координат; $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$; σ_0 — постоянная Стефана–Больцмана; σ_1 — интегральная степень черноты.

Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты $\rho_e, \mu_\infty, \lambda_e$ и сохраняющиеся в процессе движения сферической частицы величины — R, T_∞ и U_∞ . Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию — число Рейнольдса $\text{Re}_\infty = (\mu_\infty U_\infty R) / \rho_e \ll 1$. Обезразмерим уравнения (1.1)–(1.3) и граничные условия (1.4) следующим образом: $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e / U_\infty$, $t_k = T_k / T_\infty$, $p_e = P_e / P_\infty$, $P_\infty = (\mu_\infty U_\infty) / R$, $k = e, i$.

При $\varepsilon = \text{Re}_\infty \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений гидродинамики и теплопереноса следует искать в виде

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + \dots,$$

$$p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + \dots, \quad t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \dots \quad (1.5)$$

2. Определение полей температур. Вывод выражения для силы и скорости установившегося движения гидрозольной частицы

Подставляя (1.5) в систему уравнений (1.1)–(1.3) и разделяя переменные в конечном итоге, были получены следующие выражения для компонентов массовой скорости и полей температур:

$$V_r(y, \theta) = \cos \theta (1 + A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y)),$$

$$t_e(y, \theta) = t_e^{(0)}(y) + \varepsilon t_e^{(1)}(y, \theta), \quad (2.1)$$

$$V_\theta(y, \theta) = -\sin \theta (1 + A_1 G_3(y) + A_2 G_4(y)),$$

$$t_i(y, \theta) = t_i^{(0)}(y) + \varepsilon t_i^{(1)}(y, \theta), \quad (2.2)$$

где

$$G_1 = -\frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)y^n},$$

$$G_2 = -\frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(2)}}{(n+1)y^n}$$

$$- \frac{\alpha}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3) \ln \frac{1}{y} - 1 \right] \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)^2 y^n},$$

$$G_3 = G_1 + \frac{y}{2} G_1', \quad G_4 = G_2 + \frac{y}{2} G_2',$$

$$t_e^{(0)}(y) = 1 + \frac{y}{3}, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$t_i^{(0)}(y) = \left(B_0 + \frac{1+\omega}{4\pi R \lambda_{i\infty} T_{\infty} y} \int_V q_i dV + \int_V \frac{f_0}{y} dy \right.$$

$$\left. - \frac{1}{y} \int_V f_0 dV \right)^{\frac{1+\omega}{\omega}}, \quad y = r/R, \quad (2.3)$$

$$t_i^{(1)}(y) = \frac{\cos \theta}{(1+\omega)t_{i0}^{\omega}} \left(B y + \frac{(1+\omega)RJ}{3\lambda_{i\infty} T_{\infty} y^2} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \left[y \int_1^y \frac{f_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y f_1 dy \right] \right), \quad t_e^{(1)} = \frac{\Gamma}{y^2} \cos \theta,$$

$$f_n(y) = -\frac{R^2(1+\omega)}{\lambda_{i\infty} T_{\infty}} y^2 \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) P_n(x) dx,$$

$$J = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV$$

— дипольный момент плотности тепловых источников, $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $x = \cos \theta$, $z = r \cos \theta$.

В (2.3) G_k^I, G_k^{II} — первая и вторая производные по y от соответствующих функций ($k = 1, 2$). Значения коэффициентов $\Delta_n^{(1)}$ ($n \geq 1$) и $\Delta_n^{(2)}$ ($n \geq 3$) находятся с помощью рекуррентных соотношений:

$$\Delta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+5)} \sum_{k=1}^{\infty} [(n+4-k)(\alpha_k^{(1)}(n+5-k) - \alpha_k^{(2)})$$

$$+ \alpha_k^{(3)}] \gamma^k \Delta_{n-k}^{(1)},$$

$$\Delta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n+3)(n-2)} \left[-6\alpha_n^{(4)} \gamma^{(n)} + \sum_{k=1}^n \left\{ (n+2-k) \right. \right.$$

$$\left. \times [(n+2-k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}] + \alpha_k^{(3)} \right\} \gamma^k \Delta_{n-k}^{(2)}$$

$$\left. + \alpha \sum_{k=0}^n [(2n+5-2k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}] \gamma^k \Delta_{n-k-2}^{(1)} \right].$$

При вычислении коэффициентов $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2)}$ по вышеприведенным формулам необходимо учитывать, что

$$\Delta_0^{(1)} = -3, \Delta_0^{(2)} = -1, \Delta_2^{(2)} = 1, \alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(4)} = 1, \alpha_0^{(3)} = -4,$$

$$\alpha_n^{(1)} = F_n, \alpha_n^{(2)} = (4-n)F_n + AF_{n-1}, \alpha_0^{(2)} = 4, \alpha_n^{(4)} = A^n/n!,$$

$$\alpha_n^{(3)} = 2AF_{n-1} - 2(n+2)F_n,$$

$$\Delta_1^{(2)} = -\frac{\gamma}{4} [6\alpha_1^{(4)} + 2(3\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}],$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{15} \left\{ -6\gamma\alpha_2^{(4)} + [3(4\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}] \Delta_1^{(2)} \right.$$

$$\left. - [2(3\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(2)}) + \alpha_2^{(3)}] \gamma \right\}.$$

Постоянные интегрирования, входящие в (2.1)–(2.2) определяются из граничных условий на поверхности частицы, и затем интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы получено следующее выражение для полной силы \mathbf{F} , действующую на гидрозольную частицу, которая аддитивно будет складываться из силы вязкого сопротивления \mathbf{F}_μ и силы \mathbf{F}_q :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \varepsilon \mathbf{F}_q, \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{F}_\mu = -6\pi R \mu_\infty U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F}_q = 6\pi R \mu_\infty f_q \mathbf{J} \mathbf{n}_z,$$

$$f_\mu = \frac{2N_2}{3N_1} \exp\{-A\gamma\}, \quad f_q = K_{is} \frac{4\nu_{es}}{3t_{es}} \frac{G_1}{N_1 \delta \lambda_{is} T_{\infty}} \exp\{-A\gamma\},$$

$$N_1|_{y=1} = G_1 G_2' - G_2 G_1', \quad N_2|_{y=1} = -G_1', \quad t_{es} = t_e^{(0)}|_{y=1},$$

$$\delta = 1 + 2 \frac{\lambda_{e\infty}}{\lambda_{is}} + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R}{\lambda_{is}} T_{\infty}^3 t_{es}^3, \quad \lambda_{is} = \lambda_{i\infty} t_{es}^\omega, \quad \mathbf{n}_z$$

— единичный вектор в направлении оси Z . Индексом „s“ здесь обозначены значения физических величин, взятых при средней относительной температуре поверхности гидрозольной частицы $t_{es} = T_{es}/T_{\infty}$, определяемой из решения трансцендентного уравнения (2.5):

$$\frac{T_{es}}{T_{\infty}} = 1 + \frac{1}{4\pi R \lambda_{e\infty} T_{\infty}} \int_V q_i(r, \theta) dV$$

$$- \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_{\infty}^3}{\lambda_{e\infty}} \left[\left(\frac{T_{es}}{T_{\infty}} \right)^4 - 1 \right]. \quad (2.5)$$

В (2.5) интегрирование ведется по всему объему частицы.

При выполнении условия $\lambda_e \ll \lambda_i$ в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу θ в системе частица–жидкая среда и считать, что $\mu_e(t_e) \approx \mu_e(t_e^{(0)})$. С учетом этого выражение (1) принимает вид

$$\mu_e = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right] \exp\left\{ -A \frac{\gamma}{y} \right\}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) позволяет рассматривать по отдельности тепловую задачу и гидродинамическую. Сшивка решений происходит с помощью граничных условий на поверхности гидрозольной частицы.

Приравнивая общую силу \mathbf{F} к нулю, получаем выражение для скорости установившегося движения твердой частицы сферической формы в вязкой неизотермической жидкости:

$$\mathbf{U}_q = -\varepsilon \frac{f_q}{f_\mu} \mathbf{Jn}_z. \quad (2.7)$$

3. Анализ полученных результатов

Формулы (2.4) и (2.7) позволяют оценить влияние внутреннего тепловыделения при экспоненциально-степенном виде зависимости вязкости окружающей жидкости от температуры на величину силы и скорости установившегося движения гидрозольной частицы.

Выражения (2.4) и (2.7) показывают, что на величину и направление \mathbf{F}_q и \mathbf{U}_q будут оказывать влияние величина и направление дипольного момента плотности тепловых источников и теплопроводность частицы. При $\lambda_i \rightarrow \infty$ значения \mathbf{F}_q и \mathbf{U}_q при фиксированной величине дипольного момента плотности тепловых источников стремятся к нулю.

Чтобы оценить, какой вклад могут оказать тепловые источники, неоднородно распределенные в объеме гидрозольной частицы на скорость ее установившегося движения, необходимо конкретизировать природу тепловых источников. В качестве примера рассмотрим простой случай, когда плотность тепловых источников обусловлена поглощением частицей электромагнитного излучения, и при этом частица поглощает излучение как черное тело. В этом случае поглощение излучения происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы, и плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется с помощью следующей формулы [10]:

$$q_i(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad R - \delta R \leq r \leq R \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

где I_0 — интенсивность падающего излучения.

В этом случае

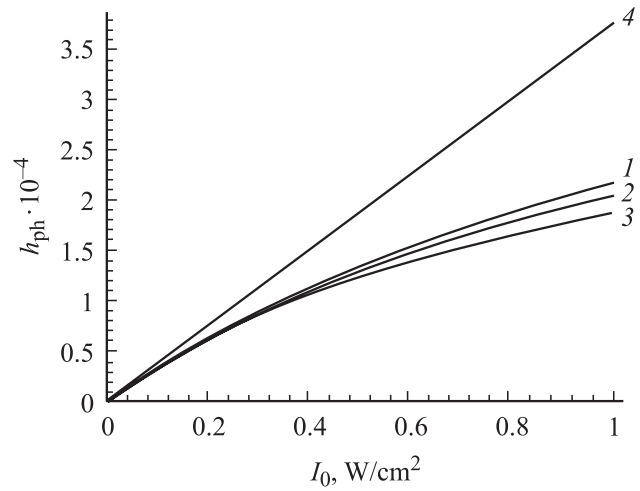
$$\int_V q_i(r, \theta) z dV = -\frac{2}{3} \pi R^3 I_0, \quad \int_V q_i(r, \theta) dV = \pi R^2 I_0$$

и получаем следующие выражения влияния внутреннего тепловыделения на величину силы и скорости установившегося движения абсолютно черной твердой частицы сферической формы:

$$F_{ph} = -\varepsilon 6\pi R \mu_\infty K_{ts} f_{ph}, \quad U_{ph} = \varepsilon K_{ts} h_{ph},$$

где

$$f_{ph} = \frac{2}{3} \frac{v_{es}}{t_{es}} \frac{G_1}{N_1 \delta \lambda_{is} T_\infty} \exp\{-A\gamma\} I_0, \\ h_{ph} = \frac{v_{es}}{t_{es}} \frac{G_1}{N_2 \delta \lambda_{is} T_\infty} I_0. \quad (3.1)$$



Зависимость функции h_{ph} от интенсивности падающего излучения I_0 , $\omega = 0.5$ (1); 0.7 (2) и 1 (3). Кривая 4 соответствует малым перепадам температуры.

Для иллюстрации вклада внутреннего тепловыделения в скорость U_{ph} движения твердой гидрозольной частицы (см. рисунок) приведены значения функции h_{ph} от интенсивности падающего излучения I_0 . Численные оценки проводились для частиц борированного графита, взвешенных в воде при $T_\infty = 273$ К, $\lambda_{i\infty} = 55$ W/m·degree и $\omega = 0.5$ (кривая 1); 0.7 (кривая 2) и 1 (кривая 3). Кривая 4 построена при малых относительных перепадах температуры ($\gamma \rightarrow 0$, $\omega = 0$), но коэффициенты молекулярного переноса брались при средней температуре поверхности частицы. Расчеты показали, что учет внутреннего тепловыделения оказывает существенное влияние на скорость установившегося движения гидрозольной частицы.

Заключение

Получены выражения для силы, действующей на гидрозольную частицу сферической формы и скорости ее установившегося движения при произвольных перепадах температуры между ее поверхностью и жидкости вдали от нее, за счет нагрева поверхности частицы внутренними источниками тепла неоднородно распределенных в ее объеме. Результаты работы могут быть использованы при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение гидрозольных частиц; при оценке скорости осаждения гидрозольных частиц в каналах; при анализе процессов переноса гидрозольных частиц в зоне протекания химических реакций и т.д. Количественное исследование обсуждаемого явления для твердых частиц представляет собой вполне реальную экспериментальную задачу.

Список литературы

- [1] *Бретшнайдер Ст.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.
- [2] *Кутуков В.Б., Шукин Е.Р., Яламов Ю.И.* // ЖТФ. 1975. Т. 46. С. 626–627.
- [3] *Шукин Е.Р., Малай Н.В.* // ИФЖ. 1988. Т. 54. № 4. С. 628–635.
- [4] *Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А.* // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 1047–1050.
- [5] *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
- [6] *Береснев С.А., Кочнева Л.Б.* // Оптика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 2. С. 134–141.
- [7] *Домбровский Л.А.* // ТВТ. 2004. Т. 42. № 42. С. 961–971.
- [8] *Ландву Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [9] *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
- [10] *Борен К.Ф., Хафмен Д.Р.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.