УДК 372.25.29

В. М. МОСКОВКІН

БІФУРКАЦІЯ НАРОДЖЕННЯ ЦИКЛУ В БЕРЕГОВІЙ СИСТЕМІ: УЛАМКОВИЙ МАТЕРІАЛ—БІОМАСА ДОННОГО БІОЦЕНОЗУ

(Представлено член-кореспондентом АН УРСР О. Я. Олійником)

Розглянемо лінійне рівняння балансу уламкового наносо-утворюючого матеріалу в береговій зоні [1], в якому додатково враховано біогенну продукцію цього матеріалу і коефіцієнт його стираності, за рахунок хвильового впливу, поставимо у лінійну залежність від біомаси донного біоценозу

$$\frac{dW}{dt} = aH_{\gamma}(W_m - W) - \left[C_0\left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) + C_{\min}\right]W + u + \delta B, \qquad (1)$$

де W — об'єм пляжу і наносоутворюючого уламкового матеріалу (починаючи з піщаних фракцій) на одиницю довжини берегової лінії, м^2 ($0 \leqslant W \leqslant W_m$); a — частка пляжу і наносоутворюючого матеріалу в породах, що складають берег ($0 < a < 1$); H — висота берегового уступу, м; u — інтенсивність надходження ($u > 0$) або винесення ($u < 0$) матеріалу за рахунок природних (транспорт наносів течіями) або штучних (підсипка, вилучення) факторів, м^2/рік; B — біомаса донного біоценозу на одиницю ширини абразійної обмілини (шельфу), тонн/м ($0 \leqslant B \leqslant B_{\max}$); δ — коефіцієнт біогенного продукування уламкового матеріалу, м^3/тонн·рік (кількість уламкового матеріалу (м^3), одержуваного з однієї тонни біомаси за рік); $\gamma(W_m - W)$ — швидкість відступання берегового уступу, м/рік; $\gamma = \mathrm{const} > 0$, м$^{-1}$ рік$=1$; C_0, $C_{\min} = \mathrm{const}$, рік$^{-1}$; $k = C_0\ (1 - \frac{B}{B_{\max}}) + C_{\min}$ — коефіцієнт стираності матеріалу, рік$^{-1}$ (лінійна апроксимація між двома характерними його значеннями:

$$k(B = 0) = k_{\max} = C_0 + C_{\min}, \quad k(B = B_{\max}) = k_{\min} = C_{\min});$$

t — час, рік.

Для замикання рівняння (1) введемо для динаміки біомаси таке рівняння:

$$\frac{dB}{dt} = K_1 B\left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) - K_2 W, \qquad (2)$$

в основу якого покладено такі екологічні і літодинамічні особливості розглядуваного процесу: 1. Відомий в екології саморегульований ріст біомаси, який описується рівнянням Ферхюльста (при $K_2 = 0$), розв'язком якого є випукло-вогнута логічна крива, що виходить на стаціонарний рівень $B = B_{\max}$; 2. Зменшення приросту біомаси при збільшенні об'єму уламкового матеріалу в береговій зоні (він сприяє пригніченню і деградації донного біоценозу).

Переходячи до безрозмірних змінних ($t^1 = K_1 t$, $B^1 = B/B_{\max}$, $W' = W(W_m)$, прийдемо до нелінійної динамічної системи другого порядку

$$\frac{dW'}{dt'} = -\widetilde{K}_1 W' + \widetilde{K}_2 B' W' + \widetilde{K}_5 B' + \widetilde{K}_3$$

$$\frac{dB'}{dt'} = B'(1 - B') - \widetilde{K}_4 W' \qquad (3)$$

де

$$\widetilde{K}_1 = \frac{1}{K_1}(aH\gamma + C_0 + C_{\min}) > 0, \quad \widetilde{K}_2 = \frac{C_0}{K_1} > 0 \quad \widetilde{K}_3 = \frac{aH\gamma}{k_1} + \frac{u}{K_1 W_m} \gtrless 0,$$

$$\widetilde{K}_4 = \frac{K_2 W_m}{K_1 B_{\max}} > 0, \quad \widetilde{K}_5 = \frac{\delta B_{\max}}{W_m K_1}.$$

Координати особливих точок системи (3) визначаються з виразів

$$W'_{\bullet} = \frac{B'_{\bullet}(1-B'_{\bullet})}{\tilde{K}_4}, \quad B'_{\bullet} = \frac{\tilde{K}_1 W'_{\bullet} - \tilde{K}_3}{\tilde{K}_5 + \tilde{K}_2 W'_{\bullet}}, \tag{4}$$

де

$$0 \leqslant B'_{\bullet} \leqslant \frac{\tilde{K}_1 - 4\tilde{K}_3\tilde{K}_4}{\tilde{K}_2}, \quad 0 \leqslant W'_{\bullet} \leqslant \frac{1}{4\tilde{K}_4} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{\tilde{K}_3}{\tilde{K}_1} \leqslant W'_{\bullet} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tilde{K}_3}{\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2} \leqslant 1, \quad \tilde{K}_1 > \tilde{K}_2.$$

Значення $W_{\bullet}'$ через параметри системи (3) визначаються з розв'язку кубічного рівняння

$$(W'_{\bullet})^3 + (W'_{\bullet})^2 \frac{[2\tilde{K}_2\tilde{K}_4\tilde{K}_5 + \tilde{K}_1(\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2)]}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4^2} +$$

$$+ W'_{\bullet} \frac{[\tilde{K}_4\tilde{K}_5^2 - \tilde{K}_1\tilde{K}_5 + \tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1)]}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4} + \frac{\tilde{K}_3^2 + \tilde{K}_3\tilde{K}_5}{\tilde{K}_2^2\tilde{K}_4} = 0. \tag{5}$$

Матриця лінеаризованої системи (3) має вигляд

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} -\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 B'_{\bullet} & \tilde{K}_2 W'_{\bullet} + \tilde{K}_5 \\ -\tilde{K}_4 & 1 - 2B'_{\bullet} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

З умови $\det \tilde{A} = 0$ визначається біфуркаційна множина для точок сідлового типу (границя сідел) [2]. Для пошуку біфуркації народження циклу прирівняємо слід матриці (6) до нуля

$$\operatorname{tr} \tilde{A} = 1 - \tilde{K}_1 - 2B'_{\bullet} + \tilde{K}_2 B'_{\bullet} = 0, \tag{7}$$

звідки

$$0 \leqslant B'_{\bullet} = \frac{\tilde{K}_1 - 1}{\tilde{K}_2 - 2} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \tilde{K}_2 < K_1 \leqslant 1, \tag{8}$$

$$\det \tilde{A} = \frac{(\tilde{K}_2 - \tilde{K}_1)\tilde{K}_1(\tilde{K}_2 + 4) + \tilde{K}_2(1 - 2\tilde{K}_2) + \lambda_0\tilde{K}_5(\tilde{K}_2 - 2)^2}{(\tilde{K}_2 - 2)^2}, \tag{9}$$

$$\lambda_0 = \tilde{K}_{4\text{бнф}} = \frac{(\tilde{K}_1 - 1)(\tilde{K}_2 - \tilde{K}_1 - 1)(\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1)}{(K_2 - 2)^2[\tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2) + \tilde{K}_5(\tilde{K}_1 - 1)]}, \tag{10}$$

Останній вираз (границя стійкості вузлів і фокусів [2]) одержано з виразів (4, 8). З врахуванням нерівностей (8) і додатності біфуркаційного параметра λ_0 одержимо, що $\tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2) + \tilde{K}_5(\tilde{K}_1 - 1) < 0 \Leftrightarrow \tilde{K}_3 \times \times \frac{(1 - \tilde{K}_1)\tilde{K}_5}{(K_2 - 2)} < 0$, звідки також випливає нерівність $\tilde{K}_2\tilde{K}_3 + \tilde{K}_1\tilde{K}_5 > 0$, необхідна при подальшому аналізі.

Для існування біфуркації народження циклу необхідно, щоб $\det \tilde{A} > 0$ і $0 < \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1 \leqslant 1$, що рівнозначно нерівності

$$\frac{-(4\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1^2 + 1 - 4\lambda_0\tilde{K}_5) + \sqrt{D}}{2(\tilde{K}_1 - 2 + \tilde{K}_5\lambda_0)} < \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1 \tag{11}$$

при $\tilde{K}_2 - 2 + \lambda_0\tilde{K}_5 < 0$ і $0 \leqslant \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1 \leqslant 1$ при $\tilde{K}_2 - 2 + \lambda_0\tilde{K}_5 > 0$ (тут $\lambda_0\tilde{K}_5 \geqslant 1$), де $D = (4\tilde{K}_1 - \tilde{K}_1^2 + 1 - 4\tilde{K}_5\lambda_0)^2 + 16(\tilde{K}_1^2 - \lambda_0 K_5)(\tilde{K}_1 - 2 + + \lambda_0\tilde{K}_5)$.

При збільшенні параметра $\tilde{K}_5$, починаючи від нуля (відсутність надходження матеріалів біогенного походження), криволінійна область ($\det \tilde{A} > 0$) у трикутнику $0 \leqslant \tilde{K}_2 < \tilde{K}_1 \leqslant 1$ поступово збільшується і при $\tilde{K}_2 - 2 + \lambda_0\tilde{K}_5 > 0$ покриває його повністю. Сама біфуркація відбувається на граничній біфуркаційній кривій (10), що проходить через вищевказану область параметрів $\tilde{K}_1$ і $\tilde{K}_2$.

За допомогою аналітико-обчислювальної техніки, викладеної в роботі [3] одержано в позначеннях цієї роботи характеристики граничного циклу:

$$\operatorname{Re}_1 C_1(0) = \frac{A}{8\tilde{\gamma}^2}\left(1 \frac{A_2}{\tilde{\gamma}^2}\right) \times (2 + \tilde{K}_2 - \tilde{K}_2^2) > 0, \tag{12}$$

де $A = \frac{\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1}{\tilde{K}_2 - 2} > 0$, $\tilde{\gamma} = \frac{\sqrt{\det \tilde{A}}}{|\tilde{K}_2 - 2|} > 0$, $\det \tilde{A}$ — обчислюється за формулою (9);

$$\operatorname{Im} C_1(0) = -\frac{(\tilde{K}_2 + 1)}{8\tilde{\gamma}^3}(4A^2 + \tilde{\gamma}^2 + 3A^2\tilde{K}_2^2) - \frac{1}{24}(1 + \tilde{K}_2)^2 \times$$

$$\times \left(1 + \frac{2A^2}{\tilde{\gamma}^2} + \frac{10A^4}{\tilde{\gamma}^4}\right) < 0; \tag{13}$$

$$\mu_2 = -\operatorname{Re} C_1(0)/\alpha'(0), \quad \beta_2 = 2\operatorname{Re} C_1(0) > 0,$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{\gamma}\left[\operatorname{Im} C_1(0) - \frac{\operatorname{Re} C_1(0)}{\alpha'(0)}\omega'(0)\right]; \tag{14}$$

$$\alpha'(0) = \left.\frac{d\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{1}{2}(\tilde{K}_2 - 2)\frac{(\tilde{K}_2\tilde{K}_3 + \tilde{K}_1\tilde{K}_5)}{K^2}\left.\frac{dW'_{\bullet}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}, \tag{15}$$

де $K = \frac{\tilde{K}_2(\tilde{K}_1 - 1)(\tilde{K}_2 - \tilde{K}_1 - 1)}{\lambda_0(\tilde{K}_2 - 2)^2} + \tilde{K}_5 = \frac{\tilde{K}_2[\tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2) + \tilde{K}_5(\tilde{K}_1 - 1)]}{(\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1)} > 0;$

$$\left.\frac{dW'_{\bullet}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\begin{gathered}(K - \tilde{K}_5)^2\tilde{K}_1(\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2) + \tilde{K}_2(K - \tilde{K}_5)[\tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1) - \\ - \tilde{K}_1\tilde{K}_5] + \tilde{K}_2^2\tilde{K}_3(\tilde{K}_3 + \tilde{K}_5)]\end{gathered}}{\begin{gathered}\tilde{K}_2\lambda_0\{3(K - \tilde{K}_5)^2\tilde{K}_2\lambda_0 + 2(K - \tilde{K}_5)[2\tilde{K}_2\tilde{K}_5\lambda_0 + \tilde{K}_1(\tilde{K}_1 - \\ - \tilde{K}_2)] + \tilde{K}_2[\lambda_0\tilde{K}_5^2 - \tilde{K}_1\tilde{K}_5 + \tilde{K}_3(\tilde{K}_2 - 2\tilde{K}_1)]\}\end{gathered}}; \tag{16}$$

$$\omega'(0)=\frac{d\omega}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left\{[A(\widetilde{K}_2+2)(\widetilde{K}_2\widetilde{K}_3+\widetilde{K}_1\widetilde{K}_5)K^{-2}+\lambda_0\widetilde{K}_2]\frac{dW'_*}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}+K\right\}}{\sqrt{\det\widetilde{A}}}; \quad (17)$$

$$T=\frac{2\pi}{\widetilde{\gamma}}(1+\tau_2\varepsilon^2+0(\varepsilon^4)), \quad \varepsilon^2=\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_2}+0(\lambda-\lambda_0)^2, \quad (18)$$

$$\alpha(\lambda)=\mathrm{Re}\,\lambda_1=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\widetilde{A}, \quad \omega(\lambda)=\mathrm{Im}\,\lambda_1=\frac{1}{2}\sqrt{4\det\widetilde{A}-(\operatorname{tr}\widetilde{A})^2}>0$$

$$\lambda_1=\overline{\lambda}_2=\alpha(\lambda)+i\omega(\lambda), \quad \lambda=\widetilde{K}_4.$$

Оскільки показник Флока β більше нуля, то граничний цикл нестійкий. Період граничного циклу T при збільшенні $\widetilde{K}_5$ від 0 до ∞ (при $\varepsilon^2\approx 0$) зменшується від $T_0=\frac{2\pi}{\gamma_0}$ до

$$T(\widetilde{K}_5=\infty)=\frac{2\pi}{\sqrt{\widetilde{\gamma}^2+\frac{(\widetilde{K}_2-\widetilde{K}_1-1)(\widetilde{K}_2-2\widetilde{K}_1)}{(\widetilde{K}_2-2)^2}}},$$

де $\widetilde{\gamma}^2$ визначається за формулою (9) при $\widetilde{K}_5=0$ (одержано з виразів (9, 10) при $\widetilde{K}_5\to\infty$).

При $\widetilde{K}_5=0$, показано, що $\mu_2<0$, і отже, періодичний розв'язок існує при $\lambda<\lambda_0$ («докритична» біфуркація).

При $\widetilde{K}_5=0$, $K_1=0{,}5-0{,}6$ рік$^{-1}$ одержано період коливань порядку $T=\frac{2\pi}{\widetilde{\gamma}_0K_1}\approx 50-100$ років, при $\widetilde{K}_5>0$ цей період може зменшуватися на порядок.

Сам періодичний розв'язок з точністю до вибору початкової фази може бути записаний за процедурою, запропонованою в роботі [3]. Відзначимо, що при малих періодичних неавтономних збуреннях біфуркаційного параметра можливе виникнення стохастичних режимів («дивних атракторів») [2].

Надійшло 06.06.91