

Скорость отступления клифа $v \geq 0$ аппроксимируется, как правило, гладкими (в области $W > 0$) функциями с одним локальным максимумом. При этом монотонно убывающие до нуля функции $f(W)$ соответствуют абразии легкоразрушаемых пород (чем больше объем материала на пляже, тем меньше скорость абразии), а функции с одним локальным максимумом — абразии прочных пород (при малых W сам материал оказывает абрадирующее воздействие на береговой уступ). В первом случае при $H = \text{const}$ уравнение (1) имеет единственную стационарную устойчивую точку $(\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{\text{ст}})$, во втором при $f(0) = 0$ могут иметь

место две стационарные точки: $W_{\text{ст}}^{(1)} = 0$, $W_{\text{ст}}^{(2)} > 0$, последняя из которых, как можно показать, является устойчивой, а нулевая — неустойчивой. Для примера проведем исследование решения уравнения (1) при $v = f(W) = B(W + \epsilon)/(W + r)^2$ [2]. Здесь B , ϵ , r — положительные постоянные.

Существование и единственность стационарной точки $W_{\text{ст}}$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{aHB(W + \epsilon)}{(W + r)^2} - kW, \quad (2)$$

где a — положительная постоянная, при $\epsilon \neq 0$ видны из следующего выражения: $1/(W + r)^2 = kW/aHB(W + \epsilon)$, правая часть которого монотонно возрастает и стремится к постоянному положительному значению k/aHB , а левая — монотонно убывает до нуля.

Обозначив правую часть уравнения (2) через $F(W)$, получим следующие значения этой функции в характерных точках: $F(0) = \frac{aHB\epsilon}{r^2} > 0$, $F(\infty) = -\infty$, $F(W_{\text{ст}}) = 0$. Локальные экстремумы функции $F(W)$ находим из решения уравнения:

$$\frac{1}{(W + r)^3} = \frac{k}{aHB(r - 2\epsilon - W)}. \quad (3)$$

Рассмотрим два случая $r > 2\epsilon$ и $r \leq 2\epsilon$.

1. $r > 2\epsilon$. Единственный положительный корень \tilde{W} уравнения (3) существует при $kr^3/aHB(r - 2\epsilon) \leq 1$ и лежит в полуинтервале $0 \leq \tilde{W} < r - 2\epsilon$. Покажем, что этот корень соответствует локальному максимуму функции $F(W)$, т. е. $F''(\tilde{W}) < 0$. Действительно,

$$F''(W) < 0 \Leftrightarrow \frac{aHB}{(W + r)^2} (6\epsilon^2 + 2W - 4r) < 0 \Leftrightarrow W < 2r - 3\epsilon. \quad (4)$$

Неравенство (4) всегда выполняется при $W = r - 2\epsilon$, так как $r > 2\epsilon$, и тем более при $\tilde{W} < r - 2\epsilon$. Так как $F(0) = \text{const}$, $F(\infty) = -\infty$, то имеем глобальный максимум функций $F(W)$ в точке \tilde{W} .

Исследуем проведение функции $W(t)$, являющейся решением уравнения (2). Пусть $W(0) = W_0 < \tilde{W}$, тогда в области $W_0 < W < \tilde{W}$, $\frac{dW}{dt} = F(W)$ увеличивается, т. е. крутизна кривой $W(t)$ в этой области возрастает и достигает своего максимума в точке $\tilde{W} = W(t_{\text{пер}})$. Следовательно, решение $W(t)$ описывается вогнутой кривой. В области $\tilde{W} < W < W_{\text{ст}}F(W)$ уменьшается, крутизна кривой $W(t)$ убывает, асимптотически стремясь к нулю, и, следовательно, $W(t)$ в этой области описывается выпуклой кривой.

При $\tilde{W} < W_0 < W_{\text{ст}}$ имеем монотонно возрастающую (без перегиба) кривую, асимптотически стремящуюся к $W = W_{\text{ст}}$.

В. М. ШИРОКОВ, А. М. ТРОФИМОВ, В. М. МОСКОВКИН

АНАЛИЗ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ БЕРЕГОВОГО СКЛОНА

В связи с интенсивным вовлечением прибрежной зоны морей и водохранилищ в хозяйственную деятельность актуальность приобрела проблема прогноза динамики береговых процессов. Для анализа процессов разрушения морских берегов (абразии) и пляжеформирования обычно пользуются уравнением баланса пляжеобразующего материала при отсутствии вдольберегового потока наносов [1]:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha v H - kW, \quad (1)$$

где $W \geq 0$ — объем обломочного материала на единицу длины пляжа, $\text{м}^3/\text{м}$; $v = f(W)$ — скорость отступления берегового уступа (клифа), $\text{м}/\text{год}$; α — доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег ($0 < \alpha < 1$); k — коэффициент истираемости наносов (материала), год^{-1} ; H — высота берегового уступа, м ; t — время, год .

При $W_0 > W_{ст} F(W)$ убывает, и, таким образом, имеем монотонно убывающую кривую (без перегиба), асимптотически стремящуюся к $W = W_{ст}$.

При $r > 2\epsilon$ и $kr^3/aHB(r-2\epsilon) > 1$ не существует положительного корня уравнения (3). Функция $F(W)$ является монотонно убывающей и, следовательно, имеем монотонную (без перегиба) кривую, асимптотически стремящуюся к $W = W_{ст}$.

2. $r \leq 2\epsilon$. Здесь положительный действительный корень уравнения (3) не существует, так как $r - 2\epsilon \leq 0$ (точка максимума $W = r - 2\epsilon$ функции $f(W) = \frac{B(W+\epsilon)}{(W+r)^2}$ смещается в отрицательную область). Функция $F(W)$ в области $W \geq 0$ монотонно убывает, и решение $W(t)$ представляется монотонной (без перегиба) кривой, асимптотически стремящейся к $W = W_{ст}$ (устойчивость стационарной точки $W_{ст}$ можно показать с помощью линеаризации уравнения (2) в окрестности $W_{ст}$).

Для примера возьмем характерные числовые параметры, соответствующие хорошо изученному опорному береговому участку [2]: $k = 0,1 \text{ год}^{-1}$; $a = 0,3$; $B = 0,026 \text{ м}^3/\text{год}$; $\epsilon = 10^{-2} \text{ м}^2$; $r = 0,5 \text{ м}^2$; $H = 10 \div 100$. В этом случае соблюдаются условия $r > 2\epsilon$, $kr^3/aHB(r-2\epsilon) < 1$ и развитие природного берегового процесса протекает по одному из описанных типов. Определим критическую высоту клифа $H_{кр}$ из условия $kr^3/aHB(r-2\epsilon) = 1$: $H_{кр} = kr^3/aB(r-2\epsilon)$. В нашем примере $H_{кр} = 4,34 \text{ м}$.

Уравнение (2) при $\epsilon = 0$ имеет две стационарные точки $W_{ст}^{(1)} = 0$, $W_{ст}^{(2)} = \sqrt{\frac{aHB}{k}} - r$; вторая будет положительной при $kr^2/aHB < 1$. Методом линеаризации можно показать, что точка $W_{ст}^{(2)}$ устойчивая, а $W_{ст}^{(1)} = 0$ — неустойчивая. При $kr^2/aHB \gg 1$ имеем единственную неотрицательную стационарную точку $W_{ст}^{(1)} = 0$, которая является устойчивой. Таким образом, при $\epsilon = 0$ существует $H_{кр} = kr^2/aB$: 1) $H < H_{кр} - \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W_{ст}^{(2)} = \sqrt{\frac{aHB}{k}} - r > 0$ (устанавливается стабильный пляж); 2) $H > H_{кр} - \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$ (пляж исчезает).

При $\epsilon = 0$ решение уравнения (2) с начальным условием $W(0) = W_0$ запишется:

$$\text{При } 0 < W < \sqrt{\frac{aHB}{k}} - r = W_{ст},$$

$$t = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{kW_0^2 + 2krW_0 + kr^2 - aHB}{kW^2 + 2krW + kr^2 - aHB} \right) + r \left(1 + \frac{kr^2}{aHB - kr^2} \right) \frac{1}{\sqrt{kaHB}} \times \\ \times \left\{ \text{Arth} \left[\frac{-k(W_0+r)}{\sqrt{kaHB}} \right] - \text{Arth} \left[\frac{-k(W+r)}{\sqrt{kaHB}} \right] \right\} + \\ + \frac{r^2}{2(aHB - kr^2)} \ln \left[\frac{W^2(kW_0^2 + 2krW_0 + kr^2 - aHB)}{W_0^2(kW^2 + 2krW + kr^2 - aHB)} \right]. \quad (5)$$

При $W \geq \sqrt{\frac{aHB}{k}} - r = W_{ст}$ имеем аналогичное решение, в котором только вместо Arth следует писать Arcth.

Анализ полученных результатов показывает, что при $W = W_{ст}$ $t \rightarrow \infty$. Решения уравнения (2) были проанализированы при $k = 0,1 \text{ год}^{-1}$; $a = 0,3$; $B = 0,026 \text{ м}^3/\text{год}$; $r = 0,5 \text{ м}^2$; $\epsilon = 0$ и четырех значениях $H > H_{кр} = kr^2/aB = 3,21 \text{ м}$: $H = 10$; 40 ; 70 ; 100 м (рис. 1). Пунктиром показаны соответствующие увеличению H стационарные уровни для W : $W = 0,38$; $1,26$; $1,83$; $2,29 \text{ м}^2$. Перегибы кривых, выходящих из начала координат, находятся из решения уравнения (3) и лежат в интервале $0 < \tilde{W} < r =$

$= 0,5 \text{ м}^2$. Чем больше H , тем быстрее кривые $W(t)$ выходят на свои стационарные (асимптотические) значения. При $H \geq 100 \text{ м}$, $W(0) = 0$ решение выходит на свое стационарное значение через 25 лет (при однопроцентном отклонении $W(t)$ от $W_{ст}$).

На рис. 1 также показаны зависимости $W(t)$ при $W_0 > W_{ст}$: $W_0 = 1 \text{ м}^2$ при $H = 10 \text{ м}$; $W_0 = 3 \text{ м}^2$ при $H = 40 \text{ м}$; $W_0 = 4 \text{ м}^2$ при $H = 70 \text{ м}$; $W_0 = 5 \text{ м}^2$ при $H = 100 \text{ м}$.

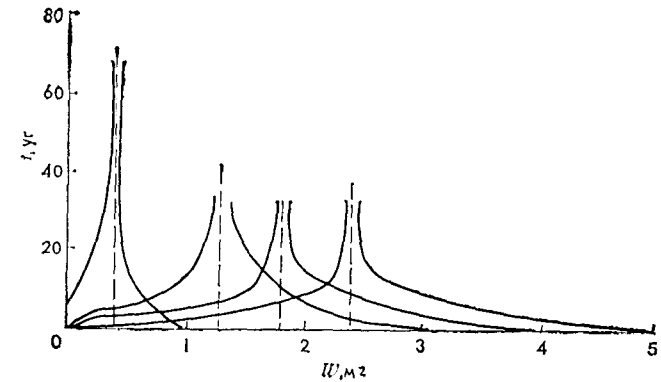


Рис. 1. Расчетные кривые по аналитическому решению (5) при $k = 0,1 \text{ год}^{-1}$ и различных H

Аналогичные расчеты приведены при $H = 100 \text{ м}$ и $k = 0,05$; $0,1$; $0,15$; $0,2$; $0,25 \text{ год}^{-1}$, охватывающих весь реальный диапазон изменения этого параметра (рис. 2). Остальные параметры брались такими же, как и в предыдущей серии расчетов. Видно, что в течение нескольких первых лет поведение $W(t)$ при $W(0) = W_0 = 0$ не зависит от k ; в дальнейшем каждая кривая выходит на свое стационарное значение и тем быстрее, чем больше k . На рис. 2 показан также класс кривых при $W_0 = 5 \text{ м}^2$. Пунктиром изображены соответствующие увеличению параметра k стационарные уровни для $W = 1,26$; $1,47$; $1,78$; $2,29$; $3,44 \text{ м}^2$.

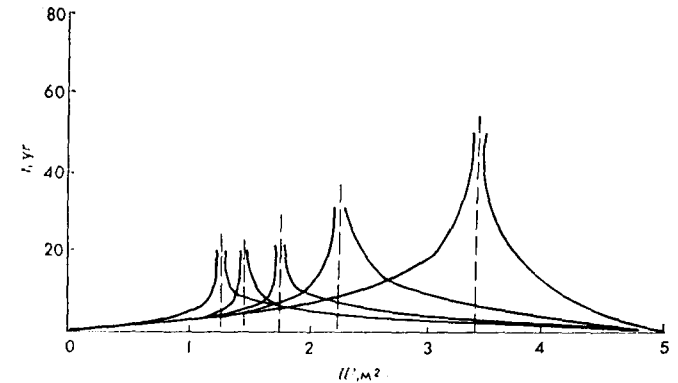


Рис. 2. Расчетные кривые по аналитическому решению (5) при $H = 100 \text{ м}$ и различных k

При введении в уравнение (2) аддитивно управляющего фактора (u), характеризующего интенсивность подпитки ($u > 0$) или изъятия ($u < 0$) материала, отмечается элементарная катастрофа типа складки при $u < 0$ (существует дважды вырожденная критическая точка). Она в принципе исследуется на основе анализа существования стационарных точек этого

уравнения, численных экспериментов по расчетам потенциальной функции $u(W)$ ($\frac{dW}{dt} = -\frac{du(W)}{dW}$) и бифуркационного множества $\psi(u, k) = 0$. Аналогичные исследования могут быть проведены и при характерном нелинейном законе истирания $\varphi(W) = \frac{cW}{\gamma + W}$ (ранее было $\varphi(W) = kW$). При этом соответствующее дифференциальное уравнение может иметь не более трех положительных стационарных точек при $u < 0$, т. е. наличие проявления катастрофы сборки при параметрах u, c . Физический смысл таких катастроф в береговых системах состоит в том, что существуют критические ситуации, при которых пляж из одного устойчивого стационарного состояния, характеризуемого его объемом, будет скачкообразно переходить в другое устойчивое стационарное состояние или исчезать.

В связи с вводом в уравнение баланса управляющего фактора возникает определенный круг задач оптимального управления, связанных с переводом системы из некоторого начального состояния в стационарное (определяемое из уравнения баланса при $\frac{dW}{dt} = 0, u = 0$) при некоторых оптимизирующих критериях. Примеры постановок и решения задач оптимального быстрогодействия рассмотрены в [3, 4].

Интересный круг задач возникает при учете в уравнении баланса периодических факторов (периодическое уравнение: $u(t) = u_0(1 + \sin pt)$), периодическая штормовая активность: $f(W, t) = f_0(W)(1 + \sin qt)$, $\varphi(W) = \varphi_0(W)(1 + \sin qt)$. Аналитические решения здесь возможны при линейных функциях $f_0(W)$ и $\varphi_0(W)$. Вместо уравнения баланса

$$\frac{dW}{dt} = aHf(W, t) - \varphi(W, t) - u(t) = (1 + \sin qt) [aHf_0(W) - \varphi_0(W)] - u(t)$$

запишем:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x)f(y) + g(x). \quad (6)$$

Для объяснения сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Если в уравнении (6) $\lambda(x)$ и $g(x)$ соответственно T_1 и T_2 — периодические функции, тогда характер поведения асимптотического решения этого уравнения (при $x \rightarrow \infty$) определяется характером устойчивости стационарных точек неосцилляционного уравнения $\frac{dy}{dx} = \lambda f(y) + g$,

где $\bar{\lambda} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \lambda(x) dx$, $\bar{g} = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} g(x) dx$, $\lambda, \bar{g} \neq 0$, а именно: если неосцилляционное уравнение имеет устойчивые стационарные точки, тогда асимптотическое решение в зависимости от начального условия $y(0)$ колеблется вокруг одной из стационарных точек с некоторым периодом T (с постоянной амплитудой при $T_1 = T_2$ имеем $T = T_1 = T_2$), равным наименьшему общему кратному T_1 и T_2 , где T_1/T_2 — рациональное число.

Для уравнения (6) могут наблюдаться динамические бифуркации при наличии локальных экстремумов функции $f(y)$ (условие касания прямой $(-\bar{g}/\lambda)$ к кривой $f(y)$). В реальных береговых системах они могут наблюдаться, например, для уравнения (2) при периодическом изъятии материала. В этом случае $\lambda(x) = 1$ и уравнение (6) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(y) + g(x), \quad (7)$$

где $g(x) < 0$ и $f(y)$ может иметь не более одного локального максимума.

Специально для этого случая сформулируем следующую теорему, которая конкретизирует теорему 1.

Теорема 2. Если в уравнении (7) гладкая (без перегибов) функция $f(y)$ имеет единственный локальный экстремум (абсолютный максимум $f_{\max} = \max\{f(y)\}$, достигаемый внутри полубесконечного интервала $(0, \infty)$, $g(x) < 0$), то она будет T -периодической функцией. Если $|\bar{g}| = \frac{-1}{T} \int_0^T g(x) dx > f_{\max}$, то решение уравнения (7) неустойчивое ($\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty$). Если $|\bar{g}| < f_{\max}$, то решение уравнения y устойчивое при $y(0) = y_1$ с периодом T , среднее значение (y_2) которого находится из решения стационарного осредненного уравнения $f(y) + \bar{g} = 0$ (из двух корней y_1, y_2 этого уравнения выбирается большее ($y_2 > y_1$), которое является устойчивым) и неустойчивое при $0 < y(0) < y_1$.

Динамическая бифуркация возникает при касании прямой $\bar{g} = \text{const}$ с максимумом функции $f(y)$: $|\bar{g}| = f_{\max}$.

Теорема 2 подтверждается при подстановке экспериментальных данных в уравнение (2) с учетом периодической функции $u(t) < 0$.

Список литературы

1. Есин Н. В. // Океанология. 1980. Т. 20. № 1. С. 111.
2. Широков В. М., Московкин В. М. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 2: Хим. Биол. Геогр. 1987. № 3. С. 51.
3. Московкин В. М., Есин Н. В. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 3. С. 731.
4. Trofimov A. M., Moskovkin V. M. // Z. Geomorphol. 1985. B. 29. № 3. S. 257.