Гауссъ, Бельтрами, Риманнъ,
Гельмгольцъ, Ли, Пуанкаре.

ОБЪ ОСНОВАНІЯХЪ ГЕОМЕТРІИ.

ИЗДАНІЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

КЪ СТОЛѢТНЕМУ ЮБИЛЕЮ

Н. И. ЛОБАЧЕВСКАГО.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1893.

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*

Предисловіе.

Работы нашего Лобачевскаго положили начало ряду изслѣдованій объ основаніяхъ геометріи; по пониманію и уясненію его геніальныхъ мыслей и дальнѣйшему ихъ развитію много способствовали своими трудами Бельтрами, Риманнъ, Гельмгольцъ, Кэли, Гуэль, Клейнъ, Клиффордъ, Ли, Пуанкаре, Киллингъ и др. [1]).

Чтобы облегчить русскимъ читателямъ знакомство съ работами этихъ ученыхъ по вопросу объ основаніяхъ геометріи, Физико-математическое Общество при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ предприняло изданіе сдѣланныхъ его членами переводовъ важнѣйшихъ мемуаровъ по этому вопросу. Въ числѣ этихъ переводовъ, къ сожалѣнію, отсутствуютъ важные мемуары проф. Феликса Клейна: „Ueber die sogenannte Nicht-euklidische Geometrie“ [2]); по ихъ значительному объему ихъ переводъ и печатаніе задержало-бы изданіе, которое выпускается къ празднованію столѣтней годовщины дня рожденія Лобачевскаго. По той-же причинѣ читатель не найдетъ въ нашемъ изданіи переводъ большихъ мемуаровъ Софуса Ли: „Ueber die Grundlagen der Geometrie“ [3]); но желая дать

---

[1]) Полная библіографія работъ по основаніямъ геометріи, по неевклидовой геометріи и по геометріи гиперпространствъ, составленная американскимъ ученымъ пр. Д. Б. Гальстедомъ, напечатана въ American Journal of Mathem. (Vol. I and II) и перепечатана съ нѣкоторыми добавленіями въ приложеніи ко второму тому сочиненій Лобачевскаго. Въ настоящее время пр. Гальстедъ занятъ вторымъ изданіемъ этой библіографіи, дополняемымъ спискомъ работъ, появившихся въ послѣдніе годы.

[2]) Mathematische Annalen Bd. IV, VI и XXXVII.

[3]) Berichte der Sächsischen Gesellschaft (phys.-math. Classe) 1890. Bd. XLII. Систематическое изложеніе своихъ изслѣдованій объ основаніяхъ геометріи Ли предполагаетъ дать въ третьемъ томѣ: «Theorie der Transformationsgruppen»

понятіе о связи, существующей между теорію группъ преобразованій, разработываемою съ такимъ успѣхомъ норвежскимъ ученымъ и ученіемъ объ основаніяхъ геометріи, мы помѣстили небольшую замѣтку Ли: „Замѣчанія на мемуаръ Гельмгольца: „О фактахъ, лежащихъ въ основаніяхъ геометріи“, представляющую резюме его работъ.

Наше собраніе мемуаровъ страдало-бы и другою неполнотою, если-бы въ немъ отсутствовала извѣстная переписка Гаусса съ Шумахеромъ по вопросу о параллельныхъ линіяхъ. Мы рѣшились поэтому присоединить къ нашему изданію переводъ этой переписки, помѣщенный въ Математическомъ Сборникѣ (томъ третій). За письмомъ Гаусса отъ 28 ноября (н. с.) 1846 г., остававшимся долго единственнымъ сочувственнымъ откликомъ на „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“, принятыя теперь въ Японіи за пособіе при преподаваніи геометріи, мы помѣщаемъ приглашеніе къ подпискѣ на фондъ Лобачевскаго, подписанное многими выдающимися представителями математической науки въ Европѣ и внѣ ея. Сопоставленіе этихъ приложеній къ нашему изданію показываетъ, какіе значительные успѣхи сдѣлала за послѣднее пятидесятилѣтіе та отрасль знаній, которой положилъ начало русскій мыслитель и геометръ, и какихъ размѣровъ достигло признаніе научнаго значенія работъ нашего великаго соотечественника.

22 Сент. 1893 г.

ИЗЪ ПЕРЕПИСКИ ГАУССА СЪ ШУМАХЕРОМЪ.

Шумахеръ къ Гауссу.

Я беру на себя смѣлость представить вамъ попытку, которую я сдѣлалъ, чтобы доказать, безъ помощи теоріи параллелей, предложеніе, по которому сумма трехъ угловъ треугольника равна 180°, — откуда вытекало бы само собою доказательство Евклидовой аксіомы. Единственныя теоремы, которыя я предполагаю доказанными, суть: что сумма всѣхъ угловъ, образуемыхъ около одной точки, равна 360° или четыремъ прямымъ угламъ и еще, что углы, противоположные въ вершинѣ, равны.

Продолжимъ неопредѣленно стороны прямолинейнаго треугольника ABC (черт. 1), или, другими словами, разсмотримъ систему трехъ прямыхъ въ одной плоскости, которыя своими пересѣченіями образуютъ треугольникъ ABC. При трехъ вершинахъ имѣемъ уравненія:

$$2a+2\alpha=4d,$$
$$2b+2\beta=4d,$$
$$2c+2\gamma=4d,$$

откуда

$$\alpha+\beta+\gamma=6d-(a+b+c).$$

Такъ какъ эти соотношенія существуютъ, какъ бы ни были расположены точки A, B и C, или, что все равно, какъ бы ни были проведены три прямыя въ плоскости, оставимъ неподвижными линіи DG, EH и заставимъ линію IF проходить черезъ точку A (черт. 2) такъ, чтобы она составляла съ EH тотъ же самый уголъ, какъ и въ первоначальномъ своемъ положеніи, или вообще, такъ какъ этотъ уголъ произволенъ,—такъ, чтобы линія IF всегда шла внутри угла. Мы будемъ имѣть тогда

$$a+b+c=4d.$$

Слѣдовательно

$$\alpha+\beta+\gamma=2d$$

Можетъ быть, возразятъ на это, что хотя и имѣемъ по предположенію

$$b \text{ (черт. 1)} = b \text{ (черт. 2)},$$

но, что равенство:

$$c \text{ (черт. 1)} = c \text{ (черт. 2)}$$

должно быть доказано.

Мнѣ кажется однако, что вслѣдствіе произвольной величины угловъ въ этомъ доказательствѣ нѣтъ необходимости.

Таковы начала доказательства, о которомъ я жду вашего отзыва. Я прибавлю только въ оправданіе моего разсужденія, что, хотя второе дѣйствіе и уничтожаетъ треугольникъ ABC, но оно не уничтожаетъ угловъ треугольника. Какъ бы ни были расположены линіи, всегда имѣемъ:

$$IBH=\beta,\ GCF=\gamma,\ DAE=\alpha,$$

какъ въ конечномъ треугольникѣ, такъ и въ исчезающемъ; сумма:

$$IAH+GAF+DAE$$

всегда равна, слѣдовательно, суммѣ угловъ прямолинейнаго треугольника.

Такимъ образомъ докажемъ предложеніе для произвольнаго треугольника (котораго углы суть A, B, C), проводя линіи DG, EH такъ, чтобы было $\alpha=A$, и дѣлая кромѣ того $IAH=B$ и $GAF=C$. Если бы тогда IAF оказалась не прямою, но ломаною линіею IAF', то уголъ c сдѣлался бы меньше на dc; но уголъ b сталъ бы на туже величину больше, такъ что сумма этихъ угловъ осталась бы безъ перемѣны и мы имѣли бы,—что намъ и требуется для доказательства,—равенство:

$$b+c \text{ (черт. 1)} = b+c \text{ (черт. 2)}.$$

Копенгагенъ, 3-го мая 1831 года.

Гауссъ къ Шумахеру.

Разсматривая внимательно то, что вы мнѣ пишете о теоріи параллелей, я замѣчаю, что вы употребили въ вашихъ разсужденіяхъ, не выразивъ его явно, слѣдующее предложеніе:

Если двѣ пересѣкающіяся прямыя, (1) и (2), образуютъ съ третьею прямою (3), ихъ встрѣчающею, соотвѣтственно углы A' и A'', и если четвертая прямая (4), лежащая въ той же плоскости, будетъ пересѣкать (1) подъ угломъ A', то таже прямая (4) будетъ пересѣкать (2) подъ угломъ A''.

Это предложеніе не только требуетъ доказательства, но можно сказать, что оно-то въ сущности и составляетъ ту теорему, о доказательствѣ которой идетъ рѣчь.

Вотъ уже нѣсколько недѣль, какъ я началъ излагать письменно нѣкоторые результаты моихъ собственныхъ размышленій объ этомъ предметѣ, занимавшихъ меня сорокъ лѣтъ тому назадъ и никогда мною не записанныхъ, вслѣдствіе чего я долженъ былъ три или четыре раза возобновлять весь трудъ въ моей головѣ. Мнѣ не хотѣлось бы однако, чтобы это погибло вмѣстѣ со мною [1]).

Гетингенъ, 17 мая 1831 года.

Шумахеръ къ Гауссу.

Я опять рѣшаюсь васъ обезпокоить по поводу теоріи параллельныхъ линій.

Продолжимъ неопредѣленно стороны прямолинейнаго треугольника ABC (черт. 3) и возмемъ радіусъ R столь большой, что отношенія $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ сдѣлались бы менѣе всякой данной величины.

Этимъ радіусомъ изъ центра C опишемъ полуокружность $DEFG$. Такъ какъ стороны a, b и c могутъ быть разсматриваемы, какъ исчезающія по отношенію къ этой полуокружности, и слѣдовательно точки A и B, какъ совпадающія съ C, то эта полуокружность будетъ мѣрою трехъ угловъ треугольника, сумма которыхъ будетъ поэтому отличаться отъ $180°$ какъ угодно мало.

Мнѣ кажется, что, если не отвергать понятія о величинѣ неопредѣленно возрастающей, это разсужденіе весьма просто доказываетъ, что во всякомъ *конечномъ* прямолинейномъ треугольникѣ сумма угловъ равна $180°$, или лучше, что постоянное, которое должно было бы дополнять сумму угловъ до $180°$, если бы геометрія Евклида не была истинною,—менѣе всякой данной величины. Такъ какъ тоже доказательство мо-

---

[1]) Къ крайнему сожалѣнію до сихъ поръ остается неизвѣстнымъ, сохранилась ли эта рукопись въ бумагахъ, оставшихся послѣ Гаусса или нѣтъ. Пр. пер.

жетъ быть повторено для произвольнаго треугольника, то ясно что это постоянное не можетъ зависѣть отъ величины треугольника.

Любекъ. 25 мая 1831 года.

Шумахеръ къ Гауссу.

Я желалъ бы встрѣтить, въ полученномъ мною отъ васъ письмѣ, ваше сужденіе о моемъ способѣ доказательства, что сумма угловъ прямолинейнаго треугольника отличается отъ 180° на величину, меньшую всякой данной. Вы легко повѣрите, что вашъ отзывъ весьма важенъ для меня; я знаю, съ какою легкостію вы открываете слабую сторону разсужденія. Я никому еще не сообщалъ объ этомъ предметѣ, исключая васъ, моихъ помощниковъ и профессора Ганзена въГотѣ. Никто изъ насъ не могъ открыть паралогизма.

Если бы кто либо нашелъ необходимымъ (чего я не думаю) доказать предложеніе, по которому въ кругѣ безконечнаго радіуса (я употребляю слово *безконечнаго* для сокращенія рѣчи) можно разсматривать вершины треугольника, какъ центры круговъ, совпадающихъ между собою, то это доказательство легко было бы выполнить со всею строгостію.

Мнѣ кажется, что когда двѣ точки находятся на конечномъ разстояніи одна отъ другой, то это разстояніе должно быть разсматриваемо, какъ нуль, сравнительно съ линіею безконечной. Слѣдовательно эти точки совпадаютъ одна съ другою относительно этой безконечной линія.

Альтона, 29 іюня 1831 года.

Гауссъ къ Шумахеру.

Я бы давно уже и съ большимъ удовольствіемъ сообщилъ бы вамъ мое мнѣніе о теоріи параллелей, въ отвѣтъ на ваше первое письмо, если бы не предполагалъ, что безъ достаточныхъ развитій оно не можетъ быть вамъ очень полезно. Для того, чтобы мое изложеніе было вполнѣ убѣдительно, нужно было бы много страницъ разъясненій о томъ, что вамъ достаточно было узнать въ нѣсколькихъ строкахъ и притомъ эти разъясненія потребовали бы спокойствія духа, котораго у меня недостаетъ въ настоящую минуту. Я однако скажу вамъ объ этомъ предметѣ нѣсколько словъ, чтобы доказать вамъ мое доброе желаніе.

Вы начинаете прямо съ случая произвольнаго треугольника. Но вы могли бы приложить тоже самое разсужденіе, упрощая вопросъ, сперва къ простѣйшему случаю, высказывая такую теорему:

(1) *Во всякомъ треугольникѣ, у котораго одна сторона конечная, а другая, и слѣдовательно также третья, безконечная, сумма двухъ угловъ прилежащихъ къ конечной сторонѣ, равна* 180°. *Доказательство по вашему способу.* — Дуга круга CD (черт. 4) есть мѣра угла CAD и также мѣра угла CBD, потому что въ кругѣ безконечнаго радіуса конечное перемѣщеніе центра должно быть разсматриваемо какъ нуль. Слѣдовательно

$$CAD = CBD, \qquad CAD + CBA = CBD + CBA = 180^\circ.$$

Остальное оканчивается безъ затрудненія. Въ самомъ дѣлѣ, по этой теоремѣ имѣемъ: (черт. 5)

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\delta &= 180^\circ, \\ 180^\circ &= \varepsilon+\delta, \\ \gamma+\varepsilon &= 180^\circ, \end{aligned}$$

откуда, взявъ сумму этихъ равенствъ, найдемъ:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ.$$

Теперь, что касается до вашего доказательства теоремы (1), то я, вопервыхъ, протестую противъ того употребленія, которое вы дѣлаете изъ безконечной величины, трактуя ее какъ количество опредѣленное (*vollendeten*), что никогда не можетъ быть допускаемо въ математикѣ. Безконечность есть только условное выраженіе—тогда какъ, на самомъ дѣлѣ, рѣчь идетъ о предѣлахъ, къ которымъ могутъ стремиться одни отношенія, тогда какъ другія могутъ возрастать неопредѣленно. Въ этомъ смыслѣ *неевклидова геометрія* не имѣетъ въ себѣ никакихъ противорѣчій, хотя, по первому взгляду, многіе изъ ея результатовъ имѣютъ видъ парадоксовъ. Эти кажущіеся противорѣчія должны быть разсматриваемы какъ дѣйствія иллюзіи, происходящей отъ привычки, которую мы себѣ уже давно усвоили, разсматривать Евклидову геометрію, какъ *строгую*.

Въ неевклидовой геометріи въ фигурахъ никогда не бываетъ подобія безъ равенства. Напримѣръ, углы равносторонняго треугольника (черт. 6) нетолько различны отъ $^2/_3$ прямаго угла, но притомъ они могутъ измѣняться съ величиною сторонъ, и если стороны возрастаютъ безпредѣльно, то они могутъ сдѣлаться сколь угодно малыми. Тутъ слѣдовательно будетъ противорѣчіе уже въ самомъ желаніи *начертить* такой треугольникъ по подобію посредствомъ треугольника меньшаго. Можно только обозначить его общее расположеніе. Такимъ образомъ, *обозначеніе* безконечнаго треугольника въ предѣлѣ было бы такое, какъ на черт. 7.

Въ Евклидовой геометріи ничто не велико абсолютнымъ образомъ; но не такъ будетъ въ неевклидовой геометріи, и въ этомъ именно ея отличительный характеръ. Тѣ, которые не допускаютъ этого, тѣмъ самымъ уже полагаютъ основаніе всей Евклидовой геометріи; но какъ я уже сказалъ, по моему убѣжденію, съ ихъ стороны это есть чистая иллюзія. Въ разсматриваемомъ случаѣ не будетъ абсолютно никакого противорѣчія, если мы скажемъ, при двухъ данныхъ точкахъ A и B и направленіи AC (черт. 3), по которому точка C удаляется неопредѣленно, что хотя уголъ DBC приближается все болѣе и болѣе къ углу DAC, но все таки разность этихъ двухъ угловъ нельзя сдѣлать менѣе нѣкоторой конечной величины.

Введеніе дуги CD дѣлаетъ безъ сомнѣнія ваше заключеніе болѣе правдоподобнымъ. Но если разъяснить то, что вы только указали, то должно будетъ выразить это такъ (черт. 9):

$$CAD : CBD = \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{ECD'},$$

и тогда какъ AC возрастаетъ неопредѣленно, CD и CD' съ одной стороны и ECD и $E'CD$ съ другой стремятся непрерывно къ равенству.

Эти заключенія не имѣютъ мѣста въ неевклидовой геометріи, если понимать подъ этимъ, что геометрическія отношенія этихъ количествъ будутъ сколь угодно близки къ равенству. Въ самомъ дѣлѣ въ неевклидовой геометріи, полуокружность круга радіуса r имѣетъ величину

$$\frac{1}{2}\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right)$$

гдѣ k есть постоянное, которое намъ опытъ указываетъ чрезвычайно большимъ по отношенію ко всему, что можетъ быть нами измѣряемо. Въ Евклидовой геометріи это постоянное дѣлается безконечностью.

На фигуральномъ языкѣ теоріи безконечности должно было бы, слѣдовательно, сказать, что окружности двухъ безконечныхъ круговъ, радіусы которыхъ отличаются на величину конечную, сами различаются между собою на величину, имѣющую къ каждой изъ окружностей конечное отношеніе.

Нѣтъ никакого противорѣчія въ томъ, что человѣкъ, существо конечное, не пускается въ сужденія о безконечномъ, какъ о предметѣ данномъ и вполнѣ обнимаемомъ его обыкновенными силами пониманія.

Вы видите, что здѣсь споръ соприкасается непосредственно съ областію метафизики.

Гетингенъ, 12 іюля 1831 года.

Гауссъ къ Шумахеру.

Въ послѣднее время я имѣлъ случай перечитать небольшое сочиненіе Лобачевскаго подъ заглавіемъ: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* Это сочиненіе содержитъ въ себѣ основанія геометріи, которая должна бы была существовать, и строгое развитіе которой представляло бы непрерывную цѣпь, если бы Евклидова геометрія не была истинною. Нѣкто Швейкартъ [1]) далъ этой геометріи имя *„géométrie australe“*, а Лобачевскій—*геометріи воображаемой.*

Вы знаете, что уже пятьдесятъ четыре года (съ 1792), какъ я раздѣляю тѣ-же взгляды, не говоря здѣсь о нѣкоторыхъ развитіяхъ, которыя получили мои идеи объ этомъ предметѣ впослѣдствіи. Слѣдовательно, я собственно не нашелъ въ сочиненіи Лобачевскаго ни одного новаго для меня факта; но изложеніе весьма различно отъ того, какое я предполагалъ сдѣлать, и авторъ трактуетъ о предметѣ, какъ знатокъ, въ истинно-геометрическомъ духѣ. Я считалъ себя обязаннымъ обратить Ваше вниманіе на эту книгу, чтеніе которой не преминетъ вамъ доставить живѣйшее удовольствіе.

Гетингенъ, 28 ноября 1846 года.

---

[1]) Профессоръ юриспруденціи прежде въ Марбургѣ, потомъ въ Кенигсбергѣ.

Отъ комитета

ДЛЯ ОБРАЗОВАНІЯ КАПИТАЛА ИМЕНИ

Н. И. ЛОБАЧЕВСКАГО.

22 октября 1893 года исполнится столѣтіе со дня рожденія знаменитаго русскаго геометра Лобачевскаго.

Николай Ивановичъ Лобачевскій принадлежитъ несомнѣнно къ числу тѣхъ ученыхъ XIX столѣтія, работы которыхъ явились не только цѣннымъ вкладомъ въ науку, но и открыли ей новые пути.

Геніальнымъ умамъ, прокладывающимъ новые пути, часто приходилось отвергать положенія, считавшіяся до нихъ неоспоримою и нетребующею доказательства истиною.

Такая же почетная роль въ наукѣ выпала и на долю Н. И. Лобачевскаго, этого „Коперника геометріи", какъ называлъ его покойный Клиффордъ.

Съ тѣхъ поръ какъ Евклидъ построилъ безсмертное зданіе своей геометріи на немногихъ опредѣленіяхъ, аксіомахъ и постулатумахъ, принятыхъ имъ безъ доказательства, истина этихъ основаній геометріи не подвергалась сомнѣнію; всѣ усилія ученыхъ всѣхъ странъ и вѣковъ были направлены на сведеніе числа этихъ аксіомъ и постулатумовъ къ наименьшему; исторія науки представляетъ, напримѣръ, цѣлый рядъ попытокъ вывести такъ называемый постулатумъ Евклида о встрѣчѣ перпендикуляра и наклонной, какъ математическое слѣдствіе прочихъ опредѣленій, аксіомъ и постулатумовъ; истина самого постулатума не подвергалась сомнѣнію.

Лобачевскій первый увидѣлъ здѣсь вопросъ, который можетъ быть рѣшенъ только опытомъ и, придя къ убѣжденію, что, утверждая существованіе постулатума Евклида, мы принимаемъ тѣмъ самымъ извѣстныя свойства нашего пространства, которыя могутъ быть провѣрены только путемъ опыта или наблюденія, показалъ возможность построенія геометріи безъ этого постулатума. Свою мысль Лобачевскій осуществилъ въ рядѣ мемуаровъ съ послѣдовательностью и точностью „истиннаго геометра", какъ выразился Гауссъ.

Этотъ „princeps mathematicorum" привѣтствовалъ работы Лобачевскаго еще въ 1846 г.: но привѣтствіе Гаусса прошло незамѣченнымъ, и нужно было пройти еще извѣстному времени для того, чтобы высокое научное и философское значеніе работъ Лобачевскаго было признано всѣми. Такому признанію работъ Лобачевскаго способствовали труды многихъ первоклассныхъ ученыхъ нашего времени, которые выяснили между прочимъ, что геометрія Лобачевскаго для двухъ измѣреній представляетъ геометрію на поверхности съ постоянною отрицательною кривизною, а геометрія трехъ измѣреній даетъ понятіе о новыхъ протяженностяхъ,—пространствахъ, имѣющихъ кривизну.

Изученіе геометріи Лобачевскаго или неевклидовой геометріи образовало въ послѣднія два десятилѣтія особую вѣтвь математическихъ знаній, имѣющую обширную литературу. Къ изслѣдованіямъ по геометріи Лобачевскаго примыкаютъ и составляютъ ихъ непосредственное продолженіе изслѣдованія по геометріи гиперпространствъ, которыя, бросая яркій свѣтъ на многіе вопросы геометріи, въ то же время являются незамѣнимымъ пособіемъ при изученіи важнѣйшихъ вопросовъ анализа.

Высокому научному значенію изслѣдованій Лобачевскаго соотвѣтствуетъ не менѣе высокое философское ихъ значеніе. Съ одной стороны они открываютъ умозрѣнію новый вопросъ объ изслѣдованіи свойствъ пространства; съ другой стороны они бросаютъ новый свѣтъ на вопросъ о происхожденіи и значеніи нашихъ геометрическихъ аксіомъ и имѣютъ, такимъ образомъ, высокую важность для теоріи познанія.

Благородная жизнь Лобачевскаго тѣсно и неразрывно связана съ исторіею Императорскаго Казанскаго Университета: онъ былъ первый его питомецъ, занявшій профессорскую каѳедру; въ немъ исполнялъ онъ въ теченіе долгаго времени обязанности ректора и профессора.

Физико-математическое Общество, состоящее при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ, не могло поэтому не обратить особеннаго вниманія на достойное ознаменованіе столѣтней годовщины дня рожденія великаго русскаго математика. Исходатайствовавъ Высочайшее разрѣшеніе на открытіе подписки для образованія капитала съ цѣлью увѣковѣченія имени Н. И. Лобачевскаго, оно организовало для болѣе успѣшнаго достиженія этой цѣли комитетъ, который и обращается теперь къ ученымъ и друзьямъ науки всѣхъ странъ съ просьбою о содѣйствіи. Первымъ и главнымъ назначеніемъ капитала будетъ учрежденіе достойной значенія великаго мыслителя и математика преміи имени Лобачевскаго, носящей международный характеръ и выдаваемой за ученыя сочиненія по математикѣ (преимущественно по тѣмъ отраслямъ ея, которыя находятся въ связи съ работами Лобачевскаго). Такая премія дастъ молодымъ ученымъ, посвятившимъ свои силы любимой Лобачевскимъ наукѣ, поддержку и ободреніе и вмѣстѣ съ тѣмъ явится новымъ выраженіемъ единства всѣхъ культурныхъ народовъ въ ихъ стремленіи къ научной истинѣ.

Взносы просятъ высылать по адресу:
Казань, Физико-математическое Общество.

Почетные члены Комитета.

Алексѣевъ, В. Г., приватъ-доцентъ Университета, Москва.

Андреевъ, К. А., профессоръ Университета, предсѣдатель Математическаго Общества, Харьковъ.

Анисимовъ, В. А., профессоръ Университета, Варшава.

Баттальини, Дж., профессоръ Университета, вице президентъ Королевскаго Неаполитанскаго Общества, Неаполь.

Бельтрами, Е., профессоръ Университета, членъ Академіи „dei Lincei", Римъ.

Бобынинъ, В. В., приватъ-доцентъ Университета, редакторъ журнала „Физико-математическія Науки", Москва.

Бугаевъ, Н. В., заслуженный профессоръ Университета, предсѣдатель Математическаго Общества, Москва.

Букрѣевъ, Б. Я., профессоръ Университета Св. Владиміра, Кіевъ.

Введенскій, А. И., профессоръ Университета, С.-Петербургъ.

Веронезе, Дж., профессоръ Университета, Падуя.

Вейръ, Эд., профессоръ Высшей Технической Школы, секретарь Чешскаго Математическаго Общества, Прага.

Ворошиловъ, К. В., ректоръ и профессоръ Университета, Казань.

Гальдеано, С. Г., профессоръ Университета, Сарагоса.

Гальстедъ, Дж. Б., профессоръ Техасскаго Университета, Аустинъ.

Гезехусъ, Н. А., вице-директоръ и профессоръ Технологическаго Института, С.-Петербургъ.

Гельмгольцъ, Г., тайн. сов., директоръ Имперскаго Физико-техническаго Института, Шарлоттенбургъ.

Гротъ, Н. Я., профессоръ Университета, предсѣдатель Психологическаго Общества, Москва.

Гуччіа, Д. Б., профессоръ Университета, Палермо.

Гюнтеръ, С., профессоръ Высшей Технической Школы, Мюнхенъ.

Дарбу, Г., членъ Института, деканъ „Faculté des Sciences", Парижъ.

Дикъ, В., профессоръ Высшей Технической Школы, членъ Баварской Академіи Наукъ, Мюнхенъ.

Долбня. И. П., преподаватель Кадетскаго Корпуса, Нижній Новгородъ.

Дюрежъ, Г., профессоръ Университета, Прага.

Жуковскій, Н. Е., профессоръ Университета, Москва.

Зининъ, Н. Н., профессоръ Университета, Варшава.

Кикучи, Д., профессоръ Университета, Токіо.

Киллингъ, В., профессоръ Академіи, Мюнстеръ.

Кирпичевъ, В. Л., директоръ Технологическаго Института, Харьковъ.

Клейнъ, Ф., профессоръ Университета, Гёттингенъ.

Кнезеръ, А., профессоръ Университета, Юрьевъ.

Ковальскій, М. Ф., профессоръ Университета, Харьковъ.

Коркинъ, А. Н., заслуженный профессоръ Университета. С.-Петербургъ.

Кремона, Л., профессоръ Университета, сенаторъ, Римъ.

Кэли, А., профессоръ Университета, членъ „Royal Society", Кембриджъ.

Лампе, Э., профессоръ Высшей Технической Школы и Военной Академіи, Берлинъ.

Лахтинъ, Л. К., профессоръ Университета, Юрьевъ.

Ли, Софусъ, профессоръ Университета, Лейпцигъ.

Либманнъ, О., профессоръ Университета, Іена.

Лигинъ, В. Н., профессоръ Новороссійскаго Университета, Одесса.

Линдеманнъ, Ф., профессоръ Университета, Кёнигсбергъ.

Линдеманнъ, Э. Э., ученый секретарь Николаевской Главной Астрономической Обсерваторіи, Пулково.

Липшицъ, Р., профессоръ Университета, Боннъ.

Лоріа, Дж., профессоръ Университета, Генуя.

Люротъ, I., профессоръ Университета, Фрейбургъ (Баденъ).

Ляпуновъ, А. М., профессоръ Университета, Харьковъ.

Макаровъ, А. Н., ген.-м., директоръ Педагогическаго Музея Военно-учебныхъ заведеній, С.-Петербургъ.

Макфарланъ, А., профессоръ Техасскаго Университета, Аустинъ.

Мансіонъ, П., профессоръ Университета, членъ Бельгійской Академіи, Гентъ.

Марковъ, А. А., академикъ, профессоръ Университета, С.-Петербургъ.

Мемке, Р., профессоръ Высшей Технической Школы, Дармштадтъ.

Менделѣевъ, Д. И., тайн. сов., засл. профессоръ Университета, С.-Петербургъ.

Миттагъ-Леффлеръ, Г., ректоръ и профессоръ Университета, Стокгольмъ.

Млодзѣевскій, Б. К., профессоръ Университета, Москва.

Муръ, Е. Г., профессоръ Университета, Чикаго.

Неовіусъ, Э. Р., профессоръ Александровскаго Университета, Гельсингфорсъ.

Нешичъ, Д., ректоръ и профессоръ Великой школы, Бѣлградъ.

Ньюкомбъ, С., профессоръ Университета Джона Гопкинса, Балтимора.

д'Овидіо, Э., профессоръ Университета, Туринъ.

Пашъ, М., профессоръ Университета, Гиссенъ.

Пеано, Дж., профессоръ Университета, Туринъ.

Первушинъ, I. М., священникъ, Шадринскій у. Перм. губ.

Пероттъ, I., профессоръ Университета Кларка, Ворчестеръ (Массачузетсъ).

Покровскій, П. М., профессоръ Университета Св. Владиміра, Кіевъ.

Порѣцкій, П. С., докторъ астрономіи, Городня (Черниг. губ.).

Поссе, К. А., профессоръ Университета, С.-Петербургъ.

Потаповъ, Н. Г., тайн. сов., попечитель Учебнаго Округа, Казань.

Преображенскій, П. В., секретарь Отдѣленія физическихъ наукъ Общества Любителей Естествознанія, Москва.

Пташицкій, И. Л., профессоръ Университета, С.-Петербургъ.

Пуанкаре, Г., членъ Института, профессоръ „Faculté des Sciences“, Парижъ.

Пухта, А., профессоръ Университета, Черновицы (Буковина).

Рахманиновъ, И. И., заслуженный профессоръ Университета Св. Владиміра, Кіевъ.

Рейе, Т., профессоръ Университета, Страссбургъ.

Сегре, К., профессоръ Университета, Туринъ.

Селивановъ, Д. Ѳ., профессоръ Технологическаго Института, С.-Петербургъ.

Сикстель, В. А., преподаватель Неплюевскаго Кадетскаго Корпуса, Оренбургъ.

Сильвестръ Дж., Савиліанскій профессоръ Университета, Оксфордъ

Слешинскій, И. В., профессоръ Новоросійскаго Университета, Одесса.

Слудскій, Ѳ. А, заслуженный профессоръ Университета, Москва

Сонинъ, Н. Я., академикъ, С.-Петербургъ.

Сохоцкій, Ю. В., профессоръ Университета, предсѣдатель Математическаго Общества, С.-Петербургъ.

Стебницкій, І. И., ген-лейт., начальникъ Военно-топографическаго Отдѣла Главнаго Штаба, С.-Петербургъ,

Столѣтовъ, А. Г., заслуженный профессоръ Университета, Москва.

Стрингамъ, Ирв., профессоръ Калифорнскаго Университета, Беркелей.

Сусловъ, Г. К., профессоръ Университета, Кіевъ.

де Тили, Ж. М., директоръ Военной Школы, членъ Кор. Бельгійской Академіи, Брюссель.

Тейхейра, Г., заслуженный профессоръ Университета въ Коимбрѣ, директоръ Политехнической Академіи, Опорто.

Тилло, А. А., ген.-маіоръ, предсѣдатель отдѣленія математической географіи Императорскаго Р. Географическаго Общества, членъ корреспондентъ Императорской и Парижской Академій Наукъ, С.-Петербургъ.

Тиме, И. А., тайн. сов., профессоръ Горнаго Института, членъ Горнаго Ученаго Комитета, С.-Петербургъ.

Тихомандрицкій, М. А., профессоръ Университета, Харьковъ.

Федоровъ, Е. С., профессоръ Горнаго Института, С.-Петербургъ.

Фли де С. Мари, репетиторъ Политехнической Школы, Парижъ.

Фришауфъ, І., профессоръ Университета, Грацъ.

Цингеръ, В. Я., заслуженный профессоръ Университета, Москва.

Чебышевъ, П. Л., дѣйств. тайн. сов., академикъ, С.-Петербургъ.

Чезаро, Е., профессоръ Университета, Неаполь.

Чеховичъ, К. А., окружный инспекторъ Учебнаго Округа, Оренбургъ

Шапира, Г., профессоръ Университета, Гейдельбергъ.

Шерингъ, Э., тайн. сов., профессоръ Университета, Гёттингенъ.

Шиллеръ, Н. Н., профессоръ Университета Св. Владиміра, предсѣдатель Физико-Математическаго Общества, Кіевъ.

Шиффъ, В. О., преподавательница Высшихъ Женскихъ Курсовъ, С.-Петербургъ.

Шиффъ, П. А., преподаватель Артиллерійской Академіи, секретарь Петербургскаго Математическаго Общества, С.-Петербургъ.

Шлегель, В., заслуженный учитель, Гагенъ.

Шуръ, Ф., профессоръ Высшей Технической Школы, Аахенъ.

Шуте, П., профессоръ Университета, Гронингенъ.

Энгельгардтъ, В. П., докторъ астрономіи, Дрезденъ.

Эрдманъ, Б., профессоръ Университета, Галле.

Эрмитъ, Ш., членъ Института, Парижъ.

Эшерихъ, Г., профессоръ Университета, Вѣна.

Янишевскій, Э. П., заслуженный профессоръ Университета, Казань.

Ярошенко, С. П., профессоръ Новороссійскаго Университета, Одесса.

Мѣстный Распорядительный Комитетъ.

Предсѣдатель Физико-математическаго Общества профессоръ **А. В. Васильевъ**.

Вице-предсѣдатель Физико-математическаго Общества профессоръ **Ѳ. М. Суворовъ**.

Бехтеревъ, В. М., профессоръ Университета, предсѣдатель Общества Невропатологовъ и Психіатровъ.

Гольдгаммеръ, Д. А., профессоръ Университета.

Дубяго, Д. И., профессоръ Университета.

Жбиковскій, А. К., докторъ математики, засл. преподаватель, приватъ-доцентъ Университета.

Зейлигеръ, Д. Н., профессоръ Университета, секретарь Физико-математическаго Общества.

Износковъ, И. А., директоръ Реальнаго Училища.

Имшеникъ, I. А., директоръ 2-й гимназіи.

Котельниковъ, А. П., приватъ-доцентъ Университета, казначей Физико-математическаго Общества.

Назимовъ, П. С., профессоръ Университета.

Порфирьевъ, Н. И., приватъ-доцентъ Университета.

Синцовъ, Д. М., магистрантъ чистой математики.

Слугиновъ, Н. П., профессоръ Университета.

Смирновъ, А. И., профессоръ Университета.

ОПЫТЪ ОБЪЯСНЕНІЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРІИ,

Е. БЕЛЬТРАМИ [1]).

Переводъ П. П. Мея.

Въ послѣднее время математическій міръ началъ заниматься новыми идеями, которымъ, повидимому, суждено глубоко измѣнить составившіяся до сихъ поръ понятія о происхожденіи геометрическихъ истинъ.

Идеи эти появились не совсѣмъ недавно. Знаменитый Гауссъ съ первыхъ своихъ шаговъ на научномъ поприщѣ обратилъ на нихъ вниманіе; хотя ни въ одномъ изъ его сочиненій не заключается явнаго ихъ изложенія, но изъ писемъ его мы видимъ, до какой степени онъ былъ имъ преданъ, и можемъ удостовѣриться въ его полномъ согласіи съ ученіемъ Лобачевскаго.

Подобныя попытки коренного обновленія принциповъ встрѣчаются нерѣдко въ исторіи науки. Онѣ являются естественнымъ результатомъ того критическаго духа, которымъ совершенно основательно проникаются болѣе и болѣе научныя изслѣдованія. Когда такія попытки являются плодомъ добросовѣстныхъ изысканій и искреннихъ убѣжденій, когда онѣ находятъ поддержку въ импонирующемъ и даже неоспоримомъ авторитетѣ, людямъ науки необходимо разбирать ихъ спокойно, одинаково удерживаясь какъ отъ энтузіазма, такъ и отъ пренебреженія. Съ другой стороны въ исторіи математической науки торжество новыхъ понятій не можетъ пошатнуть истинъ уже пріобрѣтенныхъ, — оно можетъ измѣнить только положеніе ихъ въ наукѣ, и увеличить или уменьшить ихъ значеніе и ихъ пользу. Глубокая критика принциповъ не можетъ никогда повредить прочности научнаго зданія даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда она не приводитъ къ открытію и лучшему познанію его истинныхъ основаній.

---

[1]) Giornale di matematiche, publ. per G. Battaglini t. VI, 1868.

Мы старались во первыхъ дать себѣ отчетъ въ результатахъ, къ которымъ приводитъ ученіе Лобачевскаго и затѣмъ слѣдуя пріему, вполнѣ, по нашему мнѣнію, согласному съ хорошими традиціями научнаго изслѣдованія, мы попытались отыскать реальное основаніе для этого ученія. Думаемъ, что это удалось намъ для планиметрической части; но намъ кажется невозможнымъ сдѣлать тоже въ случаѣ трехъ измѣреній.

Настоящій мемуаръ имѣетъ цѣлью преимущественно выполненіе перваго изъ этихъ намѣреній; что касается второго, мы удовольствуемся въ настоящее время нѣсколькими указаніями, чтобы было возможно болѣе правильное сужденіе о смыслѣ нашего объясненія.

Чтобы не прерывать слишкомъ часто изложенія, мы помѣстили въ отдѣльныхъ примѣчаніяхъ, въ концѣ мемуара, объясненія, относящіяся къ нѣкоторымъ аналитическимъ результатамъ, на которыхъ мы должны основываться.

I.

Основной пріемъ доказательствъ элементарной геометріи состоитъ въ *наложеніи равныхъ фигуръ*.

Этотъ пріемъ приложимъ не только къ плоскости, но также ко всѣмъ поверхностямъ, на которыхъ равныя фигуры могутъ существовать въ различныхъ положеніяхъ, т. е. ко всѣмъ поверхностямъ, которыхъ произвольная часть можетъ быть точно приложена посредствомъ простого сгибанія къ другой произвольной части той же поверхности. Дѣйствительно, мы видимъ, что несгибаемость поверхностей, на которыхъ начерчены фигуры, не есть существенное условіе приложенія этого пріема; напр., правильность доказательства плоской Евклидовой геометріи не была бы ни въ чемъ нарушена, если бы стали разсматривать фигуры начерченными на поверхности цилиндра или конуса, а не на плоскости.

Поверхности, для которыхъ безъ ограниченія оправдывается свойство, о которомъ идетъ рѣчь, суть, по знаменитой теоремѣ Гаусса, всѣ поверхности, имѣющія въ каждой изъ своихъ точекъ постоянное произведеніе двухъ главныхъ радіусовъ кривизны, или, иначе выражаясь всѣ поверхности, которыхъ мѣра кривизны постоянна. Другія поверхности не допускаютъ неограниченнаго приложенія принципа наложенія для сравненія начерченныхъ на нихъ фигуръ, вслѣдствіе чего фигуры эти не могутъ имѣть строенія, вполнѣ независящаго отъ ихъ положенія.

Самый существенный элементъ фигуръ и построеній элементарной геометріи есть прямая линія. Специфическое свойство этой линіи есть то, что она вполнѣ опредѣляется только двумя своими точками, такъ что двѣ прямыя не могутъ проходить черезъ двѣ данныя точки пространства, не совпадая на всемъ своемъ протяженіи. Между тѣмъ въ геометріи на плоскости это свойство не примѣнено во всей широтѣ, потому что, всматриваясь въ дѣло ближе, мы видимъ, что прямая введена въ разсужденія планиметріи только помощью слѣдующаго постулата: „при совмѣщеніи двухъ плоскостей, на каждой изъ которыхъ есть прямая, достаточно обѣимъ прямымъ совпасть въ двухъ точкахъ, чтобы онѣ слились на всемъ своемъ протяженіи".

Однако это свойство, опредѣленное такимъ образомъ, не принадлежитъ исключительно прямымъ линіямъ по отношенію къ плоскости; оно имѣетъ мѣсто, вообще говоря, для геодезическихъ линій на поверхности съ постоянной кривизной по отношенію къ этимъ поверхностямъ. Геодезическая линія всякой поверхности имѣетъ уже свойство опредѣляться вполнѣ (говоря вообще) двумя своими точками. Но для поверхностей постоянной кривизны, и только для нихъ, существуетъ всецѣло свойство, аналогичное свойству прямой на плоскости, т. е. „если имѣются двѣ поверхности, которыхъ кривизна въ каждой точкѣ постоянна и одинакова для обѣихъ поверхностей, и если на каждой изъ нихъ взяты геодезическія линіи, то при совмѣщеніи поверхностей такимъ образомъ, чтобы геодезическія линіи имѣли двѣ общія точки, эти линіи совпадутъ (вообще) на всемъ своемъ протяженіи".

Изъ этого слѣдуетъ, что кромѣ случаевъ, въ которыхъ это свойство подлежитъ исключеніямъ, теоремы планиметріи, доказываемыя для фигуръ на плоскости посредствомъ принципа наложенія и постулата о прямой, имѣютъ мѣсто равнымъ образомъ для фигуръ, образованныхъ аналогично геодезическими линіями на поверхности постоянной кривизны.

На этомъ именно основаны многочисленныя аналогіи между геометріей сферы и геометріей плоскости (считая прямыя линіи послѣдней соотвѣтствующими геодезическимъ линіямъ первой т. е. окружностямъ большихъ круговъ), и эти аналогіи уже давно были замѣчены геометрами. Если иныя аналогіи того же происхожденія не были подобнымъ образомъ сразу замѣчены, то это нужно приписать тому, что понятіе о поверхностяхъ гибкихъ и наложимыхъ одна на другую вполнѣ усвоено только въ послѣднее время.

Мы сдѣлали намекъ на исключенія, могущія разрушить или ограничить указанную аналогію въ вопросѣ. Эти исключенія дѣйствительно существуютъ. На сферической поверхности напр. двѣ точки перестаютъ вполнѣ опредѣлять окружность большого круга, когда онѣ діаметрально противоположны. Поэтому нѣкоторыя теоремы планиметріи не имѣютъ себѣ аналогичныхъ на сферѣ, какъ напр. теорема: „двѣ прямыя, перпендикулярныя къ третьей, не могутъ встрѣтиться".

Эти соображенія послужили исходною точкою нашихъ изысканій. Мы начали съ того, что замѣтили, что заключенія какого-нибудь доказательства обнимаютъ необходимо цѣлую категорію сущностей, въ которыхъ имѣются всѣ необходимыя условія для законности этого доказательства. Если при изложеніи доказательства имѣлась въ виду опредѣленная категорія сущностей и если при этомъ не было введено опредѣленій, обособляющихъ разсматриваемую категорію отъ категоріи болѣе обширной, то ясно, что заключенія доказательства пріобрѣтаютъ общность, большую той, которую искали. Въ этомъ случаѣ можетъ оказаться, что нѣкоторыя изъ заключеній покажутся несогласными съ природой именно тѣхъ сущностей, которыя первоначально имѣлись въ виду, потому что извѣстныя свойства, существующія вообще для данной категоріи сущностей, могутъ значительно видоизмѣниться или даже и вовсе исчезнуть для нѣкоторыхъ изъ этихъ сущностей въ частности. Въ такомъ случаѣ результаты изысканій представляютъ видимыя противорѣчія, которыхъ умъ не можетъ понять, если не замѣтитъ слишкомъ общихъ основаній своего изслѣдованія.

Разсмотримъ теперь доказательства планиметріи, основывающіяся единственно на пользованіи принципомъ наложенія и на постулатѣ о прямой, каковы именно и суть доказательства неевклидовой планиметріи. Результаты этихъ доказательствъ сохраняютъ силу безусловно во всѣхъ случаяхъ, для которыхъ существуютъ этотъ принципъ и этотъ постулатъ. Всѣ эти случаи необходимо заключены, по сказанному выше, въ ученіи о поверхностяхъ постоянной кривизны; но правильные выводы въ этихъ случаяхъ могутъ существовать только для тѣхъ изъ этихъ поверхностей, на которыхъ гипотезы, принятыя въ этихъ доказательствахъ, не подвергаются никакимъ исключеніямъ.

Принципъ наложенія не подвергается исключенію ни на одной изъ этихъ поверхностей. Но, что касается постулата о прямой (или, лучше сказать, о геодезической линіи), то мы уже замѣтили, что встрѣчаются исключенія на сферѣ и слѣдовательно на всѣхъ поверхностяхъ постоянной положительной кривизны. Существуютъ ли теперь такія исключенія на поверхностяхъ постоянной отрицательной кривизны? Другими словами, можетъ ли на этихъ послѣднихъ поверхностяхъ произойти, что двѣ точки не опредѣляютъ единственной проходящей черезъ нихъ геодезической линіи?

Этотъ вопросъ, насколько мнѣ извѣстно, не былъ еще разсматриваемъ. Еслибы можно было доказать невозможность такихъ исключеній, то стало бы à priori ясно, что теоремы неевклидовой планиметріи существуютъ безъ ограниченія для всѣхъ поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Тогда извѣстные результаты, которые казались бы несовмѣстными съ гипотезами, характеризующими плоскость, могли бы стать примѣнимы къ поверхности указаннаго рода, и могли бы получить съ помощью этой поверхности объясненіе и простое и удовлетворительное. Въ тоже время переходъ отъ неевклидовой планиметріи къ Евклидовой могъ бы быть объясненъ тѣми опредѣленіями, которыя обособляютъ поверхности съ нулевой кривизной изъ совокупности поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

Таковы соображенія, которыми мы руководились въ нижеслѣдующихъ изысканіяхъ.

II.

Формула

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2-v^2)du^2 + 2uvdudv + (a^2-u^2)dv^2}{(a^2-u^2-v^2)^2} \tag{1}$$

представляетъ квадратъ линейнаго элемента поверхности, которой сферическая кривизна вездѣ постоянна, отрицательна и равна $-\frac{1}{R^2}$. Видъ этого выраженія, хотя менѣе простой, чѣмъ видъ другихъ равнозначащихъ выраженій, которыя можно было бы получить, вводя иныя перемѣнныя, имѣетъ то особенное преимущество (весьма важное для нашей настоящей цѣли), что всякое уравненіе, линейное относительно u и v, представляетъ геодезическую линію и что, обратно, всякая геодезическая линія представляется линейнымъ уравненіемъ между этими перемѣнными. (См. прим. I въ концѣ статьи).

Въ частности и двѣ системы координатныхъ линій

$$u = const., \quad v = const.$$

образованы геодезическими линіями, взаимное положеніе которыхъ легко узнать. Дѣйствительно, называя θ уголъ между двумя координатными кривыми въ точкѣ (u, v), имѣемъ

$$cos\theta = \frac{uv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}, \quad sin\theta = \frac{a\sqrt{a^2-u^2-v^2}}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}, \qquad (2)$$

откуда получаемъ $\theta = \frac{\pi}{2}$ какъ для $u=0$, такъ и для $v=0$. Слѣдовательно геодезическія линіи, составляющія систему $u=const.$, всѣ пересѣкаютъ подъ прямымъ угломъ геодезическую линію $v=0$ другой системы, и всѣ геодезическія линіи системы $v=const.$ пересѣкаютъ подъ прямымъ угломъ геодезическую линію $u=0$ первой системы. Другими словами въ точкѣ $u=v=0$ встрѣчаются двѣ геодезическія линіи взаимно ортогональныя,

$$u=0, \quad v=0,$$

которыя мы назовемъ *основными*, и каждая точка поверхности опредѣляется, какъ точка пересѣченія двухъ геодезическихъ линій, проведенныхъ черезъ нее перпендикулярно къ двумъ основнымъ линіямъ: это, очевидно, составляетъ обобщеніе обыкновеннаго Декартова метода.

Изъ формулъ (2) видно, что значенія, принимаемыя перемѣнными u, v, ограничены соотношеніемъ

$$u^2+v^2 \leqq a^2 \qquad (3)$$

Между этими предѣлами функціи E, F, G вещественны, однозначны, непрерывны и конечны и, сверхъ того количества E, G, $EG-F^2$ положительны и отличны отъ нуля. Слѣдовательно, на основаніи того, что нами установлено въ началѣ мемуара „о комплексныхъ перемѣнныхъ на какой угодно поверхности“ [1]), часть поверхности, ограниченная контуромъ, котораго уравненіе

$$u^2+v^2=a^2, \qquad (4)$$

односвязна, и сѣть, образованная на ней координатными геодезическими линіями, представляетъ около каждой точки нѣчто въ родѣ той сѣти, которая образуется на плоскости двумя системами параллельныхъ прямыхъ; т. е. двѣ геодезическія линіи одной и той же системы никогда не имѣютъ ни одной общей точки, и двѣ геодезическія линіи разныхъ системъ никогда другъ друга не касаются. Отсюда слѣдуетъ,

[1]) Annali di Matematica, 2-я серія, т. I.

что въ разсматриваемой области каждой парѣ вещественныхъ значеній u и v, удовлетворяющихъ условію (3), соотвѣтствуетъ вещественная точка, единственная и опредѣленная; и обратно каждой точкѣ соотвѣтствуетъ единственная и опредѣленная пара вещественныхъ значеній u и v, удовлетворяющихъ указанному условію.

Итакъ, если мы обозначимъ буквами x и y прямоугольныя координаты точекъ вспомогательной плоскости, то уравненія

$$x=u, \quad y=v$$

опредѣляютъ изображеніе разсматриваемой области, въ которомъ каждой точкѣ этой области соотвѣтствуетъ единственная и опредѣленная точка плоскости, и обратно; и вся область оказывается изображенной внутри круга радіуса a съ центромъ въ началѣ координатъ, который мы назовемъ *предѣльнымъ кругомъ*. Въ этомъ изображеніи геодезическимъ линіямъ поверхности соотвѣтствуютъ хорды предѣльнаго круга и, въ частности, координатнымъ геодезическимъ линіямъ соотвѣтствуютъ линіи, параллельныя осямъ координатъ.

Посмотримъ теперь, какъ ограничена, на поверхности, область, къ которой относятся предъидущія разсужденія.

Геодезическая линія, выходящая изъ точки $(u=0, \ v=0)$, можетъ быть представлена уравненіями

$$u=r\cos\mu, \quad v=r\sin\mu, \tag{5}$$

гдѣ r и μ полярныя координаты точки, соотвѣтствующей точкѣ (u, v) на прямой, которая изображаетъ на вспомогательной плоскости разсматриваемую геодезическую линію. Для такихъ значеній можно получить изъ (1), такъ какъ μ постоянно, слѣдующее:

$$d\rho=R\frac{adr}{a^2-r^2},$$

откуда

$$\rho=\frac{R}{2}\ log\ \frac{a+r}{a-r},$$

гдѣ ρ есть дуга геодезической линіи, отсчитанная отъ точки $(u=v=0)$.

Можно написать также

$$\rho=\frac{R}{2}\ log\ \frac{a+\sqrt{u^2+v^2}}{a-\sqrt{u^2+v^2}} \tag{6}$$

гдѣ u, v—координаты второго конца дуги ρ. Корень $\sqrt{u^2+v^2}$ долженъ быть взятъ здѣсь со знакомъ $+$, если желаютъ получить абсолютную величину длины ρ.

Величина эта равна нулю для $r = 0$; она возрастаетъ неопредѣленно при возрастаніи r или $\sqrt{u^2+v^2}$ отъ 0 до a, становится безконечною для $r=a$, т. е. для значеній u и v, удовлетворяющихъ уравненію (4) и дѣлается мнимою, когда $r>a$. Поэтому ясно, что контуръ, выраженный уравненіемъ (4) и представленный на вспомогательной плоскости окружностью предѣльнаго круга, есть не что иное, какъ геометрическое мѣсто безконечно удаленныхъ точекъ поверхности, которое можно разсматривать, какъ геодезическую окружность съ центромъ въ точкѣ ($u = v = 0$), геодезическій радіусъ которой безконечно великъ. Внѣ этого геодезическаго круга безконечно большого радіуса существуютъ только мнимыя или воображаемыя области поверхности, такъ что разсмотрѣнная выше область простирается безконечно и непрерывно во всѣхъ направленіяхъ и обнимаетъ всю совокупность дѣйствительныхъ точекъ поверхности. Такимъ образомъ внутри предѣльнаго круга представлена вся вещественная область нашей поверхности; при этомъ сама окружность предѣльнаго круга соотвѣтствуетъ ея точкамъ, расположеннымъ въ безконечности, окружности же, концентрическія и лежащія внутри предѣльнаго круга, соотвѣтствуютъ геодезическимъ окружностямъ поверхности, имѣющимъ центръ въ точкѣ ($u=v=0$).

Если въ уравненіяхъ (5) разсматривать r, какъ постоянное, а μ, какъ перемѣнное, то эти уравненія соотвѣтствуютъ геодезической окружности и формула (1) даетъ:

$$\sigma=\frac{Rr\mu}{\sqrt{a^2-r^2}}, \tag{7}$$

гдѣ σ есть дуга геодезической окружности, представленная на вспомогательной плоскости дугою окружности, которой радіусъ есть r и μ—центральный уголъ. Такъ какъ σ пропорціонально μ при какомъ угодно r, то можно легко видѣть, что геодезическія линіи ρ составляютъ въ общемъ началѣ такіе же углы между собою, какъ радіусы, соотвѣтствующіе имъ на вспомогательной плоскости, и что безконечно малая часть поверхности, которая непосредственно окружаетъ точку ($u=v=0$), подобна своему плоскому изображенію,—свойство, котораго не имѣетъ никакая другая точка.

Изъ уравненія (6) получается

$$r = \sqrt{u^2+v^2} = a tangh\frac{\varrho}{R}, \quad \text{и} \quad cosh\frac{\varrho}{R} = \frac{a}{w}, \tag{7'}$$

гдѣ w есть положительное значеніе радикала $\sqrt{a^2-u^2-v^2}$. Въ силу предыдущаго значенія r, уравненіе (7) можетъ быть написано такъ:

$$\sigma = \mu R sinh\frac{\varrho}{R},$$

такъ что для полупериметра геодезической окружности радіуса ϱ получается формула:

$$\pi R sinh\frac{\varrho}{R}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\pi R\left(e^{\frac{\varrho}{R}} - e^{-\frac{\varrho}{R}}\right), \tag{8}$$

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что геодезическія линіи поверхности (дѣйствительныя) представлены во всей ихъ совокупности хордами предѣльнаго круга, между тѣмъ какъ продолженія этихъ хордъ внѣ круга не имѣютъ никакого дѣйствительнаго представленія. Съ другой стороны двѣ дѣйствительныя точки поверхности изображаются двумя точками, равнымъ образомъ дѣйствительными, лежащими внутри предѣльнаго круга и опредѣляющими *одну* хорду этого круга. Итакъ видимъ, что двѣ дѣйствительныя точки поверхности, *выбранныя какъ угодно*, опредѣляютъ всегда *единственную и опредѣленную геодезическую линію*, которая на вспомогательной плоскости изображается хордою, проходящею чрезъ соотвѣтствующія имъ точки.

Такимъ образомъ поверхности постоянной отрицательной кривизны *не представляютъ* исключеній, имѣющихъ мѣсто въ этомъ отношеніи на поверхностяхъ постоянной положительной кривизны, и слѣдовательно къ нимъ приложимые теоремы неевклидовой планиметріи. Болѣе того, эти теоремы, въ большей ихъ части, доступны конкретному толкованію только тогда, когда будемъ ихъ относить именно къ этимъ поверхностямъ, а не къ плоскости, какъ это мы докажемъ ниже подробно. Для краткости мы назовемъ *псевдосферическими* поверхности постоянной отрицательной кривизны и сохранимъ названіе *радіуса* для постояннаго количества R, отъ котораго зависитъ величина ихъ кривизны.

III.

Найдемъ прежде всего общее соотношеніе между угломъ двухъ геодезическихъ линій и угломъ представляющихъ ихъ хордъ.

Пусть (u, v) точка поверхности, (U, V) произвольная точка одной изъ геодезическихъ линій, выходящихъ изъ первой точки. Пусть уравненія двухъ изъ этихъ линій таковы:

$$V-v=m(U-u), \quad V-v=n(U-u).$$

Называя α уголъ геодезическихъ линій въ точкѣ (u, v), имѣемъ, по извѣстной формулѣ

$$tang\alpha = \frac{(n-m)\sqrt{EG-F^2}}{E+(n+m)F+mnG},$$

или, для настоящихъ значеній E, F, G,

$$tang\alpha = \frac{a(n-m)w}{(1+mn)a^2-(v-mu)(v-nu)}$$

Означая α' уголъ двухъ хордъ, а μ и ν—углы этихъ хордъ съ осью x, имѣемъ

$$m=tang\mu, \ n=tang\nu, \ \alpha'=\nu-\mu,$$

и потому

$$tang\alpha = \frac{aw sin\alpha'}{a^2 cos\alpha'-(vcos\mu-usin\mu)(vcos\nu-usin\nu)}.$$

Знаменатель второй части равенства остается конечнымъ во всякой действительной точки поверхности; слѣдовательно уголъ α можетъ быть равенъ нулю только въ случаѣ, если числитель равенъ нулю. Но $sin\alpha'$ не нуль; дѣйствительно, двѣ хорды пересѣкаются внутри предѣльнаго круга и не сливаются въ одну прямую; по этому α есть нуль только для $w=0$, т. е. только тогда, когда точка встрѣчи двухъ геодезическихъ линій уходитъ въ безконечность.

Итакъ, можно формулировать слѣдующія правила:

I. Двумъ различнымъ хордамъ, пересѣкающимся внутри предѣльнаго круга, соотвѣтствуютъ двѣ геодезическія линіи, пересѣкающіяся на конечномъ разстояніи подъ угломъ, измѣняющимся отъ 0° до 180°.

II. Двумъ различнымъ хордамъ, пересѣкающимся на окружности предѣльнаго круга, соотвѣтствуютъ двѣ геодезическія линіи, сходящіяся въ точкѣ на безконечно большомъ разстояніи и образующія въ этой точкѣ уголъ, равный нулю.

III. Наконецъ, двумъ различнымъ хордамъ пересѣкающимся внѣ предѣльнаго круга или параллельнымъ, соотвѣтствуютъ двѣ геодезическія линіи, которыя не имѣютъ ни одной общей точки на всемъ дѣйствительномъ протяженіи поверхности.

Пусть теперь pq (фиг. 1) будетъ какая нибудь хорда предѣльнаго круга, r точка внутри круга, не лежащая на хордѣ. Этой хордѣ соотвѣтствуетъ на поверхности геодезическая линія $p'q'$, проведенная между безконечно удаленными точками p' и q' (соотвѣтствующими точкамъ p и q); точкѣ r соотвѣтствуетъ точка r', лежащая на конечномъ разстояніи и внѣ геодезической линіи $p'q'$. Черезъ эту точку можно провести безчисленное множество геодезическихъ линій, изъ которыхъ однѣ встрѣчаютъ геодезическія линіи $p'q'$, другія не встрѣчаютъ. Первыя представлены прямыми, идущими изъ точки r къ различнымъ точкамъ дуги pbq ($<180°$); вторыя представлены прямыми, идущими отъ той же точки къ различнымъ точкамъ дуги pcq ($>180°$). Двѣ особенныя геодезическія линіи образуютъ переходъ отъ одной изъ этихъ категорій къ другой: это тѣ, которыя представлены прямыми rp, rq, т. е. тѣ двѣ геодезическія линіи, которыя выходятъ изъ r' и встрѣчаютъ $p'q'$ въ безконечности, одна съ одной стороны, другая съ другой. Такъ какъ прямолинейные углы rpq, rqp имѣютъ вершины на окружности предѣльнаго крвга, то изъ этого слѣдуетъ (II), что соотвѣтственные геодезические углы $r'p'q'$, $r'q'p'$ равны нулю, хотя первые конечны. Наоборотъ, такъ какъ r—точка внутри предѣльнаго круга и расположена внѣ хорды pq, то уголъ prq отличенъ отъ 00° и 180°, а потому (по I) соотвѣтственныя геодезическія линіи $r'p'$, $r'q'$ образуютъ въ точкѣ r' уголъ, отличный отъ 00° 180°. Итакъ, если геодезическія линіи $r'p'$, $r'q'$ назвать *параллельными* линіи $p'q'$, такъ какъ ими обозначенъ переходъ отъ линій, встрѣчающихъ $p'q'$, къ линіямъ, не встрѣчающимъ $p'q'$, то можно выразить результатъ, къ которому мы пришли, слѣдующимъ образомъ: „чрезъ всякую дѣйствительную точку поверхности всегда можно провести *двѣ* дѣйствительныя геодезическія линіи, параллельныя одной и той же дѣйствительной геодезической линіи, не проходящей чрезъ эту точку, и эти двѣ геодезическія линіи образуютъ между собою уголъ, отличный отъ 0° и 180°".

Этотъ результатъ согласуется, за исключеніемъ различія употребленныхъ выраженій, съ тѣмъ, что составляетъ основаніе неевклидовой геометріи. Чтобы получить непосредственно въ псевдосферической геометріи толкованіе другихъ выводовъ неевклидовой геометріи разсмотримъ геодезическій треугольникъ. Извѣстно, что, когда изучаютъ фигуры, начерченныя на поверхности, не развертываемой въ плоскость, часто бываетъ удобно для облегченія пониманія чертить на плоскости другую фигуру, которая, хотя и не выведена изъ первой по опредѣленному геометрическому закону, но служитъ всетаки для приблизительнаго воспроизведенія наиболѣе существенныхъ чертъ ея расположенія. Для того, чтобы объяснительная фигура выполняла это назначеніе, нужно, чтобы всѣ величины данной фигуры, линейныя и угловыя, были въ объяснительной фигурѣ замѣнены величинами соотвѣтственно однородными, и чтобы длины двухъ соотвѣтственныхъ линій и синусы двухъ соотвѣтственныхъ угловъ имѣли между собою всегда конечное отношеніе; впрочемъ неважно, если это отношеніе произвольно измѣняется съ переходомъ отъ одной части фигуры къ другой, лишь бы оно не обращалось никогда ни въ нуль ни въ безконечность. Наконецъ очевидно, что при такомъ широкомъ выборѣ слѣдуетъ стараться, чтобы въ объяснительной фигурѣ отношеніе величинъ не удалялось слишкомъ отъ извѣстнаго средняго значенія.

Въ такомъ случаѣ ясно, что если у геодезическаго треугольника, о которомъ мы раньше говорили, всѣ вершины находятся на конечныхъ разстояніяхъ, онъ можетъ быть представленъ какимъ угодно плоскимъ треугольникомъ. Этимъ плоскимъ треугольникомъ могъ бы даже быть тотъ прямолинейный треугольникъ, который служитъ изображеніемъ геодезическаго на вспомогательной плоскости; этотъ прямолинейный треугольникъ лежалъ бы весь внутри предѣльнаго круга. Можно было бы еще, смотря по обстоятельствамъ, предпочесть криволинейный треугольникъ, котораго углы были бы напр. равны угламъ геодезическаго треугольника. Но если предположить, что вершины геодезическаго треугольника неопредѣленно удаляются и уходятъ въ безконечность, то ясно, что, между тѣмъ какъ геодезическій треугольникъ продолжаетъ быть фигурой, существующей на поверхности и имѣющей всѣ точки, исключая вершинъ, на конечныхъ разстояніяхъ, — объяснительная фигура не могла бы быть конечна во всѣхъ направленіяхъ, не нарушая какихъ либо изъ тѣхъ условій, которыя были нами формулированы. Наприм. прямолинейный треугольникъ, изображающій на вспомогательной плоскости геодезическій треугольникъ, имѣлъ бы конечные углы, между тѣмъ какъ углы геодезическаго треугольника были бы равны нулю; криволинейный треугольникъ, котораго стороны были бы другъ къ другу касательны въ вершинахъ, нарушалъ бы подобнымъ-же образомъ условія, установленныя нами: если бы взять двѣ точки b, c (фиг. 2) на сторонахъ, встрѣчающихся въ вершинѣ a, то получились бы разстоянія ab и bc, отношеніе которыхъ было бы въ объяснительномъ треугольникѣ конечно и безконечно въ треугольникѣ геодезическомъ. Чтобы устранить это несогласіе, слѣдовало бы, чтобы всѣ разстоянія аналогичныя *bc* были равны нулю въ объяснительной фигурѣ, что можно было бы осуществить только тѣмъ, что дать этой фигурѣ расположеніе фиг. 3, гдѣ точка 0 соединяетъ въ одной себѣ изображеніе всѣхъ точекъ, расположенныхъ на конечномъ разстояніи въ геодезическомъ треугольникѣ. Такою фигурою представился бы геодезическій треугольникъ при разсматриваніи его сквозь оптическое стекло, имѣющее свойство (воображаемое нами) производить безконечно-большое уменьшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, при такомъ предположеніи, всѣ конечныя разстоянія представлялись бы равными нулю, а безконечныя разстоянія конечными.

Это въ сущности согласуется съ тѣмъ, что Гауссъ замѣтилъ въ своемъ письмѣ къ Шумахеру отъ 12 іюля 1831 г. (См. приложеніе къ переводу Hoüel'я Geometrische Untersuchungen über Theorie der Parallellinien Лобачевскаго [1])), въ которомъ онъ прибавляетъ еще что полупериметръ неевклидоваго круга радіуса ρ равенъ

$$\frac{1}{2}\pi k\left(e^{\frac{\rho}{k}}-e^{-\frac{\rho}{k}}\right),$$

гдѣ k постоянное. Это постоянное, которое по словамъ Гаусса, имѣетъ какъ указываетъ намъ опытъ, весьма большое значеніе сравнительно со всѣмъ, что доступно нашему измѣренію, есть, съ нашей настоящей точки зрѣнія и въ силу формулы (8), не что иное, какъ радіусъ псевдосферической поверхности, которую мы безъ нашего вѣдома вводимъ въ Планиметрію вмѣсто Евклидовой плоскости каждый разъ когда наши соображенія основываются только на посылкахъ, имѣющихъ мѣсто одновременно и для плоскости и для всѣхъ поверхностей указаннаго класса.

IV.

Если мы желаемъ согласить болѣе конкретнымъ образомъ псевдосферическую геометрію съ неевклидовой планиметріей, то необходимо внимательно изслѣдовать аналитическое выраженіе, употребленное нами для представленія линейнаго элемента псевдосферической поверхности. И прежде всего разсмотримъ слѣдующій вопросъ: „должны ли двѣ названныя нами *основными* геодезическія линіи быть избраны какимъ либо особеннымъ образомъ, чтобы линейный

---

[1]) Математическій сборникъ, т. III.

элементъ имѣлъ указанную выше форму". Казалось бы, въ самомъ дѣлѣ, что ихъ можно бы избирать произвольно, потому что, если всякая часть поверхности можетъ быть какъ угодно наложена на ту же поверхность, ясно, что двѣ какія угодно ортогональныя геодезическія линіи, расположенныя на этой части, можно привести къ совпаденію съ двумя какими угодно другими также ортогональными геодезическими линіями. Такъ какъ поднятый нами вопросъ существенно важенъ для нашей цѣли, то намъ казалось подобающимъ посвятить ему примѣчаніе II, въ которомъ, доказывая прямо, что основныя геодезическія линіи произвольны, мы въ тоже время обнаруживаемъ, что всякая часть поверхности можетъ быть наложена какъ угодно на туже поверхность, причемъ нѣтъ нужды допускать какихъ либо предварительныхъ свѣдѣній по этому предмету.

Вслѣдствіе этого и изложенныхъ уже основаній теоремы неевклидовой планиметріи, относящіяся къ плоскимъ прямолинейнымъ фигурамъ, необходимо имѣютъ мѣсто также для аналогичныхъ геодезическихъ фигуръ, начерченныхъ на псевдосферической поверхности. Таковы напр. теоремы §§ 3—10, 16—24, 29—30 и т. д. „Geometrische Untersuchungen" Лобачевскаго [1]).

Разсмотримъ теперь двѣ геодезическія линіи, проведенныя изъ данной точки параллельно данной геодезической линіи. Пусть δ есть длина геодезической нормали, опущенной изъ этой точки на данную геодезическую линію. Эта нормаль дѣлитъ пополамъ уголъ, составленный двумя параллельными. Дѣйствительно, если отдѣлить полосу поверхности, заключенную между геодезическою нормалью, одною изъ параллельныхъ и соотвѣтственною половиною данной геодезической линіи, перевернуть ее и наложить снова на поверхность такъ, чтобы нормаль совпала сама съ собой, между тѣмъ какъ одна половина геодезической линіи пошла бы по направленію другой ея половины, то ясно, что параллель, ограничивающая полосу, должна упасть на другую параллель: иначе черезъ данную точку можно было бы провести болѣе двухъ линій параллельныхъ данной геодезической линіи. Назовемъ *угломъ параллелизма* уголъ, образованный каждою изъ параллельныхъ съ нормалью, и обозначимъ его Δ. Для вычисленія этого угла примѣнимъ наше аналитическое рѣшеніе, помѣщая начало ($u=v=o$) въ данную точку и направляя основную геодезическую линію $v=o$ нормально къ

---

[1]) См. Собраніе сочиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго, томъ II. p. 553.

данной геодезической линіи, такъ что эта послѣдняя представится уравненіемъ:

$$u = a.tangh\frac{\delta}{R},$$

что легко выводится изъ формулы (7').

Этой геодезической линіи соотвѣтствуетъ на вспомогательной плоскости хорда, перпендикулярная къ оси x, раздѣленная этой осью пополамъ и одинъ изъ концовъ которой имѣетъ ординату равную $\frac{a}{cosh\frac{\delta}{R}}$. Эта точка предѣльнаго круга опредѣляетъ радіусъ, уравненіе котораго

$$y = \frac{x}{sinh\frac{\delta}{R}}$$

и которому соотвѣтствуетъ на поверхности одна изъ разсмотрѣнныхъ параллелей; такъ какъ углы около начала равны на поверхности и на вспомогательной плоскости, то очевидно мы должны имѣть

$$tang\Delta sinh\frac{\delta}{R} = 1, \tag{9}$$

формулу, представляющую искомое соотношеніе между нормальнымъ разстояніемъ δ и угломъ параллелизма Δ. Она совпадаетъ съ выраженіемъ, найденнымъ Батталини (Giorn. di Matematiche, т. V, стр. 225.—Nouvelles Annales de Mathématiques, 2-e série, т. VII, стр. 267). Для сравненія ея съ формулой Лобачевскаго достаточно написать ее въ видѣ

$$e^{-\frac{2\delta}{R}} + 2e^{-\frac{\delta}{R}}cot\Delta - 1 = 0$$

и получить отсюда

$$e^{-\frac{\delta}{R}} = \frac{-cos\Delta \pm 1}{sin\Delta}$$

Нижній знакъ нельзя допустить, такъ какъ количество $\frac{\delta}{R}$ вещественно; итакъ

$$tang\frac{1}{2}\Delta = e^{-\frac{\delta}{R}}$$

формула отличающаяся отъ формулы Лобачевскаго (Geometrische Untersuchungen № 38) только обозначеніями и выборомъ единицы.

Обозначая $\Pi(z)$, какъ это дѣлаетъ Лобачевскій (№ 16), уголъ параллелизма для взятаго по нормали разстоянія z, мы получимъ посредствомъ уравненія (9) слѣдующее:

$$\cosh\frac{z}{R}=\frac{1}{\sin\Pi(z)},\quad \sinh\frac{z}{R}=\cot\Pi(z) \tag{10}$$

Изъ замѣчанія Миндинга (Journ. Crelle, т. XX, стр. 325), подробно развитому Кодацци (Annali Tortolini, 1857, стр. 254 и слѣд.), извѣстно, что обыкновенныя формулы, относящіяся къ сферическимъ треугольникамъ, превращаются въ формулы для геодезическихъ треугольниковъ поверхностей съ постоянной отрицательной кривизной, если умножить на $\sqrt{-1}$ отношенія сторонъ къ радіусу и оставить безъ измѣненія углы, что сводится на замѣну круговыхъ функцій сторонъ функціями гиперболическими. Напримѣръ первая формула сферической тригонометріи

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}+\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A$$

обращается въ

$$\cosh\frac{a}{R}=\cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R}-\sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}\cos A.$$

Если ввести посредствомъ формулъ (10) вмѣсто сторонъ a, b, c соотвѣтственные углы параллелизма, то это соотношеніе превращается въ слѣдующее

$$\cos A\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)+\frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}=1,$$

одно изъ основныхъ уравненій неевклидовой планиметріи (Geometrische Untersuchungen § 37). Другія получаются подобнымъ же образомъ [1]).

Изъ предъидущихъ результатовъ, намъ кажется, вполнѣ выступаетъ соотвѣтствіе, существующее между неевклидовой планиметріею и псевдосферической геометріей. Для подтвержденія того же съ другой точки зрѣнія, мы еще установимъ прямо, посредствомъ нашего анализа, теорему о суммѣ трехъ угловъ треугольника.

---

[1]) Обратный переходъ отъ этихъ уравненій къ уравненіямъ сферической тригонометріи былъ указанъ Лобачевскимъ (§ 74), но просто какъ аналитическій фактъ.

Разсмотримъ прямоугольный треугольникъ, образованный основною геодезическою линiей $v=0$, одною изъ перпендикулярныхъ геодезическихъ линiй $u=const$ и геодезической линiей, выходящей изъ начала подъ угломъ μ имѣющей уравненiемъ

$$v=u tang\mu.$$

Назовемъ μ' третiй уголъ этого треугольника. Уголъ, соотвѣтствующiй ему на плоскости, есть $90°-\mu$, и потому соотношенiе, установленное ранѣе между соотвѣтственными углами на поверхности и на плоскости, даетъ

$$tang\mu'=\frac{w\cos\mu}{a\sin\mu},$$

откуда видно, что при μ остромъ μ' также острый. Такъ какъ $v=u.tang\mu$, то эту формулу можно написать, принимая радикалъ положительнымъ, такъ:

$$tang\mu'=\frac{\sqrt{a^2\cos^2\mu-u^2}}{a\sin\mu},\ \text{откуда}\ d\mu'=-\frac{a\sin\mu.udu}{(a^2-u^2)\sqrt{a^2\cos^2\mu-u^2}},$$

выраженiе приращенiя, получаемаго μ', когда, сохраняя μ постояннымъ, будемъ перемѣщать катетъ противоположный углу μ. Если теперь интегрировать по v элементъ поверхности

$$dudv\sqrt{EG-F^2}=R^2u\frac{dudv}{(a^2-u^2-v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

между предѣлами $v=0$ и $v=u tang\mu$, откуда

$$\frac{R^2a\sin\mu udu}{(a^2-u^2)\sqrt{a^2\cos^2\mu-u^2}},\ \text{или}-R^2d\mu',$$

то мы имѣемъ приращенiе площади разсматриваемаго треугольника, получаемое ею, если перемѣщать катетъ противоположный углу μ. Интегрируя снова между $\mu'=90°-\mu$ и $\mu'=\mu'$ (изъ этихъ значенiй первое очевидно соотвѣтствуетъ $u=0$), находимъ

$$R^2\left(\frac{\pi}{2}-\mu-\mu'\right)$$

выраженiе всей площади прямоугольнаго треугольника. Отъ этого выраженiя легко перейти къ выраженiю площади какого угодно геодезическаго треугольника ABC, раздѣляя его на два прямоугольныхъ треугольника геодезическою линіею, проведенною черезъ одну изъ вершинъ перпендикулярно къ противоположной сторонѣ; такимъ образомъ находимъ:

$$R^2(\pi - A - B - C).$$

Такъ какъ это выраженіе должно быть положительно, то оно показываетъ, что сумма трехъ угловъ какого угодно геодезическаго треугольника никогда не можетъ превосходить 180°. Еслибы эта сумма равнялась 180° въ какомъ нибудь треугольникѣ конечныхъ размѣровъ, то R должно бы было равняться ∞, и тогда во всякомъ конечномъ треугольникѣ было бы также $A+B+C=\pi$. Но для $R=\infty$ уравненіе (9) даетъ $\Delta = \frac{\pi}{2}$; поэтому уголъ параллелизма былъ бы необходимо прямой, и наоборотъ. Это тѣже заключенія, къ которымъ приходитъ и неевклидова геометрія.

Треугольникъ, образованный геодезической линіей и двумя геодезическими линіями, проведенными параллельно первой черезъ внѣшнюю точку, имѣетъ два угла, равные нулю, и третій, равный 2Δ; поэтому площадь его конечна и опредѣляется формулой

$$R^2(\pi - 2\Delta),$$

или, по уравненію (9),

$$2R^2 arctang(sinh\frac{\delta}{R}),$$

гдѣ δ есть разстояніе точки отъ геодезической линіи. Для R очень большаго это количество почти равно $2\delta R$ и потому безконечно для плоскости, какъ извѣстно, но безконечно единственно въ этомъ случаѣ.

Геодезическій треугольникъ, котораго всѣ вершины въ безконечности, имѣетъ площадь конечную и опредѣленную, значеніе которой πR^2 независитъ отъ его формы.

Геодезическій многоугольникъ о n сторонахъ, котораго внутренніе углы суть A, B, C..., имѣетъ для своей площади выраженіе

$$R^2[(n-2)\pi - A - B - C - ...].$$

Если всѣ вершины многоугольника въ безконечности, то площадь его, остающаяся конечною, приводится къ $(n-2)\pi R^2$ и слѣдовательно не зависитъ отъ его формы.

V.

Перейдемъ теперь къ изученію кривыхъ, которыя мы назвали, какъ это уже принято, геодезическими окружностями.

Въ концѣ примѣчанія II мы нашли, что геодезическая окружность, имѣющая центромъ какую нибудь точку (u_0, v_0) и геодезическимъ радіусомъ ϱ, представляется уравненіемъ:

$$\frac{a^2-uu_0-vv_0}{\sqrt{(a^2-u^2-v^2)(a^2-u_0^2-v_0^2)}} = cosh\frac{\varrho}{R} \tag{11}$$

Это общее уравненіе будетъ намъ полезно далѣе; но теперь мы можемъ воспользоваться упрощеніями, которыхъ достигнемъ, предположивъ, что начало $(u=v=o)$ помѣщено въ центрѣ разсматриваемой окружности. Давая выраженію линейнаго элемента (какъ въ примѣч. II) видъ

$$ds^2 = R^2\frac{w^2(du^2+dv^2)+(udu+vdv)^2}{w^4}$$

и полагая

$$u=rcos\varphi, \qquad v=rsin\varphi,$$

получаемъ для этого линейнаго элемента эквивалентное выраженіе

$$ds^2 = R^2\left[\left(\frac{adr}{a^2-r^2}\right)^2+\frac{r^2d\varphi^2}{a^2-r^2}\right]$$

Но называя ϱ геодезическое разстояніе точки (u, v) или (r, φ) отъ начала, имѣемъ, какъ извѣстно

$$\frac{adr}{a^2-r^2}=\frac{d\varrho}{R}, \quad \frac{r^2}{a^2-r^2}=sinh^2\frac{\varrho}{R};$$

поэтому

$$ds^2 = d\varrho^2+\left(Rsinh\frac{\varrho}{R}\right)^2 d\varphi^2, \tag{12}$$

уже извѣстное выраженіе линейнаго элемента псевдосферической поверхности.

Это выраженіе имѣетъ каноническій видъ линейнаго элемента поверхности вращенія. Но нужно замѣтить, что въ настоящемъ случаѣ нельзя было бы наложить на самомъ дѣлѣ на поверхность вращенія псевдосферическій вырѣзокъ, окружающій точку $(u=v=o)$, не нарушая непрерывности, посредствомъ нѣкотораго сѣченія, сдѣланнаго въ этомъ вырѣзкѣ, начиная отъ точки ($u=v=o$). Дѣйствительно, еслибы предположенная поверхность вращенія существовала безъ этого условія, она встрѣчала бы свою собственную ось въ общемъ центрѣ ($\varrho=0$) всѣхъ геодезическихъ окружностей $\varrho=const.$ и потому имѣла бы въ этой точкѣ обѣ свои кривизны одного знака, что невозможно, потому что у псевдосферической поверхности всѣ точки *гиперболическія.* Та-же невозможность обнаруживается изъ разсмотрѣнія того обстоятельства, что, если бы не производить сѣченія, о которомъ мы только что говорили, перемѣнная ϱ представляла бы долготу перемѣннаго меридіана и потому радіусъ параллели, соотвѣтствующій дугѣ меридіана, былъ бы $R\sinh\frac{\varrho}{R}$. Измѣненіе этого радіуса было бы слѣдовательно $\cosh\frac{\varrho}{R}\,d\varrho$, т. е. $>d\varrho$, что нелѣпо, такъ какъ измѣненіе, о которомъ идетъ рѣчь, равняется проэкціи $d\varrho$ на плоскость параллели.

Выраженіе (12) линейнаго элемента, хотя лишено удобствъ, связанныхъ съ употребленіемъ нашихъ перемѣнныхъ u и v, можетъ быть иногда полезно вслѣдствіе его простоты. Оно примѣняется, напр. для опредѣленія тангенціальной кривизны геодезическихъ окружностей, которая для окружности радіуса ϱ равна $\frac{1}{R\tanh\frac{\varrho}{R}}$; итакъ эта кривизна постоянна вдоль всей периферіи геодезическаго круга и зависитъ только отъ радіуса. Это свойство можно также замѣтить à priori, наблюдая, что часть поверхности, ограниченная геодезическимъ кругомъ, можетъ быть наложена какъ угодно на туже поверхность, причемъ контуръ ея никогда не перестаетъ быть геодезическимъ кругомъ, имѣющимъ центръ въ той точкѣ, въ которую былъ помѣщенъ первоначальный центръ наложеннаго геодезическаго круга.

Теорема: „геодезическія линіи, возставленныя нормально въ серединахъ хордъ геодезической окружности, пересѣкаются всѣ въ ея центрѣ“ доказывается, какъ соотвѣтствующая теорема обыкновенной планиметріи, изъ чего заключаютъ, что построеніе центра окружности, проходящей черезъ три точки, не лежащія на одной и той-же геодезической линіи, вполнѣ аналогично обыкновенному построенію, такъ что эта окружность всегда единственна и опредѣленна.

Но здѣсь является затрудненіе. Такъ какъ три точки поверхности выбраны произвольно, то можетъ случиться, что геодезическія линіи, возставленныя перпендикулярно къ линіямъ, соединяющимъ взятыя три точки въ ихъ срединахъ, не пересѣкаются ни въ какой вещественной точкѣ поверхности; и потому, если присвоивать названіе геодезическихъ окружностей только тѣмъ кривымъ, которыя описаны концомъ неизмѣняющейся геодезической дуги, вращающейся вокругъ вещественной точки поверхности, то необходимо признать, что нельзя всегда провести геодезическую окружность черезъ три точки поверхности, избранныя произвольно. Это согласно, mutatis mutandis, съ принципами Лобачевскаго (Geometrische Untersuchungen № 29). Но такъ какъ геодезическія линіи поверхности всегда изображаются хордами предѣльнаго круга, то, если какія-либо хорды, будучи продолжены, пересѣкаются въ точкѣ, находящейся внѣ круга, позволительно считать, что соотвѣтственныя геодезическія линіи имѣютъ нѣкоторую воображаемую общую точку, и что ихъ ортогональныя траекторіи въ нѣкоторой степени аналогичны геодезическимъ окружностямъ въ собственномъ смыслѣ слова.

Найдемъ прямо уравненіе этихъ траекторій.

Уравненіе

$$v-v_0=k(u-u_0)$$

представляетъ систему геодезическихъ линій, выходящихъ изъ точки (u_0, v_0), вещественной или воображаемой, смотря по тому, будетъ ли $u_0^2+v_0^2$ менѣе или болѣе a^2. Дифференціальное уравненіе этой системы есть

$$\frac{du}{u-u_0}=\frac{dv}{v-v_0}$$

и потому дифференціальное уравненіе ортогональной системы будетъ

$$[E(u-u_0)+F(v-v_0)]du+[F(u-u_0)+G(v-v_0)]dv=0$$

т. е. для настоящихъ значеній E, F и G

$$d\,\frac{a^2-uu_0-vv_0}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}=0,$$

а потому

$$\frac{a^2-uu_0-vv_0}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}=C$$

есть конечное уравненіе геодезическихъ окружностей, понимаемыхъ въ болѣе общемъ смыслѣ, т. е. при какомъ угодно центрѣ (u_0, v_0), вещественномъ или воображаемомъ.

Когда этотъ центръ вещественнъ, его разстояніе отъ кривой постоянно по хорошо извѣстной теоремѣ; и въ самомъ дѣлѣ, означая это разстояніе буквою ϱ, имѣемъ, сравнивая съ уравненіемъ (11):

$$\cosh\frac{\varrho}{R}=\frac{C}{\sqrt{a^2-u_0^2-v_0^2}}\,.$$

Въ этомъ случаѣ ясно, что между значеніями, которыя можно допустить для постоянной C, не включено значеніе, равное нулю, потому что геометрическое мѣсто, соотвѣтствующее этому предположенію, будучи представлено на вспомогательной плоскости прямою, лежащею внѣ предѣльнаго круга, приходится цѣликомъ въ воображаемой области поверхности.

Когда же, наоборотъ, центръ воображаемъ, то понятіе геодезическаго радіуса не существуетъ; но постоянная C можетъ получить нулевое значеніе, потому что уравненіе, вытекающее для этого случая

$$a^2-uu_0-vv_0=0$$

представляетъ на вспомогательной плоскости хорду предѣльнаго круга и именно поляру внѣшней точки (u_0, v_0). Это уравненіе опредѣляетъ вещественную геодезическую линію поверхности; слѣдовательно можно изъ этого заключить, что между безчисленнымъ множествомъ геодезическихъ окружностей, имѣющихъ одинъ и тотъ же воображаемый центръ, всегда существуетъ дѣйствительно геодезическая линія и притомъ только одна, такъ что геодезическія окружности съ воображаемымъ центромъ могутъ быть также опредѣляемы, какъ кривыя параллельныя (геодезически) дѣйствительнымъ геодезическимъ линіямъ. Это послѣднее свойство было уже замѣчено г. Баттальини въ другихъ выраженіяхъ (Nouvelles Annales de Mathem., 2 серія, т. VII, стр. 272, l. c. p. 328). Итакъ мы видимъ, что между тѣмъ какъ на сферической поверхности понятіе о геодезической окружности и понятіе о кривой, параллельной геодезической линіи, совершенно совпадаютъ одно съ другимъ, — на поверхности псевдосферической они наоборотъ представляютъ различіе, зависящее отъ того, будетъ ли ихъ центръ вещественъ или воображаемымъ.

Такъ какъ всякая геодезическая окружность съ воображаемымъ центромъ равно отстоитъ во всѣхъ своихъ точкахъ отъ опредѣленной геодезической линіи, то допустимъ, что этою послѣднею служитъ сама линія $v=0$, что всегда можно предположить, и назовемъ ξ геодезическое разстояніе точки (u, v) отъ этой основной геодезической линіи. Это разстояніе измѣряется на одной изъ геодезическихъ линій системы $u=const.$ и дается формулою

$$\xi=\frac{R}{2}\ log\ \frac{\sqrt{a^2-u^2}+v}{\sqrt{a^2-u^2}-v}$$

Предполагая ξ постояннымъ, получимъ отсюда уравненіе между u и v какой угодно изъ геодезическихъ окружностей, имѣющихъ центръ въ воображаемой точкѣ встрѣчи всѣхъ геодезическихъ линій, нормальныхъ къ линіи $v=0$.

Назовемъ η дугу геодезической линіи $v=0$, заключенную между началомъ и нормалью ξ; ся величина опредѣляется уравненіемъ

$$\eta=\frac{R}{2}\ log\ \frac{a+u}{a-u}\ .$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій получаемъ

$$u=atangh\frac{\eta}{R},\ v=\frac{atangh\frac{\xi}{R}}{cosh\frac{\eta}{R}},$$

откуда

$$w^2=a^2-u^2-v^2=\frac{a^2}{cosh^2\frac{\xi}{R}cosh^2\frac{\eta}{R}}\ .$$

Такимъ образомъ при замѣнѣ перемѣнныхъ u и v перемѣнными ξ и η выраженіе (1) обращается въ

$$ds^2=d\xi^2+cosh^2\frac{\xi}{R}d\eta^2, \tag{14}$$

выраженіе, характеризующее поверхности вращенія.

Означая буквою r_0 радіусъ наименьшей параллели этой поверхности, соотвѣтствующій очевидно $\xi=0$, и буквою r радіусъ параллели ξ, имѣемъ

$$r=r_0cosh\frac{\xi}{R}\ \text{ и потому }\ \frac{dr}{d\xi}=\frac{r_0}{R}\ sinh\frac{\xi}{R}\ .$$

Слѣдовательно, поясъ псевдосферической поверхности, который можетъ быть вещественно преобразованъ въ поверхность вращенія, опредѣленъ условіемъ

$$\left(\frac{r_0}{R}\sinh\frac{\xi}{R}\right)^2 < 1,$$

т. е. онъ заключенъ между двумя геодезическими окружностями, равноотстоящими отъ геодезической линіи $\xi = 0$, которая располагается по наименьшей параллели. Ширина этого пояса зависитъ отъ радіуса, который желаютъ назначить для наименьшей параллели, и имѣетъ тѣмъ большую величину, чѣмъ этотъ радіусъ меньше. Длина пояса неопредѣленна и потому онъ навертывается безконечное число разъ на поверхность вращенія; при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что точки, налагающіяся такимъ образомъ одна на другую, должны быть всегда разсматриваемы, какъ различныя точки; иначе теорема, что черезъ двѣ точки поверхности проходитъ только одна геодезическая линія, перестала бы быть справедливою. Иными словами придется поверхность вращенія разсматривать, какъ предѣлъ геликоида, котораго шагъ стремится къ нулю. Обѣ крайнія параллели имѣютъ радіусъ, равный $\sqrt{R^2 + r_0^2}$, и плоскости ихъ суть умбиликальныя касательныя къ поверхности.

Между геодезическими окружностями съ вещественнымъ центромъ и геодезическими окружностями съ центромъ воображаемымъ находятся, какъ переходныя фигуры, геодезическія окружности, имѣющія центръ въ безконечности; эти окружности заслуживаютъ изученія вслѣдствіе своихъ весьма замѣчательныхъ свойствъ.

Общее уравненіе этихъ окружностей сохраняетъ форму (13), потому что разсужденіе, которое насъ привело къ уравненію (13), имѣетъ мѣсто для всѣхъ положеній центра. Но, если сравнить это уравненіе съ уравненіемъ (11), въ которомъ количество $\sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}$ или w_0 стремится къ нулю, когда центръ уходитъ въ безконечность, между тѣмъ какъ при томъ же предположеніи, второй членъ неопредѣленно возрастаетъ, то видно, что произведеніе $w_0 \cosh\frac{\rho}{R}$ стремится къ конечному значенію, къ которому, очевидно, стремится также произведеніе $\frac{1}{2} w_0 e^{\frac{\rho}{R}}$. Если же вмѣсто ρ подставить $\rho' - \rho$ то уравненіе (11) можно написать такъ:

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = \frac{w_0}{2} e^{\frac{\rho'}{R}} e^{-\frac{\rho}{R}} + \frac{w_0}{2} e^{-\frac{\rho'}{R}} e^{\frac{\rho}{R}};$$

слѣдовательно, оставляя ρ конечнымъ и заставляя ρ' неопредѣленно возрастать, между тѣмъ какъ w_0 стремится къ нулю, получимъ въ предѣлѣ

$$\frac{a^2-uu_0-vv_0}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}=ke^{-\frac{\rho}{R}},$$

гдѣ k постоянная. При такомъ представленіи системы геодезическихъ окружностей, имѣющихъ центръ въ безконечно удаленной точкѣ (u_0, v_0), параметръ ρ выражаетъ постоянное разстояніе между какою либо одною изъ этихъ окружностей и нѣкоторою опредѣленною и, оставаясь положительнымъ, возрастаетъ, начиная отъ этой послѣдней окружности по направленію къ безконечно удаленному центру. При $k=a$ окружность $\rho=0$ обращается въ окружность, проходящую черезъ точку $(u=v=o)$.

Если съ полученнымъ такимъ образомъ уравненіемъ

$$\frac{a^2-uu_0-vv_0}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}=ae^{-\frac{\rho}{R}} \tag{15}$$

комбинировать уравненіе

$$\frac{u_0v-uv_0}{a^2-uu_0-vv_0}=\frac{\sigma}{R} \tag{16}$$

и если имѣть въ виду соотношеніе $u_0{}^2+v_0{}^2=a^2$, то найдемъ, что линейный элементъ (1) принимаетъ видъ

$$ds^2=d\rho^2+e^{-\frac{2\rho}{R}}d\sigma^2, \tag{17}$$

который снова характеризуетъ поверхность вращенія.

Называя буквой r_0 радіусъ параллели $\rho=0$, которой дуга есть σ, и буквой r радіусъ параллели ρ, получаемъ

$$r=r_0e^{-\frac{\rho}{R}},$$

а потому поверхность вращенія вещественна только между предѣлами, опредѣленными соотношеніемъ $\rho>R\log\frac{r_0}{R}$, такъ что окружность $\rho=0$ можетъ обратиться вещественнымъ образомъ въ параллель только при $r_0 \leqq R$. Радіусъ наибольшей параллели есть R, соотвѣтствующій значенію $\varrho = R \log \frac{r_0}{R}$; слѣдовательно при приличномъ выборѣ r_0 эта параллель можетъ быть покрыта какою либо изъ разсмотрѣнныхъ окружностей; напр. при $r_0 = R$ мы имѣемъ саму начальную окружность $\varrho = 0$. Наименьшая параллель соотвѣтствуетъ $\varrho = \infty$, и радіусъ ея есть нуль, такъ что поверхность вращенія приближается съ одной стороны ассимптотически къ своей оси между тѣмъ какъ съ другой ограничена плоскостью наибольшей параллели, которой она и касается. На эту поверхность навертывается безчисленное множество разъ псевдосферическая поверхность, кончая линіей $\varrho = 0$, если $r_0 = R$.

Тангенціальная кривизна какой угодно параллели оказывается равною $\frac{1}{R}$ т. е. она одинакова для всѣхъ параллелей. Радіусъ же тангенціальной кривизны параллели есть не что иное какъ часть касательной къ меридіану, заключенная между точкою касанія (на разсматриваемой параллели) и осью. Слѣдовательно для поверхности вращенія, о которой идетъ рѣчь, эта часть касательной постоянна; меридіональная кривая есть извѣстная *линія равныхъ касательныхъ*, а произведенная ею поверхность есть та, которую обыкновенно разсматриваютъ, какъ типъ поверхностей съ постоянной отрицательной кривизной. (Ліувилль, примѣч. IV къ „Application de l'Analyse à la Géometrie“ Монжа).

Съ другой стороны, геодезическія окружности съ безконечно удаленнымъ центромъ соотвѣтствуютъ очевидно предѣльнымъ линіямъ (*орицикламъ*) геометріи Лобачевскаго (Geom. Unt. №№ 31 и 32). Удерживая это названіе, мы можемъ поэтому сказать, что система концентрическихъ предѣльныхъ линій превращается, посредствомъ подходящаго сгибанія поверхности, въ систему параллелей поверхности вращенія, произведенной линіею равныхъ касательныхъ.

Чтобы доказать соотвѣтствіе нашихъ предѣльныхъ линій съ предѣльными линіями Лобачевскаго, замѣтимъ, что двугранному углу $\frac{\sigma}{R}$ двухъ меридіональныхъ плоскостей соотвѣтствуютъ, на параллеляхъ ϱ_1 и ϱ_2, двѣ дуги s_1 и s_2, опредѣляемыя уравненіями

$$s_1 = \sigma e^{-\frac{\varrho_1}{R}},\ s_2 = e^{-\frac{\varrho_2}{R}},$$

откуда, называя τ разстояніе $\varrho_2 - \varrho_1$, получаемъ

$$s_2 = s_1 e^{-\frac{\tau}{R}},$$

формулу, совпадающую съ формулой Лобачевскаго (№ 33), исключая обычнаго различія въ выборѣ единицы.

Выраженіе (17) линейнаго элемента независитъ отъ координатъ (u_0, v_0) центра разсмотрѣнныхъ предѣльныхъ линій; сверхъ того мы видѣли, что каждая изъ предѣльныхъ линій данной системы можетъ принимать положеніе наибольшей параллели. Поэтому можно отсюда заключить, что двѣ произвольныя предѣльныя линіи поверхности могутъ быть всегда наложены одна на другую.

Черезъ двѣ точки псевдосферической поверхности проходятъ всегда двѣ предѣльныя линіи, которыя опредѣлятся, если черезъ середину геодезической линіи, соединяющей ихъ, провести перпендикулярную къ ней геодезическую линію, которой двѣ безконечно удаленныя точки и суть центры искомыхъ предѣльныхъ линій. Дуги этихъ предѣльныхъ линій, заключенныя между данными точками, имѣютъ одну и туже длину, зависящую исключительно отъ геодезическаго разстоянія между данными точками. Называя буквой ρ это разстояніе и буквой σ длину этихъ дугъ, можно легко найти при помощи уравненія (15) и (16) (здѣсь ρ имѣетъ однако другое значеніе) формулу

$$\sigma = 2R\sinh\frac{\rho}{2R},$$

представляющую замѣчательную аналогію съ хорошо извѣстной формулой, дающей хорду въ функціи дуги, стягиваемой сю въ кругѣ радіуса R [1]).

VI.

Вышеизложенное намъ кажется, подтверждаетъ во всѣхъ отношеніяхъ возможность обѣщаннаго истолкованія неевклидовой планиметріи посредствомъ поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

Сама природа этого истолкованія позволяетъ безъ труда предвидѣть, что не можетъ быть аналогичнаго объясненія, столь же реальнаго, для неевклидовой стереометріи. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы дойти до только что изложеннаго объясненія, потребовалось замѣнить плоскость поверхностью, не приводящеюся къ плоскости, т. е. такою поверхностью, которой линейный элементъ никоимъ образомъ не можетъ быть приведенъ къ виду

$$\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

[1]) (См. Батталини, выше указанную статью, стр. 229 и также нашу замѣтку, помѣщенную въ Annali di matematica, т. VI, 1865, стр. 271).

существенно характеризующему плоскость. Слѣдовательно, если бы у насъ не было свѣдѣній о поверхностяхъ, не совмѣщаемыхъ съ плоскостью, намъ было бы невозможно придать настоящее геометрическое значенiе изложенному построенiю. Аналогiя естественно заставляетъ думать, что если можетъ существовать подобное построенiе для неевклидовой стереометрiи,—построенiе это должно быть выведено изъ разсмотрѣнiя пространства, котораго линейный элементъ не могъ бы быть приведенъ къ виду $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, существенно характеризующему Евклидово пространство. И такъ какъ до сихъ поръ у насъ, кажется, нѣтъ понятiя о пространствѣ, отличномъ отъ Евклидова, или по крайней мѣрѣ понятiе о немъ выходитъ изъ области обыкновенной геометрiи, то есть основанiе предполагать, что, если бы даже аналитическiя соображенiя, на которыхъ основываются предъидущiя построенiя, были доступны распространенiю ихъ отъ случая двухъ перемѣнныхъ къ случаю трехъ перемѣнныхъ, результаты, при этомъ получающiеся, не могли бы однако быть построены обыкновенною геометрiей.

Это предположенiе прiобрѣтаетъ степень вѣроятности, весьма близкую къ достовѣрности, если на самомъ дѣлѣ попытаться распространить предъидущiй анализъ на случай трехъ перемѣнныхъ.

Дѣйствительно, если положить

$$ds^2 = \frac{R^2}{(a^2-t^2-u^2-v^2)^2}[(a^2-u^2-v^2)dt+(a^2-v^2-t^2)du^2+$$
$$+(a^2-t^2-u^2)dv^2+2uvdudv+2vtdvdt+2tudtdu] \quad (18)$$

что представляетъ формулу, составленiе которой *à priori* при помощи трехъ перемѣнныхъ t, u, v вытекаетъ изъ разсмотрѣнiя формулы (1) для двухъ перемѣнныхъ u, v, то легко убѣдиться, что аналитическiе выводы, которые можно было получить изъ выраженiя (1), существуютъ всецѣло для новаго выраженiя и что значенiе ds, даваемое этимъ послѣднимъ есть на самомъ дѣлѣ значенiе линейнаго элемента того пространства, въ которомъ неевклидова стереометрiя находитъ себѣ настолько же полное толкованiе говоря *аналитически*, какъ и толкованiе данное выше для планиметрiи.

Но если перемѣнныя t, u, v замѣнимъ тремя новыми ρ, ρ_1, ρ_2 положивъ

$$t=r\cos\rho_1,\ u=r\sin\rho_1\cos\rho_2,\ v=r\sin\rho_1\sin\rho_2,$$
$$\frac{Radr}{a^2-r^2}=d\rho,$$

то получается формула

$$ds^2 = d\varrho^2 + \left(R\sinh\frac{\varrho}{R}\right)^2 (d\varrho_1^2 + \sin^2\varrho_1 d\varrho_2^2),$$

показывающая, что ϱ, ϱ_1 и ϱ_2 суть криволинейныя ортогональныя координаты разсматриваемаго пространства.

Но Ламе доказалъ (Leçons sur les coordonnées curvilignes, стр. 76 и 78), что если принять за криволинейныя координаты точекъ пространства параметры ϱ, ϱ_1, ϱ_2 трехъ семействъ ортогональныхъ поверхностей, причемъ квадратъ разстоянія двухъ безконечно близкихъ точекъ представляется выраженіемъ вида $ds^2 = H^2 d\varrho^2 + H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2$, то три функціи H, H_1 и H_2 перемѣнныхъ ϱ, ϱ_1, ϱ_2, входящія въ это выраженіе, непремѣнно удовлетворяютъ двумъ различнымъ системамъ, причемъ каждая состоитъ изъ трехъ уравненій съ частными производными, имѣющихъ типомъ слѣдующія два уравненія.

$$\frac{d^2H}{d\varrho_1 d\varrho_2} = \frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\varrho_1}\cdot\frac{dH_1}{d\varrho_2} + \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\varrho_2}\cdot\frac{dH_2}{d\varrho_1},$$

$$\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\varrho_1}\right) + \frac{d}{d\varrho_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\varrho_2}\right) + \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\varrho}\cdot\frac{dH_2}{d\varrho} = 0.$$

Въ настоящемъ случаѣ

$$H = 1, \quad H_1 = R\sinh\frac{\varrho}{R}, \quad H_2 = R\sinh\frac{\varrho}{R}\sin\varrho_1,$$

и для этихъ значеній три первыя уравненія удовлетворены тожественно; но три послѣднія удовлетворяются только при $R = \infty$. Итакъ выраженіе (18) не можетъ принадлежать линейному элементу обыкновеннаго Евклидова пространства, и формулы, основанныя на этомъ выраженіи не могутъ быть построены посредствомъ фигуръ, которыя даетъ намъ обыкновенная геометрія.

Чтобы пополнить доказательство невозможности дойти до построенія неевклидовой стереометріи, не покидая области обыкновенной геометріи, нужно было бы быть въ состояніи исключить возможность достигнуть этого иначе, чѣмъ распространеніемъ метода, примѣненнаго къ планиметріи. Мы не беремся утверждать, чтобы это было абсолютно невозможно; мы говоримъ только, что это кажется намъ весьма невѣроятнымъ.

Мы замѣтили мимоходомъ, что выраженіе (18) служитъ основаніемъ полному аналитическому толкованію неевклидовой стереометріи. Это истолкованіе будетъ изложено въ другомъ мемуарѣ [1]). Здѣсь мы обратимъ вниманіе только на то, что, полагая въ форм. (18) $t=const.$, получаемъ выраженіе линейнаго элемента дѣйствительной поверхности постоянной отрицательной кривизны, такъ что эту поверхность, на которой, какъ мы видѣли, оправдываются теоремы неевклидовой планиметріи, можно разсматривать существующею одновременно какъ въ обыкновенномъ пространствѣ, такъ и въ пространствѣ неевклидовомъ.

Примѣчаніе I.

Приведеніе линейнаго элемента поверхности постоянной отрицательной кривизны къ виду, который мы употребляли въ предыдущихъ изысканіяхъ, основано на результатахъ мемуара, напечатаннаго нами въ VII томѣ „Annali di Matematica" (Римъ, 1866) подъ заглавіемъ: „рѣшеніе задачи о перенесеніи точекъ поверхности на плоскость такимъ образомъ, чтобы геодезическія линіи были представлены прямыми линіями".

Принципъ, на основаніи котораго мы рѣшили эту задачу, слѣдующій: когда устанавливаютъ соотвѣтствіе по нѣкоторому закону точекъ какой либо поверхности съ точками плоскости, можно всегда за двѣ независимыя перемѣнныя u и v, которыя должны бы были опредѣлять точку поверхности, принять прямоугольныя координаты x и y соотвѣтствующихъ точекъ плоскости. Въ такомъ случаѣ, если требуется, чтобы геодезическимъ линіямъ поверхности соотвѣтствовали прямыя линіи на плоскости, нужно, чтобы дифференціальное уравненіе 2-го порядка геодезическихъ линій имѣло полнымъ интеграломъ линейное уравненіе между u и v, а потому нужно, чтобы это дифференціальное уравненіе приводилось просто къ слѣдующему:

$$dud^2v-dvd^2u=0.$$

---

[1]) Въ работѣ, которая должна появиться въ Annali di Matematica, и гдѣ самые общіе принципы неевклидовой геометріи разсмотрѣны независимо отъ ихъ возможныхъ отношеній къ дѣйствительнымъ фигурамъ обыкновенной геометріи. Въ настоящей работѣ мы имѣли въ виду главнымъ образомъ пробудить нѣкоторый интересъ къ подобнымъ изысканіямъ, предлагая изслѣдованіе случая, въ которомъ абстрактная геометрія встрѣчается съ конкретною; считаемъ однако нужнымъ замѣтить, что значеніе новаго порядка понятій не менѣе важно, чѣмъ возможность указаннаго совпаденія.

Изъ общаго же вида упомянутаго дифференціальнаго уравненія заключаемъ, что это возможно только тогда, когда функціи E, F, G, входящія въ выраженіе линейнаго элемента.

$$ds=\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2},$$

удовлетворяютъ четыремъ соотношеніямъ, приводящимъ насъ къ заключенію, что этотъ самый линейный элементъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$ds=R\frac{\sqrt{(a^2+v^2)du^2-2uvdudv+(a^2+u^2)dv^2}}{a^2+u^2+v^2},$$

гдѣ R и a произвольныя постоянныя. Для опредѣленія природы поверхностей, содержащихся въ этой формѣ, было вычислено выраженіе сферической кривизны (количество, обратное произведенію двухъ главныхъ радіусовъ кривизны) и найдено, что оно имѣетъ значеніе $\frac{1}{R^2}$, изъ чего выведено заключеніе, что поверхности, о которыхъ идетъ рѣчь, имѣютъ сферическую кривизну постоянную и потому такія поверхности суть единственныя, допускающія представленіе на плоскости подъ назначеннымъ выше условіемъ.

Въ упомянутомъ мемуарѣ мы предполагали дѣйствительными постоянные R и a, потому что цѣль, въ виду которой наши изысканія были предприняты, естественно приводила къ такому предположенію. Дѣйствительно мы замѣтили, что этотъ элементъ въ частности принадлежитъ сферической поверхности радіуса R, касательной къ плоскости изображеній въ началѣ координатъ и представленной на этой плоскости центральною проекціей; въ такомъ случаѣ перемѣнныя u, v суть въ точности прямоугольныя координаты проекціи точки, къ которой эти перемѣнныя относятся.

Но такъ какъ значенія постоянныхъ R и a на самомъ дѣлѣ произвольны, то позволительно предположить ихъ мнимыми, если находимъ это нужнымъ. Дѣйствительно, если измѣнить эти постоянныя въ $R\sqrt{-1}$ и $a\sqrt{-1}$, то линейный элементъ, полученный въ такомъ предположеніи, соотвѣтствуетъ поверхности постоянной отрицательной кривизны $= -\frac{1}{R^2}$, геодезическія линіи которой какъ въ предъидущемъ случаѣ изображаются на плоскости прямыми линіями и потому линейными уравненіями между u и v. Такимъ именно образомъ можно перейти отъ формулъ цитированнаго мемуара къ формуламъ настоящей работы. Единственная существенная разница между обоими случаями та, что въ первомъ перемѣнныя u и v могутъ принимать всѣ вещественныя значенія; между тѣмъ какъ во второмъ эти перемѣнныя заключены въ извѣстныхъ предѣлахъ, которые легко опредѣлить.

Примѣчаніе II.

Если написать выраженіе линейнаго элемента въ видѣ

$$ds^2 = R^2 \frac{w^2(du^2+dv^2)+(udu+vdv)^2}{w^4}, \tag{1}$$

то можно непосредственно видѣть, что для перехода отъ первоначальныхъ основныхъ геодезическихъ линій къ двумъ другимъ, проведеннымъ чрезъ тоже начало и взаимно - ортогональнымъ, нужно пользоваться обыкновенными формулами преобразованія прямоугольныхъ координатъ на плоскости, когда начало остается неизмѣннымъ, т. е. формулами

$$u = u'\cos\mu - v'\sin\mu,\quad v = u'\sin\mu + v'\cos\mu,$$

гдѣ u', v' новыя координаты и μ—уголъ новой основной линіи $v'=0$ со старой $v=0$. Въ самомъ дѣлѣ изъ этихъ формулъ имѣемъ

$$u^2+v^2=u'^2+v'^2,\ du^2+dv^2=du'^2+dv'^2$$

и потому формула (1) обращается въ

$$ds^2 = R^2 \frac{w'^2(du'^2+dv'^2)+(u'du'+v'dv')^2}{w'^4}, \tag{1'}$$

сохраняя первоначальный свой видъ [1]). Длина геодезической дуги, выходящей изъ начала, также сохраняетъ, во второй

---

[1]) Изъ этого видно, что геодезическія линіи, ортогональныя къ выходящимъ изъ начала, представляются хордами предѣльнаго круга, перпендикулярными къ діаметрамъ, представляющимъ эти послѣднія геодезическія линіи. Обратно для того, чтобы двѣ геодезическія линіи, пересѣкающіяся ортогонально въ точкѣ (u, v), были представлены на вспомогательной плоскости двумя ортогональными прямыми, нужно, чтобы одна изъ этихъ геодезическихъ линій проходила черезъ начало ($u=v=0$), какъ это легко вывести изъ формулы, данной въ текстѣ для преобразованія угловъ. Это свойство становится очевиднымъ въ центральной проекціи сферы.

системѣ, видъ, который она имѣла въ первой системѣ, потому что она опредѣляется уравненіемъ

$$\varrho = \frac{R}{2} \log \frac{a+\sqrt{u'^2+v'^2}}{a-\sqrt{u'^2+v'^2}} \tag{2}$$

Разсмотримъ теперь вліяніе перемѣны начала.

Возьмемъ для этого какую нибудь точку (u_0, v_0) и предположимъ что основная линія $v'=0$ второй системы проходитъ черезъ эту точку; т. е. положимъ, что $\cos \mu = \frac{u_0}{r_0}$, $\sin \mu = \frac{v_0}{r_0}$ и потому

$$u = \frac{u_0 u' - v_0 v'}{r_0},\ v = \frac{v_0 u' + u_0 v'}{r_0},$$

гдѣ $r_0 = \sqrt{u_0^{\,2}+v_0^{\,2}}$. Образуемъ теперь третью систему координатъ u'', v'', которой основными линіями были бы геодезическая линія $v'=0$ и другая геодезическая линія, проведенная черезъ точку (u_0, v_0) нормально къ $v'=0$.

Проведемъ черезъ произвольную точку (u', v') геодезическую линію, перпендикулярную къ $v'=0$; назовемъ q ея длину и p ея разстояніе отъ прежняго начала (измѣренное на линіи $v=0$). Формула (2) дастъ непосредственно

$$p = \frac{R}{2} \log \frac{a+u'}{a-u'},$$

между тѣмъ какъ изъ формулы (1) легко можно найти, полагая $du'=0$,

$$q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2-u'^2}+v'}{\sqrt{a^2-u'^2}-v'} \tag{5}$$

Геодезическое разстояніе p_0 обоихъ началъ $(u=v=0)$, (u_0, v_0) имѣетъ значеніе

$$p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a+r_0}{a-r_0},$$

вслѣдствіе чего геодезическая дуга, заключенная на основной геодезической линіи $v''=0$ третьей системы (которая тожественна съ $v'=0$) между точкою (u_0, v_0) и нормалью q, опредѣляется уравненіемъ

$$p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{(a+u')(a-r_0)}{(a-u')(a+r_0)} \tag{6}$$

Но, означая a_0 постоянную, аналогичную постоянной a въ третьей системѣ, и замѣчая, что въ этой системѣ количества, аналогичныя количествамъ p, q второй системы, суть $p-p_0$ и q_0, мы приходимъ къ заключенію, что по аналогіи къ (4) и (5), должно быть

$$p-p_0=\frac{R}{2}\,log\,\frac{a_0+u''}{a_0-u''},\quad q=\frac{R}{2}\,log\,\frac{\sqrt{a_0^2-u''^2}+v''}{\sqrt{a_0^2-u''^2}-v''}.$$

Приравнивая эти выраженія выраженіямъ (6) и (5), получаемъ два соотношенія, дающія слѣдующее:

$$u''=\frac{aa_0(u'-r_0)}{a^2-r_0u'},\quad v''=\frac{a_0w_0v'}{a^2-r_0u'},\ (w_0=\sqrt{a^2-r_0^2}) \tag{7}$$

Постоянная a_0 остается, собственно говоря, неопредѣленной, такъ какъ мы имѣемъ уравненія только между отношеніями $\frac{u'}{a}$, $\frac{v'}{a}$ и отношеніями $\frac{u''}{a_0}$, $\frac{v''}{a_0}$. Поэтому a_0 можно опредѣлить условіемъ, что для $u''=0$, т. е. для $u'=0$, v' равняется v'', и тогда находимъ

$$a_0=w_0=\sqrt{a^2-u_0^2-v_0^2}.$$

Удерживая это значеніе для a_0, получимъ изъ предыдущихъ формулъ

$$u'=\frac{a(a_0r_0+au'')}{aa_0+r_0u''},\quad v'=\frac{aa_0v''}{aa_0+r_0u''},$$

эти же значенія, будучи подставлены въ (1′), даютъ:

$$ds^2=R^2\,\frac{(a_0^2-v''^2)du''^2+2u''v''du''dv''+(a_0^2-u''^2)dv''^2}{(a_0^2-u''^2-v''^2)^2}$$

Итакъ перенесеніе начала точно также не измѣняетъ формы линейнаго элемента, которая отличается отъ прежней только подстановкой a_0 вмѣсто a, что не представляетъ никакого существеннаго измѣненія.

Чтобы получить наконецъ четвертую систему, вполнѣ независимую отъ первой, замѣнимъ обѣ основныя линіи $u''=0$, $v''=0$ двумя новыми ортогональными геодезическими линіями, имѣющими тоже начало (u_0, v_0), чего мы достигнемъ полагая

$$u''=u'''cos\nu-v'''sin\nu,\quad v''=u'''sin\nu+v'''cos\nu,$$

а мы знаемъ, что подобная подстановка ни въ чемъ не измѣняетъ формы линейнаго элемента. Слѣдовательно видимъ, что форма, принятая первоначально для линейнаго элемента, вовсе не представляетъ чего либо спеціально свойственнаго опредѣленной системѣ основныхъ геодезическихъ линій; точка ($u=v=0$) можетъ быть, наоборотъ, какою угодно точкою поверхности и основная геодезическая линія $v=0$ можетъ быть какою угодно изъ геодезическихъ линій, проведенныхъ черезъ эту точку.

Принимая въ соображеніе соотношенія, которыя мы нашли между координатами послѣдовательныхъ системъ, и полагая для краткости

$$p=\frac{au_0}{a_0r_0}cos\nu-\frac{v_0}{r_0}sin\nu,\quad q=\frac{av_0}{a_0r_0}cos\nu+\frac{u_0}{r_0}sin\nu,\quad r=\frac{r_0cos\nu}{aa_0},$$
$$p_1=\frac{au_0}{a_0r_0}sin\nu+\frac{v_0}{r_0}cos\nu,\quad q_1=\frac{av_0}{a_0r_0}sin\nu-\frac{u_0}{r_0}cos\nu,\quad r_1=\frac{r_0sin\nu}{aa_0};$$

мы найдемъ слѣдующія окончательныя соотношенія между координатами u, v и координатами u''', v''':

$$u=\frac{u_0+pu'''-p_1v'''}{1+ru'''-r_1v'''},\quad v=\frac{v_0+qu'''-q_1v'''}{1+ru'''-r_1v'''}.$$

Если разсматривать u и v, а также u''' и v''', какъ прямоугольныя координаты соотвѣтственныхъ точекъ двухъ плоскостей, то эти формулы выражаютъ гомографическую зависимость между самими плоскостями, о чемъ было говорено въ мемуарѣ, цитированномъ въ примѣчаніи I.

Если сравнить первоначальное выраженіе линейныхъ элементовъ въ функціи u и v съ окончательнымъ выраженіемъ въ функціи u''' и v''', то найдемъ, что эти оба выраженія можно сдѣлать тождественными, полагая

$$\frac{u}{a}=\pm\frac{u'''}{a_0},\ \frac{v}{a}=\pm\frac{v'''}{a_0},$$

или иначе

$$\frac{u}{a}=\pm\frac{v'''}{a_0},\ \frac{v}{a}=\pm\frac{u'''}{a_0};$$

причемъ выборъ знака произволенъ въ каждой формулѣ. Это доказываетъ, что псевдосферическая поверхность, разсматриваемая, какъ гибкая и нерастяжимая, можетъ быть наложена сама на себя такъ, чтобы какая угодно изъ ея точекъ (u_0, v_0) заняла положеніе какой угодно другой точки $(u=v=0)$, и чтобы какая угодно изъ геодезическихъ линій, выходящихъ изъ первой точки (напр. линія $v'''=0$) совпадала на всемъ своемъ протяженіи съ какою угодно изъ геодезическихъ линій, выходящихъ изъ второй точки (напр. съ $v=0$). Болѣе того, двойственность знаковъ указываетъ, что наложеніе двухъ геодезическихъ угловъ одной и тойже величины, имѣющихъ вершины въ этихъ двухъ точкахъ, можно производить двоякимъ образомъ. Напр. прямой уголъ геодезическихъ линій $u'''=0$, $v'''=0$ можетъ быть наложенъ на уголъ линій $u=0$, $v=0$, или при помощи совмѣщенія $u'''=0$ съ $u=0$ и $v'''=0$ съ $v=0$, или же посредствомъ совмѣщенія $u'''=0$ съ $v=0$ и $v'''=0$ съ $u=0$. Итакъ каждая часть поверхности можетъ быть наложена двоякимъ образомъ на какую угодно часть той же поверхности; слѣдовательно если на этой части найдется какая *либо* фигура (напр. геодезическій треугольникъ) то она можетъ подвергнуться на поверхности всѣмъ перемѣщеніямъ, какимъ можетъ подвергаться плоская фигура на своей плоскости, оставаясь постоянно равной самой себѣ. Естественно, что это равенство должно относиться только къ длинамъ линій и къ величинамъ угловъ, потому что абсолютная кривизна линій вовсе не входитъ здѣсь въ разсмотрѣніе [1]).

Свойство, только что нами доказанное, было уже извѣстно, но изложенное выше доказательство, намъ кажется, обладаетъ строгостью, соотвѣтствующею разбираемому вопросу. Впрочемъ теорема Гаусса устанавливаетъ, что если свойство о которомъ мы говоримъ, можетъ принадлежать какой либо поверхности, эта поверхность необходимо есть одна изъ имѣющихъ постоянную сферическую кривизну.

Отмѣтимъ полезный результатъ, который легко выводится изъ нѣкоторыхъ изъ предыдущихъ формулъ. Геодезическая окружность, которой центръ есть точка $(u_0\ v_0)$ и радіусъ ρ, представлена въ третьей системѣ уравненіемъ

$$u''^2+v''^2=a_0^2 tangh^2 \frac{\rho}{R},$$

---

[1]) Относительное равенство, о которомъ идетъ рѣчь, было бы равенствомъ абсолютнымъ для существа, геометрическія представленія котораго не выходили бы изъ области двухъ измѣреній разсматриваемой поверхности, подобно тому какъ наши представленія не выходятъ изъ области трехъ измѣреній обыкновеннаго пространства

какъ это слѣдуетъ изъ формулы (6) текста. Но изъ формулъ (7) настоящаго примѣчанія, такъ какъ $a_0 = w_0 = \sqrt{a^2 - r_0^2}$, получаемъ

$$u''^2 + v''^2 = \left(\frac{a_0}{a^2 - r_0 u'}\right)^2 \left\{ a^2[(u' - r_0)^2 + v'^2] - (r_0 v')^2 \right\},$$

и кромѣ того формулы (3) даютъ

$$u' = \frac{uu_0 + vv_0}{r_0}, \quad v' = \frac{uv_0 - ur_0}{r_0},$$

откуда

$$u' - r_0 = \frac{u_0(u - u_0) + v_0(v - v_0)}{r_0}, \quad v' = \frac{u_0(v - v_0) - v_0(u - u_0)}{r_0};$$

а потому наконецъ имѣемъ

$$\frac{a^2[(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2] - (u_0 v - uv_0)^2}{(a^2 - uu_0 - vv_0)^2} = tangh^2 \frac{\varrho}{R}.$$

Это уравненіе даетъ геодезическое разстояніе ϱ двухъ произвольныхъ точекъ (u, v), (u_0, v_0). Когда эти точки безконечно близки, то это уравненіе возвращаетъ насъ непосредственно къ выраженію линейнаго элемента, служившему намъ исходной точкой.

Если ввести вмѣсто *tangh* функцію *cosh*, то предъидущее уравненіе принимаетъ болѣе изящный видъ:

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = cosh \frac{\varrho}{R}.$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРІЯ

ПРОСТРАНСТВЪ СЪ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ.

Е. БЕЛЬТРАМИ (*).

Переводъ П. П. Мея.

Въ мемуарѣ, помѣщенномъ въ VII томѣ первой серіи „Annali di Matematica" (Римъ, 1866), я разсмотрѣлъ поверхности, имѣющія то свойство, что ихъ геодезическія линіи представляются линейными уравненіями, и нашелъ, что это свойство имѣетъ мѣсто только для поверхностей постоянной кривизны и для извѣстныхъ спеціальныхъ перемѣнныхъ, введенныхъ анализомъ вопроса.

Въ настоящемъ мемуарѣ я излагаю результаты, значительно болѣе общіе, къ которымъ меня привело дальнѣйшее развитіе этой мысли въ связи съ нѣкоторыми принципами, установленными Риманномъ въ замѣчательномъ посмертномъ трудѣ его „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (О гипотезахъ, лежащихъ въ основѣ геометріи), опубликованномъ недавно г. Дедекиндомъ въ 13-мъ томѣ „Геттингенскихъ мемуаровъ" (**). Надѣюсь, что мои изысканія облегчатъ пониманіе нѣкоторыхъ частей этого глубокаго труда.

Извѣстныя выраженія, которыми я часто пользуюсь для сокращенія, не покажутся, я думаю, ни натянутыми, ни темными тому, кто займется болѣе сущностью, чѣмъ формою. Внимательный читатель легко пойметъ ихъ безъ дальнѣйшихъ объясненій и имѣетъ полную возможность придавать имъ смыслъ только чисто аналитическій.

(*) Annali di Matematica pura ed applicata, 2-я серія, т. II, стр. 232—255.

(**) Riemann's gesammelte Werke. 1876. 254—269.

Дифференціальное выраженіе

$$ds = R\frac{\sqrt{dx^2+dx_1^2+dx_2^2+\ .\ .\ .\ +dx_n^2}}{x}\ .\ \ .\ \ .\ (1)$$

гдѣ $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ суть $n+1$ дѣйствительныхъ перемѣнныхъ, связанныхъ уравненіемъ

$$x^2+x_1^2+x_2^2+\ .\ .\ .\ +x_n^2=a^2\ .\ \ .\ \ .\ (2),$$

между тѣмъ какъ R и a постоянныя, можно принимать за *линейный элементъ*, или разстояніе между двумя безконечно близкими точками, *въ пространствѣ n измѣреній*, котораго каждая *точка* опредѣлена системою значеній *n координатъ* $x_1, x_2, \ldots x_n$. Видъ этого выраженія опредѣляетъ *природу* этого пространства.

Если положить, для сокращенія,

$$\Omega=\sqrt{dx^2+dx_1^2+\ .\ .\ .\ +dx_n^2}$$

то *геодезическими линіями* разсматриваемаго пространства будутъ тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\delta\int\frac{\Omega}{x}=0,$$

при условіи $x\delta x+x_1\delta x_1+\ .\ .\ .\ +x_n\delta x_n=0$. Посредствомъ обыкновенныхъ преобразованій варіаціи интеграла можно первое уравненіе представить подъ видомъ:

$$\int\left\{\delta x\left[\frac{\Omega}{x^2}+d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right)\right]+\delta x_1.d\left(\frac{dx_1}{x\Omega}\right)+\ .\ .\ .\ .\ +\delta x_n\,.\,d\left(\frac{dx_n}{x\Omega}\right)\right\}=0,$$

если же принять въ разсчетъ соотношеніе, связывающее варіаціи $\delta x, \delta x_1 \ldots . \delta x_n$, то это уравненіе разлагается на слѣдующія:

$$\frac{\Omega}{x^2}+d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right)=kx\,,\quad d\left(\frac{dx_1}{x\Omega}\right)=kx_1,\ .\ .\ .\ .\ d\left(\frac{dx_n}{x\Omega}\right)=kx_n,$$

гдѣ k есть пока еще неопредѣленный множитель. Умножая эти уравненія соотвѣтственно на $x, x_1 \ldots . x_n$ и затѣмъ складывая полученныя уравненія по частямъ, имѣемъ

$$d\left(\frac{xdx+x_1dx_1+\ .\ .\ .\ .+x_ndx_n}{x\Omega}\right)=k(x^2+x_1^2+\ .\ .\ .\ .+x^2{}_n);$$

слѣдовательно, на основаніи уравненія (2), $k=0$, и потому

$$d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right)+\frac{\Omega}{x^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$dx_1=c_1x\Omega,\ dx_2=c_2x\Omega,\ .\ .\ .\ .\ dx_n=c_nx\Omega,\ .\ .\quad (4)$$

гдѣ $c_1, c_2, \ldots c_n$ суть постоянныя. Эти n послѣднихъ уравненій, будучи возвышены въ квадратъ и сложены, даютъ

$$\Omega=-\frac{dx}{\sqrt{1-c^2x^2}}\ ,\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

полагая

$$c=\sqrt{c_1{}^2+c^2{}_2+\ldots+c_n{}^2}.$$

Это значеніе Ω обращаетъ уравненіе (3) въ тожество, а потому это уравненіе безполезно принимать въ разсчетъ; уравненія же (4), послѣ исключенія $x\Omega$ и интегрированія, даютъ

$$x_1=b_1x_n+b'_1,\ x_2=b_2x_n+b'_2,\ \ldots,\ x_{n-1}=b_{n-1}x_n+b'_{n-1}.$$

Итакъ геодезическія линіи разсматриваемаго пространства представляются $n-1$ линейными уравненіями между n координатами $x_1, x_2, \ldots x_n$, подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто на плоскости и въ обыкновенномъ пространствѣ при употребленіи декартовыхъ координатъ и на поверхностяхъ постоянной кривизны при употребленіи перемѣнныхъ u и v цитированнаго выше мемуара. Между системами геодезическихъ линій нужно отмѣтить, какъ частный случай, тѣ системы, которыя получатся, если приравняемъ постояннымъ всѣ координаты, кромѣ одной. Черезъ каждую точку пространства проходитъ геодезическая линія каждой изъ этихъ системъ; къ числу ихъ принадлежатъ и сами координатныя оси $x_1, x_2, \ldots x_n$ (причемъ для каждой изъ нихъ всѣ координаты, кромѣ одной, равны нулю): мы ихъ назовемъ *системами* $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Для полученія длины геодезической дуги ϱ, заключенной между двумя данными точками, замѣтимъ, что изъ уравненія (5) имѣемъ

$$d\varrho=R\frac{\Omega}{x}=-\frac{Rdx}{x\sqrt{1-c^2x^2}}$$

откуда

$$cx = \frac{1}{Cosh\frac{\varrho-\varrho_0}{R}},$$

гдѣ ϱ_0—произвольная постоянная и x означаетъ функцію

$$\sqrt{a^2-x_1{}^2-x_2{}^2-\ldots-x_n{}^2}.$$

Если обозначить буквами $x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots x_n{}^0$ значенія координатъ въ точкѣ $\varrho=0$, т. е. въ началѣ дуги, и буквою x^0 соотвѣтственное значеніе функціи x, то получаемъ

$$cx^0 = \frac{1}{Cosh\frac{\varrho_0}{R}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

откуда имѣемъ, по исключеніи c, имѣемъ

$$x = \frac{x^0 Cosh\frac{\varrho_0}{R}}{Cosh\frac{\varrho-\varrho_0}{R}},$$

уравненіе, которому можно дать видъ:

$$\frac{x^2 Sinh^2\frac{\varrho}{R}}{Cosh^2\frac{\varrho_0}{R}} = 2xx_0 Cosh\frac{\varrho}{R} - x^2 - x'^2. \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

Съ другой стороны изъ предъидущихъ уравненій

$$x\Omega = \frac{x^2 d\varrho}{R} = \frac{1}{c^2}\, d tangh\frac{\varrho-\varrho^0}{R},$$

а потому уравненія (4). даютъ

$$x_1 = a_1 + \frac{c_1}{c^2} tangh\frac{\varrho-\varrho_0}{R}, \quad x_2 = a_2 + \frac{c_2}{c^2} tangh\frac{\varrho-\varrho_0}{R}, \quad \ldots$$

или, вводя вмѣсто постоянныхъ $a_1, a_2, \ldots$, количества $x_1{}^0, x_2{}^0 \ldots$,

$$x_1 - x_1{}^0 = c_1 xx^0 Sinh\frac{\varrho}{R}, \quad x_2 - x_2{}^0 = c_2 xx^0 Sinh\frac{\varrho}{R}, \quad \ldots,$$

отсюда, возвышая въ квадратъ и складывая, имѣемъ:

$$2(a^2-x_1x_1^0-x_2x_2^0-\dots-x_nx_n^0)-x^2-x^{0\,2}=c^2x^2x^{0\,2}Sinh^2\frac{\varrho}{R}.$$

Это уравненіе, въ силу уравненій (6) и (7), даетъ окончательно

$$Cosh\frac{\varrho}{R}=\frac{a^2-x_1x_1^0-x_2x_2^0-\dots-x_nx_n^0}{\sqrt{(a^2-x_1-x_1^0-\dots-x_n^2)(a^2-x_1^{0\,2}-x_2^{0\,2}-\dots-x_n^{0\,2})}}, \quad (8)$$

общую формулу, выражающую длину геодезической дуги въ функціи координатъ ея концовъ.

Если предположить вещественными перемѣнныя $x, x_1, \dots x_n$ и постоянныя R и a, то предѣлъ разсматриваемаго нами пространства n измѣреній есть *пространство* $n-1$ *измѣреній*, данное уравненіемъ

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=a^2.$$

Внутри этого предѣла, т. е. для

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2<a^2,$$

первое пространство *сплошно* и *односвязно*. Изъ уравненія (8) слѣдуетъ еще, что точки, принадлежащія пространству—предѣлу, всѣ находятся на *безконечномъ* разстояніи.

Во всей дѣйствительной области, только что нами опредѣленной, величина ds, данная уравненіемъ (¹), остается постоянно положительной для всякой системы значеній отношеній

$$dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n.$$

Если взять вторую систему приращеній $\delta x_1, \delta x_2, \dots \delta x_n$ и положить

$$\delta s^2=R^2\frac{\delta x^2+\delta x_1^2+\dots+\delta x_n^2}{x^2},$$

то выраженіе

$$ds^2\delta s^2-R^4\frac{(dx\delta x+dx_1\delta x_1+\dots+dx_n\delta x_n)^2}{x^4}$$

не можетъ никогда сдѣлаться отрицательнымъ (въ силу хорошю извѣстнаго преобразованія, которое можно къ нему примѣнить); слѣдовательно количество

$$\frac{R^2(dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \ . \ . \ . \ + dx_n\delta x_n)}{x^2 ds\delta s}$$

не можетъ никогда сдѣлаться больше единицы. Поэтому всегда можно взять дѣйствительный уголъ θ, для котораго

$$dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \ . \ . \ . \ + dx_n\delta x_n = \frac{x^2 ds\delta s}{R^2} Cos\theta \ . \quad . \quad (9)$$

Изъ этой возможности вытекаетъ то важное слѣдствіе, что, вычисляя при помощи уравненія (1) три значенія ds, соотвѣтствующія тремъ слѣдующимъ, взятымъ попарно, системамъ значеній перемѣнныхъ

$$\begin{array}{llll} (x_1, & x_2, & . \ . \ . \ . \ . \ . & x_n), \\ (x_1 + dx_1, & x_2 + dx_2, & . \ . \ . \ . \ . \ . & x_n + dx_n), \\ (x_1 + \delta x_1, & x_2 + \delta x_2, & . \ . \ . \ . \ . \ . & x_n + \delta x_n), \end{array}$$

получаемъ три числа, выражающія длины трехъ сторонъ прямолинейнаго треугольника. Назовемъ, въ самомъ дѣлѣ, буквами M, M', M'' три упомянутыя системы и ds обозначимъ MM', а δs обозначимъ MM''. Значенія системы M'' можно вывести изъ значеній системы M', давъ этимъ послѣднимъ соотвѣтственныя приращенія

$$\delta x_1 - dx_1, \ \delta x_2 - dx_2, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \delta x_n - dx_n.$$

Слѣдовательно, пренебрегая безконечно-малыми порядка выше второго, можно положить

$$\overline{M'M''}^2 = \frac{R^2}{x^2}\left[(\delta x - dx)^2 + (\delta x_1 - dx_1)^2 + . \quad . \quad + (\delta x_n - dx_n)^2\right]$$

$$= ds^2 + \delta s^2 - 2\frac{R^2(dx\delta x + dx_1\delta x_1 + . \quad . \quad . \ + dx_n\delta x_n)}{x^2},$$

или же

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MM''}^2 - 2\overline{MM'}.\overline{MM''}.Cos\theta,$$

гдѣ θ дѣйствительный уголъ. Это уравненіе доказываетъ справедливость изложеннаго выше свойства и дѣлаетъ понятною возможность уподобленія всякой системы значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2 \ldots x_n$ *точкѣ*, опредѣленной своими координатами. Слѣдуя тому же порядку идей, считаютъ два линейные элемента ds, δs *ортогональными*, когда для этихъ элементовъ $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. (по 9) когда приращенія d и δ удовлетворяютъ условію.

$$dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \ldots + dx_n\delta x_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

которое, для удобства рѣчи, можно назвать *условіемъ ортогональности*.

Разсмотримъ, напримѣръ, пространство $n-1$ измѣреній $x_1 = 0$ и положимъ, что изъ одной изъ его точекъ выходятъ два линейные элемента, одинъ ds, расположенный въ самомъ пространствѣ, и другой δs, направленный по геодезической линіи системы x_1, проходящей черезъ эту точку. Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$x_1 = 0,\ dx_1 = 0,\ \delta x_2 = \delta x_3 = \ldots = \delta x_n = 0,\ \delta x = 0,$$

слѣдовательно условіе ортогональности удовлетворено, т. е. каждая геодезическая линія системы x_1 (или, общѣе, системы x_r) ортогональна къ пространству $x_1 = 0$ (или $x_r = 0$) въ точкѣ встрѣчи съ нимъ. Поэтому, въ частности, въ началѣ координатъ направленія n осей всѣ взаимно-ортогональны. Такъ же легко доказывается, что ось x_r ортогональна ко всѣмъ пространствамъ $x_r = Const$; n геодезическихъ линій системъ $x_1, x_2 \ldots x_n$, проведенныхъ черезъ произвольную точку пространства, перпендикулярны къ пространствамъ $n-1$ измѣреній $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$ $x_n = 0$, аналогично тому, что имѣетъ мѣсто на плоскости и въ обыкновенномъ пространствѣ, когда употребляютъ прямоугольныя координаты. Называя $X_1, X_2 \ldots X_n$ части этихъ геодезическихъ линій, заключенныя между данною точкою и пространствами, къ которымъ онѣ соотвѣтственно перпендикулярны, имѣемъ

$$X_r = \frac{R}{2} log \frac{\sqrt{x^2 + x^2_r} + x_r}{\sqrt{x^2 + x^2_r} - x_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Разсмотримъ всю систему геодезическихъ линій, выходящихъ изъ опредѣленной точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots x^0_n)$. Она будетъ представлена слѣдующею системою дифференціальныхъ уравненій, изъ которыхъ послѣднее есть слѣдствіе первыхъ:

$$\frac{dx_1}{x_1-x_1^0}=\frac{dx_2}{x_2-x_2^0}=\ .\ .\ .=\frac{dx_n}{x_n-x_n^0}=\frac{dx}{x-\frac{z}{x}}\ ,$$

гдѣ буквою z, для краткости, означено выраженіе $a^2-x_1x_1^0-$ $-x_2x_2^0-\ .\ .\ .\ x_nx_n^0$. Условіе (10) даетъ для уравненія пространства $n-1$ измѣреній, ортогональнаго ко всѣмъ этимъ геодезическимъ линіямъ, слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}\ ,$$

откуда, интегрируя, имѣемъ:

$$\frac{a^2-x_1x_1^0-x_2x_2^0-\ .\ .\ .\ -x_nx_n^0}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2-\ .\ .\ .\ -x_n^2}}=C\quad .\ .\ .\quad (12)$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (8), мы замѣчаемъ, что пространство, имъ опредѣляемое, есть также мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ точки $(x_1^0,\ x_2^0,\ .\ .\ .\ x_n^0)$; называя постоянное разстояніе буквою ϱ, имѣемъ

$$C=\sqrt{a^2-x_1^{0\,2}-x_2^{0\,2}-\ .\ .\ .\ -x_n^{0\,2}}\ .\ Cosh\frac{\varrho}{R}=x^0Cosh\ \frac{\varrho}{R}\,.$$

Такъ какъ уравненіе (12), по самому способу, которымъ оно было получено, остается еще въ силѣ, когда точка $(x_1^0,$ $x_2^0, . . . x_n^0)$ удаляется въ безконечность, т. е. когда x^0 становится равнымъ нулю и ϱ—безконечности, то мы видимъ также, что въ этомъ случаѣ произведеніе $x^0Cosh\frac{\varrho}{R}$ стремится къ конечному предѣлу, который не можетъ отличаться отъ предѣла произведенія $\frac{1}{2}x^0e^{\frac{\varrho}{R}}$. Итакъ, подставляя вмѣсто ϱ разность $\varrho'-\varrho$ и удаляя точку $(x_1^0,\ x_2^0,\ .\ .\ .\ x_n^0)$ въ безконечность, между тѣмъ какъ ϱ остается постояннымъ, мы получаемъ въ предѣлѣ уравненіе

$$\frac{a^2-x_1x_1^0-x_2x_2^0-\ .\ .\ .\ -x_nx_n^0}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2-\ .\ .\ .\ -x_n^2}}=ke^{-\frac{\varrho}{R}}\quad .\ .\ .\quad (13)$$

гдѣ

$$x_1^{0\,2}+x_2^{0\,2}+\ .\ .\ .\ +x_n^{0\,2}=a^2;$$

это уравненіе представляетъ систему пространствъ n измѣреній, которыя можно опредѣлить, какъ *ортогональныя траекторіи всѣхъ геодезическихъ линій, сходящихся въ одной и той же безконечно-удаленной точкѣ* $(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$. Различныя траекторіи отличаются другъ отъ друга значеніями параметра ρ, выражающаго *постоянное* разстояніе между какою-угодно изъ нихъ и траекторіею, опредѣляемою значеніемъ $\rho = 0$. Постоянная k дана, когда дается какая-нибудь точка этой послѣдней траекторіи.

Мы теперь докажемъ, что природа разсматриваемаго нами до сихъ поръ пространства такова, что если взять какую-либо часть его и перенести ее въ положеніе, отличное отъ прежняго ея положенія, то всегда можно достигнуть совмѣщенія ея съ другою соотвѣтственною частью того-же пространства. Чтобы понять, какъ можетъ это имѣть мѣсто, вообразимъ, что въ этой части пространства разсѣяно ∞^n точекъ, безконечно близкихъ одна къ другой и соединенныхъ попарно маленькими геодезическими дугами, измѣряющими ихъ взаимныя разстоянія. Тогда *наложимость*, о которой идетъ рѣчь, состоитъ въ томъ, что во всякой другой части разсматриваемаго пространства можно разсѣять точки, принадлежащія этому пространству и имѣющія между собою тѣ же взаимныя разстоянія и тоже расположеніе, которое имѣли точки первой части пространства, такъ что сѣть n-го порядка, образованная линіями, соединяющими смежныя точки этой части, можетъ быть вполнѣ отожествлена съ аналогичною сѣтью другой части безъ разрыва или перегиба въ какомъ-либо мѣстѣ связей между точками. Измѣненія, которымъ должна подвергнуться первая сѣть для своего отожествленія со второю, могутъ впрочемъ сдѣлаться *видимыми* только тогда, когда и ту и другую разсматриваютъ *по отношенію къ пространству, имѣющему болѣе n измѣреній*; пока этого нѣтъ, обѣ сѣти представляютъ характеръ *равенства* по *совмѣщенію* или по *симметріи*. Это послѣднее замѣчаніе имѣетъ связь съ остроумнымъ соображеніемъ Мёбіуса (Barycentrischer Calcul, стр. 181).

Предположимъ сперва, что пространство отнесено къ новой системѣ геодезическихъ осей $y_1, y_2 \ldots y_n$, имѣющихъ общее начало съ прежними и, какъ эти послѣднія, ортогональныхъ между собою. Такъ какъ всѣ геодезическія линіи представляются линейными уравненіями, то ясно, что подстановки для перехода отъ перемѣнныхъ x къ перемѣннымъ y должны быть *линейными*; но кромѣ того легко убѣдиться, что ихъ форма должна быть такою, какую мы назвали *ортогональною*. Дѣйствительно форма (8) показываетъ, что разстояніе какой-нибудь точки $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ отъ начала зависитъ только отъ функціи $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2$. Слѣдовательно будемъ имѣть

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2,$$
$$dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2=dy_1^2+dy_2^2+\ldots+dy_n^2$$

и потому

$$\frac{dx^2+dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2}{x^2}=\frac{dy^2+dy_1^2+dy_2^2+\ldots+dy_n^2}{y^2}.$$

Эта тожественность формы обоихъ элементовъ дѣлаетъ очевиднымъ, что двѣ сѣти, которыхъ соотвѣтственныя вершины связаны уравненіями

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3,\ \ldots\ x_n=y_n$$

вполнѣ совмѣстимы. Ясно что вторая изъ этихъ сѣтей есть не что иное, какъ первая, повернутая вмѣстѣ съ первоначальными осями около начала до тѣхъ поръ, пока первоначальныя оси не приняли направленія новыхъ. Слѣдовательно доказано, что указанная совмѣстимость дѣйствительно имѣетъ мѣсто, когда перемѣщеніе сводится къ простому вращенію около начала. Болѣе того, такъ какъ можно было бы сдѣлать болѣе общее положеніе

$$x_1=\pm y_1,\ x_2=\pm y_2\ \ldots\ x_n=\pm y_n$$

причемъ знаки могутъ быть комбинируемы какъ угодно, то ясно, что кромѣ равенства по *совмѣщенію* есть нѣсколько родовъ равенства по *симметріи*

Такъ какъ перемѣна осей при неподвижномъ началѣ не измѣняетъ формы линейнаго элемента, то остается теперь изслѣдовать вліяніе перемѣны начала. Вслѣдствіе того, что взявъ въ пространствѣ какую-либо точку, мы можемъ уже предположить, что ось x_1 направлена къ этой точкѣ,—мы имѣемъ право взять новое начало на этой оси въ точкѣ $x_1=a_1$. Поэтому новое преобразованіе заключается въ томъ, что мы должны сохранить ось x_1 и предыдущія координатныя системы $x_2, x_3 \ldots x_n$ и вмѣсто системы геодезическихъ линій, перпендикулярныхъ къ пространству $x_1=0$, подставить систему геодезическихъ линій, перпендикулярныхъ къ пространству $x_1=a_1$; между этими послѣдними геодезическими линіями находится первоначальная ось x_1. Назовемъ новыя координаты $y_1, y_2 \ldots y_n$ и пусть b есть постоянная, играющая ту же роль по отношенію къ нимъ, какую постоянная a играла по отношенію къ x. Мы обозначимъ подобнымъ образомъ буквами $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ геодезическія линіи, аналогичныя линіямъ $X_1, X_2 \ldots X_n$, и получимъ очевидно, какъ въ формулѣ (11), слѣдующее:

$$Y_r = \frac{R}{2} log \frac{\sqrt{y^2+y_r^2}+y_r}{\sqrt{y^2+y_r^2}-y_r}.$$

Теперь замѣтимъ, что, оставляя неизмѣнными первоначальныя системы $x_2, x_3, \ldots x_n$, имѣемъ прежде всего для этихъ системъ $X_r = Y_r$ и вслѣдствіе этого

$$\frac{x_r}{x} = \pm\frac{y_r}{y}, \text{ для } r=2,\ 3, \ldots n. \quad \ldots \quad (14)$$

Возвышая въ квадратъ и складывая сперва эти уравненія, потомъ ихъ дифференціалы, имѣемъ слѣдующія двѣ формулы:

$$\left.\begin{aligned} &(a^2-x_1^2)y^2 = (b^2-y_1^2)x^2, \\ &\frac{\Omega^2}{x^2} + \left(d\frac{a}{x}\right)^2 - \left(d\frac{x_1}{x}\right)^2 = \frac{\theta^2}{y^2} + \left(d\frac{b}{y}\right)^2 - \left(d\frac{y_1}{y}\right)^2, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

гдѣ $\theta^2 = dy^2 + dy_1^2 + \ldots + dy_n^2$. Во вторыхъ, если разсмотрѣть на оси x_1-овъ части X^0_1, Y^0_1, заключенныя между двумя началами и точкой, въ которой сама ось пересѣкается пространствомъ $x_1 = x_1$, то получаемъ

$$X_1{}^0 = \frac{R}{2} log \frac{a+x_1}{a-x_1}, \quad Y_1{}^0 = \frac{R}{2} log \frac{b+y_1}{b-y_1},$$

между тѣмъ какъ разстояніе между обоими началами равно

$$\frac{R}{2} log \frac{a+a_1}{a-a_1}.$$

Отсюда ясно, что нужно положить

$$X_1{}^0 = Y_1{}^0 + \frac{R}{2} log \frac{a+a_1}{a-a_1},$$

т. е.
$$\frac{(a+x_1)(a-a_1)}{(a-x_1)(a+a_1)}=\frac{b+y_1}{b-y_1},$$

откуда

$$y_1=\frac{ab(x_1-a_1)}{a^2-a_1x_1},\quad x_1=\frac{a(ay_1+a_1b)}{ab+a_1y_1}\quad .\ \ .\ \ .\ \ (16)$$

Эти двѣ формулы ведуть къ соотношеніямъ:

$$a^2-x_1^{\ 2}=\frac{a^2(a^2-a_1^{\ 2})(b^2-y_1^{\ 2})}{(ab+a_1y_1)^2},\ b^2-y_1^{\ 2}=\frac{b^2(a^2-a_1^{\ 2})(a^2-x_1^{\ 2})}{(a^2-a_1x)^2},(17)$$

которыя, будучи надлежащимъ образомъ комбинированы съ первымъ изъ уравненій (15), приводятъ къ слѣдующимъ двумъ уравненіямъ:

$$\frac{a}{x}\sqrt{a^2-a_1^{\ 2}}=a\frac{b}{y}+a_1\frac{y_1}{y},$$
$$\frac{x_1}{y}\sqrt{a^2-a_1^{\ 2}}=a_1\frac{b}{y}+a\frac{y_1}{y};$$

откуда

$$d\left(\frac{a}{x}\right)^2-d\left(\frac{x_1}{x}\right)^2=d\left(\frac{b}{y}\right)^2-d\left(\frac{y_1}{y}\right)^2$$

Въ силу этого послѣдняго уравненія второе изъ уравненій (15) дастъ

$$\frac{dx^2+dx_1^{\ 2}+\ .\ .\ .\ +dx_n^{\ 2}}{x^2}=\frac{dy^2+dy_1^{\ 2}+\ .\ .\ .\ +dy_n^{\ 2}}{y^2}$$

откуда слѣдуетъ, что выраженіе линейнаго элемента сохраняетъ еще свою форму, когда измѣняютъ начало, и слѣдовательно, на основаніи разсужденія, аналогичнаго только что приведенному, совмѣстимость имѣетъ мѣсто во всѣхъ случаяхъ, такъ какъ теперь достаточно было бы примѣнить новую ортогональную подстановку, чтобы сдѣлать новыя оси вполнѣ независимыми отъ первыхъ.

Уравненія (14), (15, первое) и (17) даютъ

$$x_r=\pm\frac{ay_r\sqrt{a^2-a_1^{\ 2}}}{ab+a_1y_1},\ \text{для}\ r=2,\ 3,\ .\ .\ .\ n;$$

это и уравненіе (16, второе), заставляетъ заключить, что самое общее преобразованіе осей достигается посредствомъ *гомографическихъ подстановокъ*.

Переходя отъ этого преобразованія координатъ $x_1, x_2 \ldots x_n$ въ другія того же рода, нужно указать на другія преобразованія дающія элементу замѣчательную форму. Преобразованіе, которое можно назвать *полярнымъ*, получается, если положить прежде всего

$$x_1 = r\lambda_1, \; x_2 = r\lambda_2 \; \ldots \; x_n = r\lambda_n,$$

при условіи $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$. Отсюда имѣемъ

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = dr^2 + r^2 dA^2,$$

гдѣ $dA^2 = d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + \ldots + d\lambda_n^2$; изъ этого же слѣдуетъ

$$ds^2 = \left(\frac{Radr}{a^2 - r^2}\right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2 - r^2} dA^2.$$

Но, называя ϱ геодезическое разстояніе начала или полюса отъ точки $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, имѣемъ

$$\frac{Radr}{a^2 - r^2} = d\varrho, \quad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = Sinh^2 \frac{\varrho}{R};$$

слѣдовательно

$$ds^2 = d\varrho^2 + \left(RSinh\frac{\varrho}{R}\right)^2 dA^2. \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Эта форма оправдываетъ названіе *полярной*, такъ какъ перемѣнными въ ней служатъ радіусъ векторъ ϱ и количества λ, опредѣляющія направленіе этого радіуса.

Отъ этой формы легко перейти къ другой, которую можно было бы назвать *стереографической*, и которая получается, если положить

$$\xi_r = 2Rtangh\frac{\varrho}{2R} \cdot \lambda_r,$$

гдѣ ϱ и λ_r суть прежнія обозначенія. Отсюда получаемъ:

$$\lambda_r d\varrho + Rsinh\frac{\varrho}{R} \cdot d\lambda_r = d\xi_r \cdot cosh^2\frac{\varrho}{2R},$$

$$\cosh^2\frac{\varrho}{2R}=\frac{1}{1-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\ .\ .\ .\ +\xi_n^2}{4R^2}},$$

и далѣе, возвышая въ квадратъ и складывая уравненія, вытекающія изъ предпослѣдняго при послѣдовательной подстановкѣ вмѣсто r чиселъ 1, 2, 3, ... n, и принимая въ соображеніе послѣднее уравненіе и (18), находимъ

$$ds=\frac{\sqrt{d\xi_1^2+d\xi_2^2+\ .\ .\ .\ +d\xi_n^2}}{1-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\ .\ .\ .\ +\xi_n^2}{4R^2}}. \tag{19}$$

Эта формула была дана безъ доказательства Риманомъ, въ цитированномъ выше посмертномъ мемуарѣ (II, § 4).

Риманъ указалъ другую систему координатъ, изъ которой онъ выводитъ мѣру кривизны даннаго пространства вокругъ точки (l. c. II, § 2). Эти координаты, въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ, аналогичны Декартовымъ прямоугольнымъ координатамъ, такъ какъ онѣ выводятся изъ полярныхъ координатъ при помощи подстановки

$$z_1=\varrho\lambda_1,\quad z_2=\varrho\lambda_2\ \ .\ .\ .\ .\ z_n=\varrho\lambda_n.$$

Отсюда имѣемъ

$$d\lambda_r=\frac{\varrho dz_r-z_r d\varrho}{\varrho^2},$$

и далѣе, возвышая въ квадратъ и складывая,

$$d\Lambda^2=\frac{(z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2)(dz_1^2+dz_2^2+\ldots+dz_n^2)-(z_1dz_1+\ldots+z_ndz_n)^2}{\varrho^4},$$

или

$$d\Lambda^2=\frac{\Sigma(z_1dz_2-z_2dz_1)^2}{\varrho^4},$$

гдѣ знакъ Σ обнимаетъ всѣ парныя соединенія указателей. Имѣемъ также

$$d\varrho^2=dz_1^2+dz_2^2+\ .\ .\ .\ +dz_n^2-\frac{\Sigma(z_1dz_2-z_2dz_1)^2}{\varrho^2},$$

откуда подставляя въ (18), получаемъ окончательно

$$ds^2 = dz_1{}^2 + dz_2{}^2 + \ldots + dz_n{}^2 +$$
$$+ \frac{1}{\varrho^2}\left[\left(\frac{R}{\varrho} \sinh \frac{\varrho}{R}\right)^2 - 1\right] \Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2 \quad . \quad . \quad (20)$$

или

$$ds^2 = dz_1{}^2 + dz_2{}^2 + \ldots + dz_n{}^2 +$$
$$+ \frac{1}{3R^2}\left(1 + \frac{2\varrho^2}{15R^2} + \ldots\right) \Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2, \quad . \quad . \quad (20')$$

гдѣ въ скобкахъ имѣемъ $\varrho^2 = z_1{}^2 + z_2{}^2 + \ldots + z_n{}^2$ въ видѣ сходящагося ряда по степенямъ количества $\frac{\varrho}{R}$. Для очень малыхъ значеній ϱ можно просто положить

$$dz^2 = dz_1{}^2 + dz_2{}^2 + \ldots + dz_n{}^2 + \frac{1}{3R^2} \Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2.$$

Но, разсматривая элементъ поверхности, проходящій черезъ начало, можно достигнуть надлежащимъ выборомъ осей z_1, z_2 . . . . или x_1, x_2 . . . . того, чтобы этотъ элементъ совпалъ съ элементомъ поверхности $z_3 = 0$, $z_n = 0, \ldots z_n = 0$, которой соотвѣтствуетъ, въ сосѣдствѣ съ началомъ, линейный элементъ

$$ds^2 = dz_1{}^2 + dz_2{}^2 + \frac{1}{3R^2}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2;$$

а такъ какъ площадь безконечно-малаго треугольника съ вершинами (0, 0), (z_1, z_2), (dz_1, dz_2), изъ которыхъ вторая безконечно близка къ началу, равна $\frac{1}{2}$ $(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)$, то изъ этого можно заключить, что $\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$ равна учетверенному квадрату площади безконечно-малаго треугольника съ вершинами (0, 0, 0, ... 0), $(z_1, z_2, \ldots z_n)$, $(dz_1, dz_2, \ldots dz_n)$, изъ которыхъ вторая безконечно близка къ началу. Слѣдовательно, если раздѣлить въ уравненіи (20) сумму членовъ четвертаго порядка на квадратъ площади треугольника, о которомъ идетъ рѣчь, то въ частномъ получается $\frac{4}{3R^2}$; а такъ какъ, по опредѣленію Римана, это частное, умноженное на $-\frac{3}{4}$, выражаетъ мѣру кривизны по направленію разсматриваемаго нами элемента поверхности, то очевидно, что въ пространствѣ, о которомъ идетъ рѣчь, эта мѣра постоянна и равна $-\frac{1}{R^2}$ во всѣхъ направленіяхъ вокругъ каждой точки (*). На основаніи этого-то и можетъ быть присвоено этому пространству названіе *пространства съ постоянной кривизною.*

Четвертое весьма важное преобразованіе получается, если ввести n новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ $\eta, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{n-1}$ и положить

$$\frac{Rx}{a-x_n}=\eta, \quad \frac{Rx_1}{a-x_n}=\eta_1, \quad \ldots\ldots \quad \frac{Rx_{n-1}}{a-x_n}=\eta_{n-1}.$$

Непосредственно изъ этого выводимъ:

$$ds=R\frac{\sqrt{d\eta^2+d\eta_1^2+\ldots d\eta^2_{n-1}}}{\eta} \quad \ldots \quad (21),$$

(*) Чтобы видѣть совпаденіе опредѣленій Римана и Гаусса, вспомнимъ, что по Гауссу мѣра кривизны поверхности, опредѣленной элементомъ

$$ds^2=d\rho^2+m^2d\theta^2$$

выражается формулой $-\frac{1}{m}\frac{d^2m}{d\rho^2}$, гдѣ m есть вообще функція ρ и θ. Если перемѣнная ρ есть длина геодезической дуги, выходящей изъ точки поверхности, въ которой поверхность имѣетъ обыкновенную кривизну, то m есть функція вида $m=\rho(1+m'\rho^2)$, гдѣ m' есть такая функція, которая при $\rho=0$ не обращается ни въ нуль ни въ безконечность (см. Annali di Matematica, 2-я серія, т. I, стр. 358), а потому мѣра кривизны въ точкѣ $\rho=0$ есть $-6m'_0$. Въ такомъ случаѣ координаты Римана

$$z_1=\rho\cos\theta, \quad z_2=\rho\sin\theta$$

даютъ только что разсмотрѣнному элементу видъ

$$ds^2=dz_1^2+dz_2^2+\frac{4(m^2-\rho^2)}{\rho^4}\left(\frac{z_1dz_2-z_2dz_1}{2}\right)^2,$$

вслѣдствіе чего мѣра кривизны въ точкѣ $\rho=0$ по Риману равна

$$-\frac{3}{4}\lim\frac{4(m^2-\rho^2)}{\rho^4}$$

Но $\lim\frac{m^2-\rho^2}{\rho^4}$ (при $\rho=0$)$=2m'_0$; итакъ оба выраженія совпадаютъ.

Ясно, что m'_0, т. е. $(m')_{\rho=0}$ должно быть количествомъ, независящимъ отъ θ.

откуда замѣчаемъ, что формула (1) представляетъ еще линейный элементъ пространства постоянной кривизны, когда $n+1$ перемѣнныхъ $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ независимы другъ отъ друга и болѣе не связаны уравненіемъ (2), за исключеніемъ того случая, когда число измѣреній пространства есть $n+1$, и геодезическія линіи не изображаются посредствомъ линейныхъ уравненій (*). Довольно замѣчательно то слѣдствіе изъ выраженія (21), что кривизна пространства $n-1$ измѣреній $r_l=const$ равна нулю во всѣхъ его точкахъ, потому что его линейный элементъ имѣетъ форму

$$ds=const.\times\sqrt{dr_{l_1}^2+dr_{l_2}^2+\ldots+dr_{l\,n-1}^2}.$$

Дѣйствительно, принимая во вниманіе формулу Римана (19), можно непосредственно видѣть, что элементъ можетъ приводиться къ квадратному корню изъ суммы квадратовъ точныхъ дифференціаловъ въ числѣ равномъ числу измѣреній только при $\frac{1}{R}=0$. Итакъ пространство $r_l=const$ есть одно изъ тѣхъ, которыя Риманнъ называетъ *плоскими пространствами* (l. с. II, § 1) и въ число которыхъ входятъ плоскость и обыкновенное пространство, опредѣляемыя формулами

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}, \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Теперь послѣ только что сказаннаго, уравненіе $r_l=const$ допускаетъ очень простое толкованіе. Безконечно удаленная точка на оси x_n имѣетъ координаты

$$x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0,\ x_n=a,$$

и потому уравненіе (13) для этой точки обращается въ

$$\frac{a-x_n}{x}=k'e^{-\frac{\rho}{R}},$$

(*) Форма (21) была указана для случая двухъ измѣреній Ліувиллемъ въ его примѣчаніяхъ къ труду Монжа: Applications de l'Analyse à la Géométrie 1850. p. 600.

гдѣ $k' = \frac{k}{a}$. Слѣдовательно:

$$\eta = \frac{R}{k'} e^{\frac{\rho}{R}},$$

и на этомъ основаніи уравненіе $\eta = const$ равносильно уравненію $\rho = const$; изъ этого заключаемъ (такъ какъ направленіе оси x_n произвольно), что пространство $n-1$ измѣреній $\eta = const$ есть не что иное, какъ одна изъ ортогональныхъ траекторій всѣхъ геодезическихъ линій, направляющихся къ одной и той же безконечно-удаленной точкѣ, т. е. одна изъ ортогональныхъ траекторій системы *параллельныхъ* между собою геодезическихъ линій. Обратно каждая изъ этихъ ортогональныхъ траекторій во всѣхъ своихъ точкахъ имѣетъ кривизну, равную нулю, и потому двѣ какія-угодно изъ нихъ (принадлежащія только къ одной системѣ) могутъ быть совмѣщаемы одна съ другой, какъ угодно.

Вводя въ уравненіе (21) перемѣнную ρ вмѣсто η, получаемъ другую равнозначущую форму

$$ds^2 = d\rho^2 + k'^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} (d\eta_1^{\,2} + d\eta_2^{\,2} + \ .\ .\ .\ + d\eta^2_{n-1}). \qquad (21')$$

Мы видѣли уже, что совокупность $n-1$ линейныхъ уравненій, связывающихъ координаты $x_1, x_2, \ldots . x_n$, представляетъ геодезическую линію. Посмотримъ, что представляетъ болѣе общая совокупность $n-m$ линейныхъ уравненій.

Предполагая, что изъ этихъ уравненій выведены выраженія $n-m$ координатъ въ зависимости отъ m остальныхъ, мы видимъ, что число независимыхъ параметровъ, заключенныхъ въ такой системѣ, есть $(m+1)$ $(n-m)$. Вообразимъ теперь, что всѣ n координатъ $x_1, x_2, \ldots . x_n$ выражены линейно въ функціи отъ m перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots . u_m$. Эти выраженія, вмѣстѣ взятыя, содержатъ $(m+1)n$ параметровъ; но, если подчинить эти параметры условію удовлетворять тожеству:

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ .\ .\ .\ .\ x_n^{\,2} = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + \ .\ .\ .\ .\ + u_m^{\,2} + h^2$$

(гдѣ h остается неопредѣленнымъ), то ясно, что такимъ образомъ прибавляется $\frac{m(m+1)}{2} + m$ условій, вслѣдствіе чего число остающихся независимыхъ параметровъ окажется равнымъ

$(m+1)n - \frac{m(m+1)}{2} - m$. Но это число на $\frac{m(m-1)}{2}$ превышаетъ $(m+1)(n-m)$; слѣдовательно соотношенія, предположенныя между количествами x и количествами u, вмѣстѣ съ указаннымъ условіемъ таковы, что они могутъ замѣнять данную систему $n-m$ уравненій безъ всякаго исключенія. Въ такомъ случаѣ, полагая

$$u_1 + u_1{}^2 + \; . \; . \; . \; . \; + u_m{}^2 = a^2 - h^2 = a'^2,$$

мы выводимъ изъ этихъ соотношеній слѣдующее:

$$dx^2 + dx_1{}^2 + \; . \; . \; . \; . \; + dx_n{}^2 = du^2 + du_1{}^2 + \; . \; . \; . \; . \; du_m{}^2,$$

$$x^2 = u^2;$$

слѣдовательно

$$ds = R\frac{\sqrt{du^2 + du_1{}^2 + \; . \; . \; . \; . \; + du_m{}^2}}{u},$$

при условіи:

$$u^2 + u_1{}^2 + \; . \; . \; . \; . \; + u_m{}^2 = a'^2.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что мѣсто точекъ, представленныхъ совокупностью $n-m$ линейныхъ уравненій между координатами x_1, x_2, ... x_n, есть пространство m измѣреній, котораго кривизна вездѣ постоянна и равна кривизнѣ первоначальнаго пространства.

Такимъ образомъ, напримѣръ, $n-2$ линейныхъ уравненій представляютъ *поверхность* постоянной кривизны $\left(= -\frac{1}{R^2}\right)$, которой можно было-бы дать названіе *поверхности перваго порядка*; $n-3$ уравненій представляютъ *пространство трехъ измѣреній* постоянной кривизны $\left(= -\frac{1}{R^2}\right)$ и т. д.

Дѣйствительная геодезическая линія вполнѣ опредѣляется *двумя* точками пространства; по гипотезѣ, принятой до сихъ поръ, это свойство не можетъ имѣть никакого исключенія.

Поверхность перваго порядка вполнѣ опредѣляется *тремя* точками пространства. На ней всѣми точками лежитъ геодезическая линія, проходящая черезъ двѣ ея дѣйствительныя точки, такъ что, если двѣ дѣйствительныя поверхности перваго порядка имѣютъ двѣ дѣйствительныя общія точки, для нихъ обѣихъ будетъ общею вся геодезическая линія, опредѣляемая этими двумя точками.

Геодезическій треугольникъ всегда расположенъ на опредѣленной поверхности перваго порядка, которая остается опредѣленною и тогда, когда треугольникъ безконечно малъ. Поэтому, если продолжить по геодезическимъ линіямъ всѣ линейные элементы, заключенные въ одномъ и томъ же элементѣ поверхности,—всѣ такимъ образомъ полученныя геодезическія линіи имѣютъ своимъ геометрическимъ мѣстомъ опредѣленную поверхность перваго порядка.

Когда двѣ поверхности перваго порядка пересѣкаются по линіи, которая будетъ необходимо геодезической, то ихъ уголъ имѣетъ вездѣ постоянную величину, т. е., если провести черезъ какую-нибудь точку линіи ихъ пересѣченія два линейные элемента, нормальные къ этой линіи пересѣченія, одинъ на первой поверхности, а другой на второй, то безконечно-малое разстояніе ихъ концовъ постоянно, если только сами они суть длины постоянныя. Дѣйствительно (*), предполагая, что ось x_1 направлена по линіи пересѣченія обѣихъ поверхностей, мы можемъ очевидно представить уравненія этихъ поверхностей въ видѣ:

$$x_2 = m_2 x_n,\ x_3 = m_3 x_n,\ \ldots\ x_{n-1} = m_{n-1} x_n,$$
$$x_2 = m'_2 x_n,\ x_3 = m'_3 x_n,\ \ldots\ x_{n-1} = m'_{n-1} x_n,$$

гдѣ m и m' постоянные параметры. Эти двѣ поверхности пересѣчены пространствомъ $x_1 = a_1$ по двумъ геодезическимъ линіямъ, которыя по выше сдѣланному замѣчанію ортогональны къ оси x_1. Двѣ точки, которыхъ координаты

$$x_1 = a_1,\ x_2 = m_2 x_n,\ \ldots\ x_{n-1} = m_{n-1} x_n,\ x_n = x_n,$$
$$x_1 = a_1,\ x_2 = m'_2 x'_n,\ \ldots\ x_{n-1} = m'_{n-1} x'_n,\ x_n = x'_n,$$

расположены соотвѣтственно на первой и на второй поверхности, и именно на тѣхъ двухъ, выше указанныхъ, геодезическихъ линіяхъ, и ихъ разстояніе ϱ можетъ быть найдено (8) по формулѣ:

$$\cosh\frac{\varrho}{R} = \frac{a^2 - a_1{}^2 - M x_n x'_n}{\sqrt{(a^2 - a_1{}^2 - m^2 x_n{}^2)(a^2 - a_1{}^2 - m'^2 x'_n{}^2)}},$$

(*) Нижеслѣдующее доказательство, которое можно было бы, строго говоря, выпустить, помѣщено ради формулъ, къ которымъ оно приводитъ.

гдѣ

$$m^2 = 1 + m_2^2 + \ldots + m^2_{n-1}, \quad m'^2 = 1 + m'^2_2 + \ldots + m'^2_{n-1},$$

$$M = 1 + m_2 m'_2 + \ldots \; m_{n-1} m'_{n-1}.$$

Отсюда, называя буквами σ, σ' длины двухъ геодезическихъ линій, взятыя между общею точкою $x_1 = a_1$ и двумя разсматриваемыми точками, получаемъ:

$$\cosh\frac{\sigma}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2}}, \quad \cosh\frac{\sigma'}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x'^2_n}},$$

и слѣдовательно

$$\sinh\frac{\sigma}{R} = \frac{m x_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2}}, \quad \sinh\frac{\sigma'}{R} = \frac{m' x'_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x'^2_n}};$$

это показываетъ, что

$$\cosh\frac{\varrho}{R} = \cosh\frac{\sigma}{R} \cdot \cosh\frac{\sigma'}{R} - \frac{M}{mm'} \sinh\frac{\sigma}{R} \sinh\frac{\sigma'}{R}.$$

Такъ какъ въ этой формулѣ не остается слѣдовъ точки a_1, взятой на оси x_1, то заключаемъ, что, если проводить на обѣихъ поверхностяхъ черезъ какую угодно точку этой оси геодезическія линіи, имѣющія длины σ и σ', геодезическое разстояніе ихъ концовъ всегда постоянно. А такъ какъ это свойство существуетъ для всякихъ σ и σ', то оно имѣетъ мѣсто необходимо и для безконечно-малыхъ σ и σ', изъ чего и вытекаетъ выше сказанная теорема.

Вспоминая, что на основаніи доказаннаго раньше (стр. 43) безконечно-малые треугольники подчинены обыкновеннымъ соотношеніямъ плоской тригонометріи, мы непосредственно приходимъ къ тому, что при безконечно малыхъ длинахъ ϱ, σ, σ', выраженіе $\frac{M}{mm'}$, есть косинусъ угла, составляемаго первыми элементами обѣихъ геодезическихъ линій σ, σ', т. е. есть косинусъ угла между обѣими поверхностями. Съ другой стороны легко видѣть, что разсматриваемый треугольникъ можетъ быть вполнѣ произвольнымъ геодезическимъ треугольникомъ; итакъ, между сторонами a, b, c и противоположными углами A, B, C геодезическаго треугольника, расположеннаго въ разсмотрѣнномъ пространствѣ, существуетъ соотношеніе

$$\cosh\frac{a}{A}=\cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R}-\sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}\cos A\;.\;.\;(22)$$

и равнымъ образомъ аналогичныя ему; это соотношеніе отличается отъ основной формулы сферической тригонометріи только замѣною R величиною $R\sqrt{-1}$ (R есть радіусъ сферы), стороны же и углы остаются тѣже. Это вполнѣ согласуется съ фактомъ, уже указаннымъ Миндингомъ (журн. Крелля, т. XX) и доказаннымъ Кодацци (Annali Tortolini, 1857), если вспомнить, что разсмотрѣнный геодезическій треугольникъ расположенъ вполнѣ на поверхности перваго порядка, т. е. на поверхности постоянной отрицательной кривизны; по отношенію къ этой поверхности онъ есть равнымъ образомъ геодезическій въ обыкновенномъ смыслѣ. Если предположить, что уголъ C прямой, то двѣ формулы, выводящіяся изъ (22) перемѣщеніемъ элементовъ, даютъ послѣ надлежащаго преобразованія,

$$\tanh\frac{a}{R}=\tanh\frac{c}{R}\cos B\;.\;.\;.\;.\;.\;(23)$$

Вообразимъ теперь, что вершина угла A удаляется неопредѣленно по катету b, между тѣмъ какъ сторона a остается неизмѣнною по положенію и величинѣ, мы увидимъ, что гипотенуза c возрастетъ до безконечности, и въ предѣлѣ уравненія (22) и (23) дадутъ

$$\cos A=1,\;\; \tanh\frac{a}{R}=\cos B.$$

Изъ первой формулы видно, что $A=0$, т. е. что стороны b и c взаимно сближаются асимптотически, когда вершина угла A удаляется въ безконечность; вторая же формула указываетъ, что предѣлъ угла B не прямой уголъ, какъ это бываетъ на плоскости, но уголъ менѣе 90°, величина котораго зависитъ отъ длины a слѣдующимъ образомъ:

$$\tan\frac{B}{2}=e^{-\frac{a}{R}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(24)$$

Послѣдняя формула равносильна предъидущей. Если назвать *параллельными* двѣ геодезическія линіи, направляющіяся къ одной и той же безконечно-удаленной точкѣ, какъ мы это уже дѣлали, то, черезъ одну и ту же точку можно провести *двѣ* различныя геодезическія линіи, параллельныя данной геодезической линіи; эти двѣ параллельныя одинаково наклонены съ одной и съ другой стороны къ геодезической линіи, проведенной изъ той же точки нормально къ данной линіи, и ихъ наклоненіе B къ нормали связано съ длиною a этой нормали соотношеніемъ (24). Этотъ результатъ вполнѣ согласуется съ положеніемъ, составляющимъ основу *неевклидовой Геометріи*, начала которой, знакомыя уже Гауссу, были мастерски изложены въ синтетической формѣ Лобачевскимъ въ его „Geometrische Untersuchungen" (переведенныхъ Hoüel'емъ въ 1866 г.). Возможность построенія его системы при помощи обыкновеннаго синтеза (ограничиваясь пространствомъ трехъ измѣреній) зависитъ вопервыхъ отъ того, что, какъ доказано, въ пространствахъ постоянной кривизны (положительной или отрицательной) всякая фигура *можетъ* произвольно измѣнять свое положеніе, *не претерпѣвая* никакого измѣненія въ величинѣ и во взаимномъ расположеніи своихъ смежныхъ элементовъ; отъ этой *возможности* зависитъ *существованіе равныхъ фигуръ* и, какъ слѣдствіе, *законность принципа наложенія*. Во вторыхъ въ пространствахъ постоянной *отрицательной* кривизны геодезическія линіи характеризуются, подобно Евклидовой прямой, свойствомъ вполнѣ опредѣляться только *двумя* своими точками, такъ что *аксіома о прямой* имѣетъ мѣсто для этихъ линій. И точно также поверхности перваго порядка характеризуются, подобно Евклидовой плоскости, свойствомъ опредѣляться только *тремя* своими точками, такъ что для этихъ поверхностей имѣетъ мѣсто *аксіома о плоскости*. Кромѣ того отношенія геодезическихъ линій къ поверхностямъ перваго порядка и этихъ послѣднихъ другъ къ другу тѣ-же, что отношенія прямыхъ къ плоскостямъ и плоскостей между собою, ибо одна изъ этихъ поверхностей заключаетъ въ себѣ всю геодезическую линію, разъ только на ней лежатъ двѣ точки этой линіи, и двѣ такихъ поверхности пересѣкаются по геодезической линіи (и подъ постояннымъ угломъ), если онѣ имѣютъ одну общую точку. Изъ этого соотвѣтствія слѣдуетъ, что если допустить основныя аксіомы обыкновенной геометріи, исключая постулатъ о параллельныхъ, то теоремы, къ которымъ мы придемъ, оказываются тожественными съ теоремами геометріи пространства постоянной отрицательной кривизны, потому что эта послѣдняя геометрія имѣетъ тѣ же основы, какъ и первая, за исключеніемъ упомянутаго постулата. Теоремы этой геометріи существуютъ при всякомъ значеніи кривизны, служащей *параметромъ* неевклидовой геометріи (которую я предложилъ бы назвать *псевдосферическою*), и *только измѣренія*, сдѣланныя въ объективномъ пространствѣ могутъ насъ убѣдить, что частное значеніе его кривизны есть *нуль*, т. е. что для этого пространства $R=\infty$,—подобно тому, какъ *только посредствомъ измѣреній* можно опредѣлить кривизну данной сферы, составляющую *параметръ* геометріи сферической.

Дѣйствительно можно убѣдиться въ томъ, что теорія Лобачевскаго совпадаетъ, исключая терминовъ, съ геометріею пространства трехъ измѣреній постоянной отрицательной кривизны. Интересующійся этимъ вопросомъ можетъ найти въ другомъ мѣстѣ болѣе подробное изложеніе (*). Здѣсь, чтобы не дѣлать слишкомъ длиннаго отступленія, я ограничусь нѣсколькими краткими указаніями.

Неевклидова планиметрія есть не что иное, какъ геометрія поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Окружности этой планиметріи соотвѣтствуютъ линіямъ, пересѣкающимъ ортогонально всѣ геодезическіе радіусы, выходящіе изъ одной и той же точки поверхности, или соотвѣтствуютъ геодезическимъ окружностямъ. Периметръ ихъ въ функціи геодезическаго радіуса r опредѣляется формулою

$$\pi R\left(e^{\frac{r}{R}}-e^{-\frac{r}{R}}\right),$$

какъ это уже указано Гауссомъ. Черезъ три точки поверхности не всегда можно провести геодезическую окружность, имѣющую центръ въ дѣйствительной точкѣ. *Орициклы* или *предѣльныя кривыя* Лобачевскаго суть не что иное, какъ геодезическія окружности, съ центромъ въ безконечности, т. е. которыхъ радіусы образуютъ систему параллельныхъ геодезическихъ линій. Полагая въ уравненіи (21′) $n=2$, получаемъ

$$ds^2=d\varrho^2+k'^2e^{-\frac{2\varrho}{R}}d\eta^2,$$

выраженіе линейнаго элемента поверхности постоянной отрицательной кривизны, отнесенное къ системѣ концентрическихъ

(*) См. предъидущій мемуаръ (Опытъ объясненія неевклидовой геометріи); частности, развитыя тамъ для случая двухъ измѣреній, легко могутъ быть повторены для случая трехъ измѣреній, въ особенности если имѣть въ виду настоящее сочиненіе и если прибѣгать къ помощи вспомогательной сферы.

орицикловъ и къ ихъ радіусамъ. Видъ этого выраженія показываетъ, что при подходящемъ сгибаніи поверхности орициклы могутъ обращаться въ параллели поверхности вращенія, которой меридіанъ есть кривая касательныхъ постоянной длины, равной R.

Неевклидова стереометрія есть не что иное, какъ геометрія пространствъ трехъ измѣреній постоянной отрицательной кривизны. Мы уже сказали, чему въ этой геометріи соотвѣтствуютъ прямыя и плоскости. Сферическимъ поверхностямъ соотвѣтствуютъ поверхности, пересѣкающія ортогонально всѣ геодезическіе радіусы, выходящіе изъ одной и той же точки, т. е. геодезическія сферы. Здѣсь также можетъ произойти, что черезъ три точки, и тѣмъ болѣе черезъ четыре, нельзя провести геодезическую сферу, имѣющую центромъ дѣйствительную точку. *Орисферы* или *предѣльныя поверхности* Лобачевскаго (*) суть не что иное, какъ геодезическія сферы, которыхъ центръ въ безконечности, т. е. такихъ, которыхъ радіусы образуютъ систему параллельныхъ геодезическихъ линій пространства постоянной отрицательной кривизны. Полагая въ уравненіи (21) $n=3$, имѣемъ

$$ds = R\frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^{\,2} + d\eta_2^{\,2}}}{\eta},$$

гдѣ

$$\frac{Rx}{a-x_3} = \eta,\quad \frac{Rx_1}{a-x_3} = \eta_1,\quad \frac{Rx_2}{a-x_3} = \eta_2$$

и обратно

$$x_1 = \frac{2aR\eta_1}{\eta^2+\eta_1^{\,2}+\eta_2^{\,2}+R^2},\ x_2 = \frac{2aR\eta_2}{\eta^2+\eta_1^{\,2}+\eta_2^{\,2}+R^2},\ x_3 = \frac{a(\eta^2+\eta_1^{\,2}+\eta_2^{\,2}-R^2)}{\eta^2+\eta_1^{\,2}+\eta_2^{\,2}+R^2}.$$

Формула (25) представляетъ линейный элементъ неевклидова пространства, отнесенный къ системѣ концентрическихъ орисферъ и къ системѣ ихъ радіусовъ. Видъ этого элемента показываетъ, что всякая орисфера, опредѣляемая уравненіемъ $\eta = const$, есть поверхность съ кривизною *равною нулю* (т. е. поверхность, наложимая на Евклидову плоскость посредствомъ простого сгибанія безъ растяженія), такъ какъ ея линейный элементъ имѣетъ форму

$$ds = const \times \sqrt{d\eta_1^{\,2} + d\eta_2^{\,2}},$$

(*) Или поверхности F Болэя.

и такъ какъ перемѣнныя η_1, η_2 суть декартовы прямоугольныя координаты ея точекъ. Поверхность перваго порядка:

$$lx_1 + mx_2 + nx_3 + p = 0,$$

представляется въ координатахъ η, η_1, η_2 уравненіемъ:

$$2aR(l\eta_1 + m\eta_2) + (an + p)(\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) = (an - p)R^2,$$

и потому пересѣкаетъ орисферу (для которой $\eta = const$) по линіи, превращающейся въ кругъ въ плоской разверткѣ этой поверхности. Этотъ кругъ приводится къ прямой только въ томъ случаѣ, когда $p = -an$, т. е. когда уравненіе поверхности перваго порядка имѣетъ видъ:

$$lx_1 + mx_2 + n(x_3 - a) = 0,$$

что происходитъ, когда эта поверхность есть діаметральная поверхность орисферы, или когда она проходитъ черезъ центръ (въ безконечности) этой орисферы. Въ этомъ случаѣ линія пересѣченія есть очевидно орициклъ этой діаметральной поверхности, между тѣмъ какъ, по отношенію къ орисферѣ, она такова, что превращается въ прямую, когда орисфера развернута на плоскости. Изъ этого вытекаетъ, что треугольникъ, начерченный на орисферѣ тремя діаметральными поверхностями, есть въ сущности геодезическій треугольникъ, расположенный на поверхности нулевой кривизны; поэтому онъ удовлетворяетъ всѣмъ соотношеніямъ обыкновенной плоской тригонометріи, такъ какъ онъ можетъ быть совмѣщенъ съ прямолинейнымъ треугольникомъ.

Такимъ образомъ всѣ понятія неевклидовой геометріи находятъ себѣ полное соотвѣтствіе въ геометріи пространства постоянной отрицательной кривизны. Необходимо только обратить вниманіе на то, что, между тѣмъ какъ понятія неевклидовой планиметріи получаютъ истинное и надлежащее объясненіе, вслѣдствіе того, что могутъ быть построены на *дѣйствительной* поверхности, — тѣ, которыя относятся къ тремъ измѣреніямъ, могутъ быть представлены только аналитически, ибо пространство, въ которомъ такое представленіе могло бы быть реализировано, отличается отъ того, къ которому вообще примѣняется слово *пространство*. По крайней мѣрѣ опытъ, повидимому, не можетъ быть приведенъ въ согласіе съ результатами этой болѣе общей геометріи иначе, какъ при помощи предположенія, что постоянная R безконечно велика, т. е. что кривизна пространства равна нулю; это впрочемъ могло бы произойти только отъ малыхъ размѣровъ треугольниковъ, которые мы можемъ измѣрять, или отъ малыхъ размѣровъ той части пространства, на которую распространяются наши наблюденія, подобно тому какъ это случается съ измѣреніями, сдѣланными на малой части земной поверхности и точность которыхъ недостаточна для того, чтобы сдѣлать очевидною шарообразность земли.

До сихъ поръ мы говорили только о пространствахъ n измѣреній съ кривизною постоянною и притомъ *отрицательною*; основаніемъ этому служило то, что мы преимущественно имѣли въ виду сближеніе относящихся сюда понятій съ понятіями геометріи неевклидовой, по отношенію къ которой противоположная гипотеза представляетъ менѣе интереса. Тѣмъ не менѣе мы здѣсь скажемъ нѣсколько словъ и о ней.

Линейный элементъ

$$ds = R\frac{\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+\;.\;.\;.\;.\;dxn^2-dx^2}}{x}, \quad . \quad (26)$$

въ которомъ

$$x^2=a^2+x_1^2+x_2^2+\;.\;.\;.\;.\;+x_n^2,$$

принадлежитъ пространству n измѣреній, котораго кривизна вездѣ постоянна и равна $\frac{1}{R^2}$. Эта формула выводится изъ (1) посредствомъ замѣны R, a, x количествами $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$, и всѣ свойства и уравненія, основанныя на чисто аналитическихъ преобразованіяхъ элемента (1), существуютъ очевидно, съ указанными измѣненіями, для этого другаго элемента. Напримѣръ формула (8) измѣняется въ слѣдующую:

$$\cos\frac{\rho}{R}=\frac{a^2+x_1x_1^0+x_2x_2^0+\;.\;.\;.\;.\;+x_nx_n^0}{\sqrt{(a^2+x_1^2+\;.\;.\;.\;.\;+x_n^2)(a^2+x_1^{0\,2}+\;.\;.\;.\;.\;+x_n^{0\,2})}}, \quad (27)$$

дающую дѣйствительное значеніе для ρ, каковы бы ни были дѣйствительныя значенія x_1, x_2, . . , . . x_n, x_1^0, x_2^0, ... x_n^0. Ясно, что для этихъ пространствъ теорема о наложимости двухъ какихъ угодно частей пространства существуетъ всецѣло.

Если въ выраженіи (26) предположить дѣйствительными перемѣнныя x, x_1, x_2, ... x_n и постоянныя R и a, то значенія, которыя можно допустить для координатъ x_1, x_2, ... x_n, не имѣютъ никакого предѣла и могутъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$. Для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній этихъ координатъ пространство *непрерывно и односвязно*, но *не безконечно* (Риманнъ, III, § 2); ибо если положить въ (27)

$$x_1^{\,0}=\lambda_1\tau,\ x_2^{\,0}=\lambda_2\tau,\ \ldots\ldots\ x_n^{\,0}=\lambda_n\tau,$$

причемъ $\lambda_1^{\,2}+\lambda_2^{\,2}+\ \ldots\ldots\ +\lambda_n^{\,2}=1$, то для $\tau=\infty$ мы получимъ формулу

$$\cos\frac{\varrho}{R}=\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ \ldots\ldots\ +\lambda_nx_n}{\sqrt{a^2+x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ \ldots\ldots\ +x_n^{\,2}}},$$

дающую для ϱ значеніе конечное и опредѣленное. Геодезическія линіи по прежнему изображаются линейными уравненіями; но, въ виду допустимости безконечно-большихъ значеній для координатъ, принципъ полнаго опредѣленія геодезической линіи двумя ея точками *перестаетъ быть истиннымъ безъ исключенія*. Дѣйствительно, пусть мы имѣемъ уравненія геодезической линіи:

$$x_1=b_1x_n+b'_1,\ \ x_2=b_2x_n+b'_2,\ \ldots\ldots$$

Пока по крайней мѣрѣ одна изъ точекъ, черезъ которыя геодезическая линія должна проходить, имѣетъ конечныя координаты, всѣ коэффиціенты могутъ быть вполнѣ точно опредѣлены; но если обѣ точки имѣютъ безконечныя координаты, то понадобится дать уравненіямъ видъ

$$\frac{x_1}{x_n}=b_1+\frac{b_1'}{x_n},\ \ \frac{x_2}{x_n}=b_2+\frac{b'_2}{x_n},\ \ldots\ldots$$

и подставить вмѣсто первыхъ членовъ предѣльныя значенія, къ которымъ они стремятся въ этихъ двухъ точкахъ. Если эти предѣлы равны между собою, то значенія вторыхъ коэффиціентовъ остаются неопредѣленными, и геодезическая линія не можетъ быть единственною и опредѣленною. Если предѣлы различны, то координаты геодезической линіи безконечны во всѣхъ ея точкахъ.

Соображенія, которыя привели насъ къ уравненію (13), не приложимы къ пространствамъ постоянной положительной кривизны, потому что въ этихъ послѣднихъ нѣтъ точекъ, находящихся въ безконечности. Слѣдовательно формамъ, представленнымъ этимъ уравненіемъ, нѣтъ соотвѣтствующихъ въ этихъ пространствахъ, точно такъ же какъ въ нихъ нѣтъ геодезическихъ линій взаимно-параллельныхъ.

Мы видимъ, что геометрія пространствъ постоянной положительной кривизны (которую можно подходяще назвать *сферическою геометріею* въ болѣе обширномъ смыслѣ этихъ словъ, ибо, какъ показываетъ уравненіе (22), геодезическіе треугольники подчинены здѣсь законамъ сферической тригонометріи) весьма значительно различается отъ геометріи *псевдосферической*, хотя и допускаетъ вмѣстѣ съ этою послѣднею существованіе равныхъ фигуръ. Впрочемъ псевдосферическая геометрія можетъ привести къ разсмотрѣнію пространствъ положительной кривизны. Дѣйствительно, полагая въ уравненіи (26)

$$\frac{a}{x}=y,\ \frac{x_1}{x}=y_1\ \ldots\ \frac{x_n}{x}=y_n,$$

находимъ

$$ds=R\sqrt{dy^2+dy_1^2+\ \ldots\ +dy_n^2},$$

при условіи $y^2+y_1^2+\ \ldots\ +y_n^2=1$; этотъ результатъ, если принять во вниманіе уравненіе (18), въ которомъ положить $\varrho=const$, показываетъ намъ, что геодезическія сферы радіуса ϱ въ пространствѣ n измѣреній постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{R^2}$ суть пространства $n-1$ измѣреній постоянной положительной кривизны $\left(\frac{1}{R\sinh\frac{\varrho}{R}}\right)^2$.

Итакъ сферическая геометрія можетъ быть разсматриваема, какъ заключающаяся въ псевдосферической.

Болонья. Августъ 1868.

О ГИПОТЕЗАХЪ, ЛЕЖАЩИХЪ ВЪ ОСНОВАНІИ ГЕОМЕТРІИ.

Б. РИМАННА.

Пер. Д. М. Синцова.

Планъ изслѣдованія.

Какъ извѣстно, геометрія предполагаетъ понятіе пространства и первыя основныя понятія о построеніяхъ въ пространствѣ, какъ нѣчто напередъ данное. Она даетъ для нихъ опредѣленія чисто номинальныя, тогда какъ существенныя опредѣленія вводятся въ видѣ аксіомъ. Взаимное отношеніе дѣлаемыхъ такимъ образомъ первичныхъ предположеній остается поэтому во мракѣ; не видно, необходима ли связь между ними, и въ какой мѣрѣ; a priori не ясно даже, возможна ли такая связь.

Эта темнота не была устранена ни математиками, ни философами, занимавшимися этимъ предметомъ, начиная отъ Евклида и до Лежандра,—чтобы назвать только знаменитѣйшаго изъ современныхъ воздѣлывателей геометріи. Причиною этому было разумѣется то обстоятельство, что оставалось совершенно неразработаннымъ общее понятіе о многократно протяженныхъ величинахъ, которыхъ частный случай составляютъ пространственныя величины. Я поэтому поставилъ себѣ прежде всего задачу вывести понятіе о многократно протяженной величинѣ изъ общихъ понятій о величинѣ. Отсюда будетъ ясно, что многократно протяженная величина можетъ обладать различными метрическими соотношеніями, и пространство поэтому является только нѣкоторымъ особеннымъ случаемъ трикратно протяженной величины. Необходимымъ же слѣдствіемъ отсюда будетъ то, что теоремы геометріи не могутъ быть выведены изъ общихъ понятій о величинѣ, но что тѣ свойства, которыми отличается пространство отъ другихъ мыслимыхъ трикратно протяженныхъ величинъ, могутъ быть выведены только изъ опыта. Отсюда является задача—отыскать простѣйшiе факты, изъ которыхъ могутъ быть выведены метрическiя соотношенiя пространства,—задача, которая по самой сущности вещей не вполнѣ опредѣленна; ибо можно выбрать нѣсколько системъ простыхъ фактовъ, достаточныхъ для опредѣленiя метрическихъ соотношенiй пространства; важнѣе всего для настоящей цѣли та система, которая положена въ основанiе Евклидомъ. Факты эти, какъ и всѣ факты, не необходимы, — они имѣютъ только эмпирическую достовѣрность, они суть гипотезы; поэтому нужно изслѣдовать ихъ правдоподобность, которая во всякомъ случаѣ весьма велика въ предѣлахъ наблюденiй, и затѣмъ уже судить о возможности распространенiя ихъ и за границы наблюденiй, какъ въ сторону величинъ неизмѣримо—большихъ, такъ и въ сторону неизмѣримо-малыхъ.

I. Понятiе о величинѣ n-кратно протяженной.

Дѣлая попытку разрѣшить первую изъ этихъ задачъ—установить понятiе о величинѣ нѣсколькихъ протяженiй, я могу расчитывать на снисходительное сужденiе тѣмъ болѣе, что имѣю мало навыка въ подобныхъ работахъ философскаго характера, въ которыхъ трудности заключаются болѣе въ понятiяхъ, чѣмъ въ построенiи, и не могъ воспользоваться никакими предшествующими работами, кромѣ нѣкоторыхъ очень краткихъ намёковъ, сдѣланныхъ относительно этого Гауссомъ во второмъ мемуарѣ о биквадратичныхъ вычетахъ, въ Гёттингенскихъ „Gelehrte Anzeigen“ и въ его юбилейномъ сочиненiи, и нѣкоторыхъ философскихъ изысканiй Гербарта.

§ 1.

Понятiе величины возможно только тамъ, гдѣ существуетъ общее понятiе, допускающее различные образы обособленiя. Смотря по тому, возможенъ ли, или невозможенъ непрерывный между ними переходъ, онѣ образуютъ непрерывное или дискретное многообразiе; отдѣльные образы обособленiя называются въ первомъ случаѣ точками, во второмъ элементами этого многообразiя. Понятiя, которыхъ образы обособленiя образуютъ дискретное многообразiе, такъ часты, что для какихъ угодно вещей всегда можно найти—по крайней мѣрѣ въ болѣе богатыхъ языкахъ—такое понятiе, подъ которое онѣ бы подходили (и математики могли, ничѣмъ незатрудняясь, исходить въ ученiи о дискретныхъ величинахъ изъ требованiя, что взятыя вещи должно считать однородными); напротивъ поводы къ образованію понятій, коихъ различные образы обособленія образуютъ непрерывное многообразіе, такъ рѣдки въ обыденной жизни, что мѣста ощущаемыхъ предметовъ и цвѣта суть почти единственныя простыя понятія, коихъ различные образы обособленія образуютъ непрерывное многообразіе. Поводы къ образованію и выработкѣ подобныхъ понятій встрѣчаются чаще только въ высшей математикѣ.

Опредѣленныя части многообразія, выдѣляемыя какимъ-нибудь признакомъ или границею, называются количествами (Quanta). Ихъ количественное сравненіе въ дискретныхъ величинахъ выполняется путемъ счета, въ непрерывныхъ— путемъ измѣренія. Измѣреніе заключается въ наложеніи подлежащихъ сравненію величинъ; для измѣренія требуется такимъ образомъ средство наносить одну величину на другую, какъ масштабъ. Если этого нѣтъ, то двѣ величины можно сравнивать только тогда, когда одна составляетъ часть другой, и притомъ можно заключить только, что одна больше или меньше другой, но нельзя заключить, насколько больше или меньше. Изслѣдованія, которыя можно производить въ этомъ случаѣ о подобныхъ величинахъ, составляютъ общую часть ученія о величинахъ, независимую отъ опредѣленій метрическаго характера; въ ней величины не разсматриваются независимо отъ ихъ положенія и не принимаются выражаемыми помощью нѣкоторой единицы, но разсматриваются, какъ области въ нѣкоторомъ многообразіи. Подобныя изслѣдованія сдѣлались существенно необходимы для нѣкоторыхъ частей математики, именно для изученія многозначныхъ аналитическихъ функцій, и отсутствіе такихъ изслѣдованій было можетъ быть главною причиною того, что знаменитая теорема Абеля и изслѣдованія Лагранжа, Пфаффа, Якоби по общей теоріи дифференціальныхъ уравненій такъ долго оставались безплодными. Для цѣлей настоящаго изслѣдованія достаточно поставить на видъ два пункта изъ этой общей части ученія о протяженныхъ величинахъ, въ которой предполагается напередъ только то, что заключается уже въ самомъ понятіи: первый изъ этихъ пунктовъ касается составленія понятія о многообразіи кратно протяженномъ, второй—сведенія опредѣленій положенія въ данномъ многообразіи на количественныя опредѣленія и обнаруживаетъ существенный признакъ n-кратной протяженности.

§ 2.

Если въ какомъ-нибудь понятіи, различные образы обособленія коего составляютъ непрерывное многообразіе, переходимъ опредѣленнымъ способомъ отъ одного образа обособленія къ другому, то пройденные образы составляютъ одно протяженное многообразіе, котораго существеннымъ признакомъ является то обстоятельство, что въ немъ отъ какого нибудь пункта непрерывный переходъ возможенъ только въ двѣ стороны — впередъ и назадъ. Если теперь вообразимъ, что многообразіе переходитъ въ другое, совершенно отличное, и притомъ снова опредѣленнымъ способомъ, т. е. такъ, что каждая точка переходитъ въ опредѣленную точку другого, то вся совокупность полученныхъ такимъ путемъ образовъ обособленія составляетъ двупротяженное многообразіе. Подобно этому получимъ трипротяженное многообразіе, если представимъ себѣ что двупротяженное переходитъ опредѣленнымъ способомъ въ другое совершенно отъ него отличное; не трудно видѣть, какъ можно продолжить эти построенія. Если вмѣсто того, чтобы считать понятіе подлежащимъ опредѣленію, будемъ объектъ его разсматривать перемѣннымъ, то это построеніе можно назвать составленіемъ измѣняемости $n+1$ измѣреній изъ измѣняемости n измѣреній и изъ измѣняемости одного измѣренія.

§ 3.

Я покажу теперь, какъ обратно можно разложить данную измѣняемость на измѣняемость одного измѣренія и измѣняемость меньшаго, чѣмъ данная, числа измѣреній; съ этою цѣлью представимъ себѣ перемѣнную часть многообразія одного измѣренія—начиная отъ опредѣленной исходной точки, такъ что значенія ея сравнимы между собою,—которая имѣетъ для каждой точки даннаго многообразія опредѣленное значеніе, измѣняющееся непрерывнымъ образомъ съ измѣненіемъ точки, или другими словами возьмемъ внутри даннаго многообразія непрерывную функцію мѣста, притомъ такую функцію, которая не остается постоянною на всемъ протяженіи нѣкоторой части многообразія. Каждая система точекъ, для которой эта функція имѣетъ постоянное значеніе, образуетъ непрерывное многообразіе меньшаго числа измѣреній, чѣмъ данное. Эти многообразія переходятъ при измѣненіи функціи непрерывнымъ образомъ одно въ другое; можно поэтому принять, что изъ одного такого многообразія получаются всѣ остальныя, и говоря вообще, это можетъ произойти такъ, что каждая точка перейдетъ въ опредѣленную точку другого многообразія; исключительные случаи, изслѣдованіе которыхъ представляется важнымъ, можно здѣсь не разсматривать. Такимъ способомъ опредѣленіе положенія въ данномъ многообразіи сводится на одно опредѣленіе величины и на опредѣленіе положенія въ многообразіи меньшаго числа протяженій. Легко показать, что это многообразіе имѣетъ n—1 измѣреній, если данное многообразіе имѣетъ n измѣреній. Путемъ n-кратнаго повторенія этого разсужденія опредѣленіе положенія въ данномъ многообразіи въ случаѣ, если оно возможно, сводится на n опредѣленій величины. Существуютъ однако и такія многообразія, въ которыхъ опредѣленіе положенія требуетъ не конечнаго числа опредѣленій величины, но или безконечный рядъ или непрерывное многообразіе такихъ опредѣленій. Такими многообразіями будутъ, напр., возможныя значенія нѣкоторой функціи для данной области, возможные виды пространственной фигуры и т. д.

II. Метрическія соотношенія, возможныя для многообразія n измѣреній въ предположеніи, что линіи имѣютъ длину независимо отъ положенія, такъ что каждая линія можетъ измѣряема каждою другою.

После того какъ понятіе объ n-протяженномъ многообразіи составлено, и найденъ существенный признакъ такого многообразія въ томъ, что опредѣленіе положенія въ немъ сводится на n количественныхъ опредѣленій, выступаетъ, вторая задача—изысканіе метрическихъ соотношеній, возможныхъ въ такомъ многообразіи, и условій, достаточныхъ для его опредѣленія. Эти метрическія соотношенія можно изслѣдовать только въ отвлеченныхъ понятіяхъ величины и представить въ связномъ видѣ только формулами; при извѣстныхъ предположеніяхъ можно однако разложить ихъ на такія соотношенія, которыя, взятыя порознь, способны имѣть геометрическое изображеніе, и потому является возможнымъ выразить геометрически результаты счета Поэтому хотя и нельзя избѣжать отвлеченнаго изысканія съ помощью формулъ,— чтобы имѣть твердую почву, но результаты изысканія могутъ быть облечены въ геометрическую форму. Основы для того и другаго заключаются въ знаменитомъ мемуарѣ Гаусса о кривыхъ поверхностяхъ.

§ 1.

Метрическія опредѣленія требуютъ независимости величины отъ положенія, что достигается различнымъ образомъ; прежде всего представляется допущеніе (которое я принимаю здѣсь), что длина линій не зависитъ отъ положенія, такъ что каждая линія можетъ быть измѣряема каждою другою. Если опредѣленія положенія сведены на количественныя опредѣленія, и положеніе точки въ данномъ n-протяженномъ многообразіи выражено помощью n перемѣнныхъ величинъ x_1, x_2, x_3, и т. д. x_n, то опредѣленіе линіи сводится къ тому, чтобы дать величины x въ функціи одного перемѣннаго. Задача сводится тогда къ установленію математическаго выраженія для длины линій;—для этого величины x нужно считать способными выражаться въ извѣстныхъ единицахъ. Я разсмотрю эту задачу только при извѣстныхъ ограниченіяхъ и ограничусь во-первыхъ такими линіями, въ которыхъ отношенія между величинами dx—совмѣстными измѣненіями величинъ x—измѣняются непрерывно; тогда линіи можно разсматривать разложенными на элементы, внутри которыхъ отношенія величинъ dx можно считать постоянными, и задача сводится тогда къ тому, чтобы установить для каждой точки общее выраженіе выходящаго изъ нея линейнаго элемента ds, который такимъ образомъ будетъ содержать величины x и величины dx. Я принимаю во-вторыхъ, что длина линейнаго элемента остается неизмѣнною,—пренебрегая величинами 2-го порядка малости,—если всѣ точки этого элемента подвергнутся одному и тому же безконечно малому перемѣщенію, откуда непосредственно слѣдуетъ, что если всѣ величины dx возрастаютъ въ одномъ и томъ же отношеніи, линейный элементъ также измѣняется въ этомъ отношеніи. При такомъ предположеніи линейный элементъ можетъ быть произвольною однородною функціей первой степени отъ величинъ dx, которая не измѣняется, когда всѣ dx мѣняютъ знакъ, причемъ произвольные коэффиціенты суть непрерывныя функціи величинъ x. Чтобы найти простѣйшіе случаи, я ищу прежде всего выраженіе для $(n-1)$-протяженныхъ многообразій, вездѣ равноудаленныхъ отъ начальной точки линейнаго элемента, т. е. я ищу непрерывную функцію мѣста, отличающую одно мѣсто отъ другого. Эта функція, начиная отъ начальной точки, должна во всѣ стороны или убывать или прибывать; я приму, что она увеличивается во всѣхъ направленіяхъ и слѣдовательно имѣетъ въ точкѣ свой minimum. Тогда если ея первая и вторая производныя конечны, дифференціалъ перваго порядка долженъ обратиться въ нуль, а второй дифференціалъ не можетъ быть отрицателенъ; я принимаю, что онъ остается постоянно положительнымъ. Это дифференціальное выраженіе второго порядка остается тогда постояннымъ, если ds остается постояннымъ, и возрастаетъ пропорціонально второй степени нѣкоторой величины, если величины dx, а слѣдовательно и ds, измѣняются пропорціонально первой степени этой величины. Оно равно по этому $Const.\, ds^2$, и слѣдовательно ds равно корню квадратному изъ однородной функціи второй степени, остающейся постоянно положительной и имѣющей коэффиціентами непрерывныя функціи величинъ x. Для пространства, если опредѣлимъ положеніе точки въ прямоугольныхъ координатахъ, имѣемъ $ds = \sqrt{\Sigma (dx)^2}$; пространство такимъ образомъ подходитъ подъ этотъ простѣйшій случай. Слѣдующій за этимъ простой случай обнимаетъ многообразія, въ которыхъ линейный элементъ можетъ быть выраженъ корнемъ 4-й степени изъ дифференціальнаго выраженія 4-ой степени. Изслѣдованіе этого болѣе общаго случая хотя и не потребовало бы никакихъ существенно новыхъ принциповъ, но отняло бы довольно много времени и бросало бы сравнительно мало свѣта на ученіе о пространствѣ, такъ какъ результаты его не выражаются къ тому же геометрически; я ограничусь поэтому многообразіями, въ которыхъ линейный элементъ выражается квадратнымъ корнемъ изъ дифференціальнаго выраженія второй степени. Такое выраженіе можно преобразовать въ другое ему подобное, замѣняя n независимыхъ перемѣнныхъ функціями n новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ. Такимъ путемъ нельзя однако каждое выраженіе преобразовать въ каждое другое; ибо выраженіе содержитъ $\frac{n(n+1)}{2}$ коэффиціентовъ—произвольныхъ функцій отъ независимыхъ перемѣнныхъ; вводя новыя перемѣнныя, удовлетворимъ только n соотношеніямъ, и слѣдовательно только n коэффиціентовъ данныхъ выраженій могутъ сдѣлаться равными. Остальные $\frac{n(n-1)}{2}$ уже вполнѣ опредѣлены природою изображаемаго многообразія, и для установленія его метрическихъ соотношеній требуется такимъ образомъ $\frac{n(n-1)}{2}$ функцій мѣста. Многообразія, въ которыхъ, какъ на плоскости и въ пространствѣ, линейный элементъ приводится къ виду $\sqrt{\Sigma (dx)^2}$ представляютъ поэтому только особенный случай изслѣдуемыхъ здѣсь многообразій; имъ слѣдуетъ придать особое названіе, и я буду называть плоскими такія многообразія, въ которыхъ квадратъ линейнаго элемента можетъ быть представленъ въ видѣ суммы квадратовъ полныхъ дифференціаловъ. Чтобы можно было обозрѣть существенныя особенности всѣхъ многообразій, представляемыхъ вышеуказаннымъ образомъ, необходимо устранить тѣ ихъ особенности, которыя проистекаютъ отъ способа представленія; это достигается выборомъ перемѣнныхъ величинъ по опредѣленному принципу.

§ 2.

Съ этою цѣлью вообразимъ себѣ, что построена система кратчайшихъ линій, выходящихъ изъ какой-нибудь точки; положеніе всякой другой можетъ быть тогда опредѣлено начальнымъ направленіемъ кратчайшей линіи, на которой она лежитъ, и ея разстояніемъ по этой линіи отъ начальной точки и выражается поэтому отношеніями величинъ dx^0, т. е. величинъ dx въ началѣ этой кратчайшей линіи, и длиною s этой линіи. Введемъ теперь вмѣсто dx^0 такія составленныя изъ нихъ линейныя выраженія $d\alpha$, чтобы начальное значеніе квадрата линейнаго элемента равнялось суммѣ квадратовъ этихъ выраженій (независимыми перемѣнными будутъ слѣдовательно величина s и отношенія величинъ $d\alpha$), и подставимъ наконецъ вмѣсто $d\alpha$ такія пропорціональныя имъ величины x_1, $x_2 \ldots x_n$, что сумма квадратовъ $= s^2$. Если введемъ эти величины, то для безконечно малыхъ значеній x квадратъ линейнаго элемента $= \Sigma dx^2$; членъ слѣдующаго высшаго порядка въ немъ равенъ однородному выраженію второй степени отъ $\frac{n(n-1)}{2}$ величинъ $(x_i dx_j - x_j dx_i)$—безконечно-малой величинѣ 4-го порядка, такъ что раздѣляя это выраженіе на квадратъ площади безконечно малаго треугольника съ вершинами $(0,0,0,\ldots)$, $(x_1\, x_2\, x_3 \ldots)$, $(dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots)$, получимъ конечную величину. Эта величина сохраняетъ одно и тоже значеніе пока x и dx заключаются въ однѣхъ и тѣхъ же бинарныхъ линейныхъ формахъ, или пока обѣ кратчайшія линіи отъ значеній 0 до значеній x и отъ значеній 0 до значеній dx остаются въ одномъ и томъ же элементѣ поверхности, и зависитъ, слѣдовательно, только отъ мѣста и направленія этого элемента. Она очевидно $= 0$, если изображаемое многообразіе плоско, т. е. если квадратъ линейнаго элемента приводится къ виду Σdx^2, и можетъ поэтому служить мѣрою существующаго въ этой точкѣ уклоненія многообразія отъ плоскаго. Умноженная на $-\frac{3}{4}$, она равняется той величинѣ, которую Гауссъ назвалъ мѣрою кривизны поверхности. Для установленія метрическихъ соотношеній n-протяженнаго многообразія, представляемаго въ предположенномъ видѣ, найдены были необходимыми $\frac{n(n-1)}{2}$ функцій мѣста; слѣдовательно, если мѣра кривизны дана въ каждой точкѣ для $\frac{n(n-1)}{2}$ направленій по поверхности, то отсюда можно найти метрическія соотношенія многообразія, если только между этими значеніями не существуетъ тожественной зависимости, что на самомъ дѣлѣ, вообще говоря, не имѣетъ мѣста. Метрическія соотношенія тѣхъ многообразій, въ которыхъ линейный элементъ выражается квадратнымъ корнемъ изъ дифференціальнаго выраженія второй степени, могутъ быть выражены такимъ образомъ совершенно независимо отъ выбора перемѣнныхъ величинъ. Подобнымъ путемъ можно подвигаться къ той же цѣли и въ такихъ многообразіяхъ, въ которыхъ линейный элементъ представляется помощью болѣе сложнаго выраженія, напр., помощью корня 4-ой степени изъ дифференціальнаго выраженія 4-ой степени. Тогда линейный элементъ нельзя уже, вообще говоря, привести къ виду корня квадратнаго изъ суммы квадратовъ линейныхъ выраженій, и потому въ выраженіи для квадрата линейнаго элемента уклоненіе отъ плоскаго будетъ величиною второго порядка малости, а не четвертаго, какъ въ ранѣе указанныхъ многообразіяхъ. Въ виду такой особенности этихъ послѣднихъ многообразій они могутъ быть названы плоскими въ безконечно-малыхъ частяхъ. Самое же важное для настоящей цѣли свойство этихъ многообразій, ради котораго они одни только и будутъ изслѣдованы здѣсь, состоитъ въ томъ, что соотношенія двупротяженныхъ многообразій геометрически изображаются поверхностями, а соотношенія этихъ многообразій большаго числа протяженій сводятся на соотношенія содержащихся въ нихъ поверхностей; послѣднее требуетъ нѣкотораго поясненія.

§ 3.

Въ представленіе поверхностей рядомъ съ внутренними метрическими соотношеніями, въ которыхъ обращается вниманіе только на длину путей въ нихъ, привходитъ постоянно и ихъ положеніе относительно внѣшнихъ точекъ. Но отъ внѣшнихъ отношеній можно отвлечься, подвергая поверхности такимъ измѣненіямъ, при которыхъ не измѣняется длина начерченныхъ на нихъ линій, т. е. представляя ихъ себѣ согнутыми безъ растяженія и разсматривая всѣ такія поверхности однородными между собою. Такимъ образомъ, произвольныя цилиндрическія или коническія поверхности будутъ, напр., однородны съ плоскостью, такъ какъ онѣ могутъ быть получены изъ нея простымъ сгибаніемъ, причемъ внутреннія метрическія соотношенія остаются безъ измѣненія, и всѣ теоремы о нихъ, т. е. вся планиметрія—сохраняютъ силу; напротивъ онѣ не однородны съ шаровою поверхностью, которая не можетъ быть превращена въ плоскость безъ растяженія. По предыдущимъ изслѣдованіямъ, если линейный элементъ выражается помощью квадратнаго корня изъ дифференціальнаго выраженія второй степени, какъ это имѣемъ въ случаѣ поверхностей, внутреннія метрическія соотношенія двупротяженной величины характеризуются мѣрою кривизны. Въ поверхностяхъ этой величинѣ можно дать наглядный смыслъ, что мѣра кривизны есть произведеніе изъ двухъ кривизнъ поверхности въ этой точкѣ, или что ея произведеніе на безконечно-малый треугольникъ, составленный кратчайшими линіями, равно половинѣ избытка суммы угловъ этого треугольника надъ двумя прямыми, выраженной въ частяхъ радіуса.

Первое опредѣленіе предполагало бы теорему, что произведеніе обоихъ радіусовъ кривизны не измѣняется при простомъ сгибаніи поверхности, второе—что избытокъ суммы угловъ безконечно-малаго треугольника надъ двумя прямыми въ одномъ и томъ же мѣстѣ пропорціоналенъ его площади. Чтобы дать понятный смыслъ кривизнѣ n-протяженнаго многообразія въ данной точкѣ и въ данномъ проведенномъ черезъ нее элементѣ поверхности, нужно исходить изъ того, что выходящая изъ точки кратчайшая линія вполнѣ опредѣлена, если дано ея начальное направленіе. Соотвѣтственно этому мы получимъ опредѣленную поверхность, если продолжимъ всѣ кратчайшія линіи, выходящія изъ данной точки и лежащія въ началѣ въ данномъ элементѣ поверхности. Эта поверхность имѣетъ въ данной точкѣ опредѣленную мѣру кривизны, которая является въ тоже время мѣрою кривизны n-протяженнаго многообразія въ данной точкѣ и данномъ элементѣ поверхности.

§ 4.

Прежде чѣмъ дѣлать приложенія къ пространству, необходимо сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія о плоскихъ многообразіяхъ вообще, т. е. о такихъ, въ которыхъ квадратъ линейнаго элемента выражается суммою квадратовъ полныхъ дифференціаловъ.

Въ плоскомъ n-протяженномъ многообразіи мѣра кривизны равна нулю въ каждой точкѣ во всякомъ направленіи; но по предыдущему для опредѣленія метрическихъ соотношеній достаточно знать, что она равна нулю въ каждой точкѣ въ $n\frac{n-1}{2}$ направленіяхъ элемента поверхности, коихъ мѣры кривизны независимы одна отъ другой. Многообразія, которыхъ мѣра кривизны вездѣ $=0$, можно разсматривать, какъ частный случай такихъ многообразій, которыхъ мѣра кривизны повсюду постоянна. Общій характеръ этихъ многообразій съ постоянной кривизною можно выразить и тѣмъ, что фигуры въ нихъ могутъ двигаться безъ сгибанія. Ибо очевидно фигуры не могли бы имѣть на нихъ произвольныхъ поступательныхъ и вращательныхъ движеній, если бы кривизна не была одинакова въ каждой точкѣ во всѣхъ направленіяхъ. Но съ другой стороны мѣра кривизны вполнѣ опредѣляетъ метрическія соотношенія многообразія; поэтому метрическія соотношенія около одной точки во всѣхъ направленіяхъ совершенно одинаковы съ метрическими соотношеніями около какой-нибудь другой, и потому выполнимы тѣ-же самыя построенія; слѣдовательно въ многообразіяхъ съ постоянною кривизною можно давать фигурамъ какое угодно положеніе. Метрическія соотношенія этихъ многообразій зависятъ только отъ значенія мѣры кривизны, и можно замѣтить въ отношеніи аналитическаго представленія, что означая эту величину черезъ α, можно выраженію линейнаго элемента дать видъ:

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}.$$

§ 5.

Геометрическимъ поясненіемъ можетъ служить разсмотрѣніе поверхностей съ постоянною кривизною. Легко видѣть, что поверхности, которыхъ кривизна положительна, навертываются на сферу, которой радіусъ равенъ единицѣ, дѣленной на корень квадратный изъ мѣры кривизны; для обозрѣнія всего многообразія этихъ поверхностей дадимъ одной изъ нихъ видъ шара, а другимъ—поверхностей вращенія, касающихся съ нимъ по экватору. Поверхности съ мѣрою кривизны, бо́льшею, чѣмъ кривизна сферы, будутъ касаться ея со внутренней ея стороны и примутъ видъ внѣшней поверхности кольца, обращенной отъ оси; онѣ навертываются на пояса шаровъ меньшаго радіуса кривизны, но покрываютъ ихъ болѣе одного раза. Поверхности съ меньшею положительною кривизною получимъ, вырѣзая изъ шаровыхъ поверхностей бо́льшаго радіуса часть, ограниченную двумя полуокружностями большихъ круговъ, и соединяя линіи разрѣза. Поверхность нулевой кривизны есть цилиндрическая поверхность, касающаяся шара по экватору; поверхности же съ отрицательною кривизною касаются этого цилиндра извнѣ и имѣютъ видъ внутренней части кольца, обращенной къ его оси. Если представимъ себѣ поверхности, какъ геометрическое мѣсто движущихся въ нихъ частей, подобно тому, какъ пространство есть мѣсто движенія тѣлъ, то во всѣхъ этихъ поверхностяхъ части могутъ двигаться безъ растяженія. Поверхности съ положительною мѣрою кривизны всегда могутъ принять такой видъ, что части ихъ могутъ въ нихъ двигаться какъ угодно безъ сгибанія, именно онѣ могутъ принять видъ шаровыхъ поверхностей; этого не имѣетъ мѣста въ поверхностяхъ съ отрицательною кривизною. Кромѣ этой независимости частей отъ ихъ положенія, въ поверхности съ кривизною, равною 0, существуетъ независимость направленія отъ мѣста, чего нѣтъ въ остальныхъ поверхностяхъ.

III. Приложеніе къ пространству.

§ 1.

Послѣ этихъ изслѣдованій объ опредѣленіи метрическихъ соотношеній n-кратно протяженной величины можно дать условія, необходимыя и достаточныя для опредѣленія метрическихъ соотношеній пространства, если предположить заранѣе независимость линій отъ положенія и возможность представить линейный элементъ корнемъ квадратнымъ изъ дифференціальнаго выраженія второй степени, т. е. плоскость (Ebenheit) въ безконечно-малыхъ частяхъ.

Условія эти во-первыхъ выражаются тѣмъ, что мѣра кривизны въ каждой точкѣ въ трехъ направленіяхъ поверхности равна 0, и метрическія соотношенія пространства поэтому опредѣлены, если сумма угловъ въ треугольникѣ вездѣ равна двумъ прямымъ.

Если предположимъ во-вторыхъ, какъ это дѣлаетъ Евклидъ, существованіе независимо отъ положенія не только линій, но и тѣлъ, то вслѣдствіе этого кривизна вездѣ постоянна, и потому во всѣхъ треугольникахъ сумма угловъ опредѣлена, если она опредѣлена въ одномъ.

Наконецъ въ-третьихъ, вмѣсто допущенія независимости длины линій отъ мѣста и направленія, можно было бы допустить независимость длины и направленія отъ мѣста. По этому воззрѣнію перемѣны мѣста или различія по мѣсту суть комплексныя величины, выражаемыя въ трехъ независимыхъ единицахъ.

§ 2.

Въ предыдущемъ соотношенія протяженности отдѣлялись отъ метрическихъ, и было найдено, что при однихъ и тѣхъ же соотношеніяхъ протяженности мыслимы различныя метрическія соотношенія; затѣмъ были отыскиваемы системы простыхъ метрическихъ соотношеній, которыми вполнѣ опредѣляются метрическія соотношенія пространства и которыя имѣютъ своимъ естественнымъ слѣдствіемъ всѣ теоремы о нихъ; остается выяснить, какъ, въ какой степени и въ какомъ объемѣ эти предположенія провѣряются опытомъ. Въ этомъ отношеніи есть существенное различіе между простыми соотношеніями протяженности и метрическими соотношеніями, потому что относительно первыхъ, которыхъ возможные случаи образуютъ дискретное многообразіе, показанія опыта хотя и не бываютъ никогда безусловны достовѣрны, но и не суть неточны, между тѣмъ какъ въ послѣднихъ, гдѣ возможные случаи образуютъ непрерывное многообразіе, каждое опредѣленіе изъ опыта всегда остается неточно, какъ бы ни была велика вѣроятность того, что оно почти вѣрно. Это обстоятельство важно при распространеніи этихъ эмпирическихъ опредѣленій за предѣлы наблюденій въ сторону неизмѣримо-большого и неизмѣримо-малаго; ибо послѣднія за предѣлами наблюденія становятся все менѣе точны, первыя же (т. е. соотношенія протяженности) этого не испытываютъ.

При распространеніи пространственныхъ построеній въ неизмѣримо-большое безграничность и безконечность раздѣляются: безграничность относится къ соотношеніямъ протяженности, безконечность къ метрическимъ соотношеніямъ. Что пространство есть безграничное многообразіе, есть предположеніе, примѣняемое во всякомъ познаваніи внѣшняго міра; по этому предположенію въ каждое мгновеніе область дѣйствительныхъ воспріятій можетъ быть дополнена, и возможныя мѣста искомаго предмета могутъ быть построены; это предположеніе постоянно подтверждается при такихъ приложеніяхъ. Безграничность пространства обладаетъ поэтому бо́льшею эмпирическою достовѣрностью, чѣмъ какой бы то ни было внѣшній опытъ. Но отсюда никоимъ образомъ не вытекаетъ безконечность; напротивъ, если предположить независимость тѣлъ отъ мѣста, ими занимаемаго, т. е. если приписать пространству постоянную мѣру кривизны, пространство было бы скорѣе необходимо конечно, коль скоро эта мѣра кривизны имѣла бы положительное значеніе, хотя бы сколь угодно малое. Тогда, продолжая лежащія въ нѣкоторомъ элементѣ поверхности кратчайшія линіи, получимъ безграничную поверхность постоянной положительной кривизны, т. е. поверхность, которая въ плоскомъ трикратно протяженномъ многообразіи приняла бы видъ шаровой поверхности, и которая слѣдовательно конечна.

§ 3.

Вопросы о неизмѣримо-большомъ суть праздные вопросы для объясненія природы. Иное дѣло вопросы о неизмѣримо-маломъ. На точности, съ которою мы слѣдимъ за явленіями въ безконечно-маломъ, существенно основывается познаніе ихъ причинной связи. Успѣхи послѣднихъ столѣтій въ познаніи механической стороны явленій природы обусловливаются почти исключительно точностью построенія, ставшей возможною благодаря изобрѣтенію анализа безконечно-малыхъ и благодаря найденнымъ Архимедомъ, Галилеемъ и Ньютономъ простымъ основнымъ понятіямъ, которыми пользуется современная физика. Но въ тѣхъ естественныхъ наукахъ,—гдѣ до сихъ поръ отсутствуютъ простыя основныя понятія для такихъ построеній,—для познанія причинной связи слѣдятъ за явленіями въ пространственно-маломъ, насколько позволяетъ это микроскопъ. Вопросы о метрическихъ соотношеніяхъ пространства въ неизмѣримо-маломъ не принадлежатъ поэтому къ числу праздныхъ вопросовъ.

Если предположимъ, что тѣла существуютъ независимо отъ мѣста, ими занимаемаго, то мѣра кривизны повсюду постоянна, и тогда изъ астрономическихъ измѣреній слѣдуетъ, что она не можетъ быть отлична отъ нуля; во всякомъ случаѣ ея обратное значеніе должно бы соотвѣтствовать поверхности, въ сравненіи съ размѣрами которой ничтожна проникающая сила нашихъ телескоповъ. Но если такой независимости тѣлъ отъ мѣста, ими занимаемаго, не существуетъ, то нельзя заключать по метрическимъ соотношеніямъ въ большомъ о таковыхъ въ безконечно-маломъ; тогда въ каждой точкѣ мѣра кривизны можетъ имѣть произвольное значеніе по тремъ направленіямъ, если только полная кривизна каждой измѣримой части пространства не отлична чувствительнымъ образомъ отъ нуля; еще болѣе сложныя отношенія могутъ представиться, если не имѣетъ мѣста предположенная нами возможность выразить линейный элементъ корнемъ квадратнымъ изъ дифференціальнаго выраженія второй степени. Но эмпирическія понятія, на которыхъ основываются метрическія опредѣленія пространства,—понятія о твердомъ тѣлѣ и свѣтовомъ лучѣ теряютъ повидимому силу въ безконечно-маломъ; можно поэтому легко представить себѣ, что метрическія опредѣленія пространства въ безконечно-маломъ не соотвѣтствуютъ предположеніямъ геометріи, и мы на самомъ дѣлѣ должны были бы принять это, коль скоро этимъ объяснялись бы проще явленія.

Вопросъ о законности предположеній геометріи въ безконечно-маломъ находится въ связи съ вопросомъ о внутреннемъ основаніи метрическихъ соотношеній пространства. При этомъ вопросѣ, который еще можетъ быть причисляемъ къ ученію о пространствѣ, примѣняется выше сдѣланное замѣчаніе, что въ дискретномъ многообразіи принципъ метрическихъ соотношеній заключается уже въ понятіи многообразія, въ непрерывномъ же долженъ привзойти со стороны. Поэтому, или реальность лежащая въ основѣ пространства, должна составлять дискретное многообразіе, или же основаніе метрическихъ соотношеній мы должны искать внѣ ея, въ дѣйствующихъ на нее связующихъ силахъ.

Рѣшеніе этихъ вопросовъ можно найти, только исходя изъ прежняго воззрѣнія на явленія, подтвержденнаго опытомъ, которому Ньютонъ положилъ основаніе, и постепенно переработывая его сообразно фактамъ, не объяснимымъ съ его помощью; такія изслѣдованія, которыя, какъ произведенное здѣсь, исходятъ изъ общихъ понятій, могутъ служить только тому, чтобы эта работа не затруднялась узостью понятій, и успѣхамъ въ познаніи взаимной связи вещей не препятствовали традиціонные предразсудки.

Это переводитъ въ область другой науки, въ область физики, вступать въ которую не позволяетъ характеръ настоящей работы.

ОБОЗРѢНІЕ СОДЕРЖАНІЯ.

§ 2. Составленіе понятія о системѣ одного, двухъ, и т. д. n измѣреній.

§ 3. Приведеніе опредѣленія положенія въ данной системѣ на количественныя опредѣленія. Существенный признакъ системы n измѣреній.

II. Метрическія соотношенія, свойственныя системѣ n измѣреній *), въ предположеніи, что линіи имѣютъ длину независящую отъ положенія, такъ что каждая линія можетъ быть измѣрена каждою другою.

§ 1. Выраженіе линейнаго элемента. Плоскими принимаются такія системы, въ которыхъ линейный элементъ выражается корнемъ квадратнымъ изъ суммы квадратовъ полныхъ дифференціаловъ.

§ 2. Изслѣдованіе n-протяженныхъ многообразій, въ которыхъ линейный элементъ выражается квадратнымъ корнемъ изъ дифференціальнаго выраженія 2-й степени. Мѣра ихъ уклоненія отъ плоскаго многообразія (мѣра кривизны) въ данной точкѣ и данномъ направленіи элемента поверхности. Для опредѣленія ихъ метрическихъ соотношеній (подъ извѣстными ограниченіями) возможно и достаточно принять, что въ каждой точкѣ дана мѣра кривизны для $\frac{n(n-1)}{2}$ направленій элементовъ поверхности.

§ 3. Геометрическое поясненіе.

§ 4. Плоскія многообразія (въ которыхъ мѣра кривизны вездѣ=0) можно разсматривать, какъ частный случай многообразій съ постоянною мѣрой кривизны. Они могутъ быть опредѣлены также тѣмъ что въ нихъ существуетъ независимость n—протяженныхъ величинъ отъ мѣста (подвижность ихъ безъ растяженія).

§ 5. Поверхности съ постоянною мѣрою кривизны.

III. Приложеніе къ пространству

§ 1. Системы фактовъ, достаточныхъ для опредѣленія метрическихъ соотношеній пространства, какъ ихъ предполагаетъ геометрія.

§ 2. Какъ далеко вѣроятно значеніе этого эмпирическаго опредѣленія за предѣлами наблюденія въ неизмѣримо-большомъ?

§ 3. Какъ далеко въ безконечно-маломъ? Связь этого вопроса съ объясненіемъ природы **).

---

*) Изслѣдованіе возможныхъ для n-кратно протяженнаго многообразія метрическихъ опредѣленій очень неполно, но для настоящей цѣли достаточно.

**) § 3 отд. III нуждается еще въ обработкѣ и дальнѣйшемъ развитіи.

О ФАКТАХЪ, ЛЕЖАЩИХЪ ВЪ ОСНОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

Г. Гельмгольца.

Переводъ проф. А. Васильева.

Мои изслѣдованія о пространственныхъ воспріятіяхъ въ полѣ зрѣнія привели меня и къ изслѣдованію по вопросу о происхожденіи и сущности нашихъ общихъ воззрѣній о пространствѣ. При этомъ прежде всего явился вопросъ, несомнѣнно принадлежащій къ области точныхъ наукъ: какія изъ положеній геометріи имѣютъ объективное значеніе? какія изъ нихъ, напротивъ, суть только опредѣленія, или слѣдствія опредѣленій, или зависятъ только отъ формы представленія? Этотъ вопросъ, по моему мнѣнію, разрѣшается не такъ просто, такъ какъ въ геометріи мы имѣемъ дѣло постоянно съ идеальными геометрическими формами, которыхъ вещественное представленіе въ дѣйствительности есть всегда только приближеніе къ требованіямъ понятія, —и мы рѣшаемъ вопросы, твердо-ли тѣло, плоски-ли его грани, прямы-ли его ребра,—съ помощью тѣхъ-же положеній, которыхъ фактическую вѣрность хотимъ провѣрить опытомъ.

При изслѣдованіи я шелъ въ сущности по тому-же пути, которому слѣдовалъ и Риманнъ въ своей недавно опубликованной диссертаціи [1]). Аналитическое изслѣдованіе вопроса, чѣмъ отличается пространство отъ другихъ допускающихъ измѣреніе многообразно протяженныхъ и непрерывныхъ величинъ, является необходимымъ въ этомъ случаѣ именно вслѣдствіе того, что оно не нуждается въ наглядности и поэтому не подвержено ошибкамъ, происходящимъ отъ ограниченности нашихъ представленій и потому съ трудомъ избѣгаемымъ въ этой области. Притомъ аналитическое изслѣдованіе вопроса имѣетъ то преимущество, что оно допускаетъ возможность послѣдовательнаго и полнаго проведенія иной системы аксіомъ.

[1]) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (См выше стр. 67—82).

Моя ближайшая цѣль состояла, какъ и у Римапна, въ томъ, чтобы изслѣдовать, какія особенности пространства принадлежатъ каждому зависящему отъ многихъ перемѣнныхъ непрерывно измѣняющемуся многообразію, котораго различія допускаютъ количественное сравненіе, какія изъ нихъ, напротивъ, не будучи обусловлены этимъ общимъ характеромъ, свойственны только пространству.

Я имѣлъ какъ разъ въ физіологической оптикѣ два примѣра допускающихъ пространственное представленіе и перемѣнныхъ многообразій, именно систему цвѣтовъ, упоминаемую и Риманномъ, и измѣренія поля зрѣнія глазомѣромъ. Оба многообразія представляютъ извѣстныя основныя различія и наводили меня на сравненіе.

Я долженъ признаться, что хотя опубликованіе изслѣдованій Римaнна и отняло у меня право первенства на рядъ моихъ собственныхъ результатовъ, для меня имѣло вмѣстѣ съ тѣмъ весьма большое значеніе то обстоятельство, что такой прекрасный математикъ заинтересовался тѣми-же самыми вопросами; имѣть его своимъ спутникомъ представлялось мнѣ важнымъ залогомъ вѣрности избраннаго мною пути въ области вопросовъ, дискредитированныхъ прежними неудачными попытками.

Наши работы притомъ не вполнѣ совпадаютъ, и я позволяю себѣ поэтому предложить Обществу часть моихъ изслѣдованій, которая не заключается въ изслѣдованіяхъ Римaнна.

Послѣ того, какъ Риманнъ показалъ, что многообразіе можетъ быть разсматриваемо какъ n-кратно протяженное, если опредѣленная особь (Einzelne) многообразія опредѣляется въ немъ n перемѣнными величинами (координатами), и прибавилъ дальнѣйшее требованіе, чтобы каждая линія могла быть независимо отъ мѣста и направленія сравнимою съ каждою другою по длинѣ, ему представилась задача опредѣлить характеръ зависимости элемента длины линіи отъ соотвѣтствующихъ дифференціаловъ координатъ. Онъ рѣшаетъ эту задачу съ помощью гипотезы, полагая элементъ длины линіи равнымъ квадратному корню изъ однородной функціи второй степени отъ дифференціаловъ координатъ. Онъ выставляетъ эту гипотезу, какъ простѣйшую изъ соотвѣтствующихъ условіямъ задачи, но признаетъ ее явно за гипотезу и между прочимъ упоминаетъ о возможности того, что корень четвертой степени или другія еще болѣе сложныя выраженія могутъ представлять линейный элементъ.

Затѣмъ онъ разсматриваетъ въ самой общей формѣ тѣ слѣдствія, которыя могутъ быть выведены изъ этой гипотезы, и только въ самомъ концѣ ограничиваетъ общность своего изслѣдованія, выставляя новое требованіе, состоящее въ томъ, что ограниченныя n-кратно протяженныя фигуры конечной величины (неизмѣняемыя системы точекъ) могутъ перемѣщаться повсюду безъ растяженія. Это ограниченіе приводитъ его къ случаю дѣйствительнаго пространства, удовлетворяющаго этому требованію.

При этомъ обнаруживается, что требованіе безконечности протяженій пространства, выставляемое обыкновенною геометріею, не включается въ число допущеній.

Мое изслѣдованіе отличается отъ изысканій Риманна тѣмъ, что я ближе изучилъ то вліяніе, которое имѣетъ введенное имъ ограниченіе, отличающее дѣйствительное пространство отъ другихъ многократно протяженныхъ многообразій, на обоснованіе теоремы, составляющей краеугольный камень всего изслѣдованія, и по которой квадратъ линейнаго элемента есть однородная функція второй степени отъ дифференціаловъ координатъ. Можно показать, что, придерживаясь съ самаго начала требованія безусловно свободной подвижности твердыхъ фигуръ безъ измѣненія формы во всѣхъ частяхъ пространства, легко вывести исходную гипотезу Риманна изъ болѣе широкихъ допущеній.

Моя исходная точка заключалась въ томъ, что всякое первоначальное измѣреніе пространства основывается на наблюденіи совмѣщенія; прямолинейность свѣтовыхъ лучей есть очевидно физическій фактъ, основывающійся на опытахъ другого рода, и не имѣетъ значенія для слѣпца, который однако-же можетъ также пріобрѣсти полное убѣжденіе въ вѣрности геометрическихъ предложеній. О совпаденіи-же вообще нельзя говорить, если твердыя тѣла или системы точекъ не могутъ быть передвигаемы безъ измѣненія формы, и если совпаденіе двухъ пространственныхъ величинъ не есть фактъ, существующій независимо отъ всѣхъ движеній. Поэтому я съ самаго начала предположилъ возможность пространственнаго измѣренія путемъ констатированія совпаденія и поставилъ себѣ задачу найти самую общую аналитическую форму многократно протяженнаго многообразія, при которой возможно движеніе требуемаго вида.

При этомъ измѣненномъ пути моей работѣ недоставало той большей общности, которой достигъ анализъ Риманна до введенія вышеупомянутаго ограниченія. По введеніи-же этого ограниченія мои результаты совершенно совпадаютъ съ его результатами.

§ 1.

Гипотезы, лежащія въ основаніи изслѣдованія.

I. **Пространство n измѣреній есть n-кратно протяженное многообразіе**, т. е. каждая опредѣленная особь (Einzelne)—точка—опредѣляется измѣреніемъ нѣкоторыхъ непрерывно и независимо другъ отъ друга измѣняющихся величинъ (координатъ), число которыхъ есть n. Каждое движеніе точки сопровождается поэтому непрерывнымъ измѣненіемъ по крайней мѣрѣ одной изъ координатъ. Если и встрѣчаются исключенія, гдѣ или измѣненіе становится прерывнымъ или, несмотря на движеніе, не происходитъ измѣненія всѣхъ координатъ, то такія исключенія будутъ относиться только къ извѣстнымъ мѣстамъ (точкамъ, линіямъ, поверхностямъ), опредѣляемымъ уравненіями; всѣ такія мѣста мы исключаемъ изъ изслѣдованія.

Необходимо замѣтить, что подъ непрерывностью измѣненія при движеніи не только подразумѣвается то, что при движеніи координаты принимаютъ всѣ промежуточныя значенія, лежащія между конечными значеніями, но вмѣстѣ съ тѣмъ предполагается существованіе производныхъ т. е. предполагается, что отношенія между взаимно соотвѣтствующими измѣненіями координатъ при уменьшеніи этихъ измѣненій стремятся къ опредѣленному значенію.

Эта гипотеза лежитъ въ основаніи работы Римана, на которую я и ссылаюсь для ближайшаго разъясненія и обоснованія.

II. **Допускается существованіе подвижныхъ, но неизмѣняемыхъ (твердыхъ) тѣлъ или системъ точекъ**; такое допущеніе необходимо для сравненія пространственныхъ величинъ путемъ совмѣщенія. Такъ какъ мы еще не имѣемъ пока права предполагать какіе-либо спеціальные пріемы для измѣренія пространственныхъ величинъ, то мы можемъ теперь дать только слѣдующее опредѣленіе твердаго тѣла: *Между 2n координатами каждой пары точекъ, принадлежащихъ твердому тѣлу, существуетъ уравненіе, независящее отъ движенія твердаго тѣла и одинаковое для всѣхъ взаимно совпадающихъ паръ точекъ.*

Совмѣстимыми считаются тѣ пары точекъ, которыя одновременно или послѣдовательно могутъ совпадать съ одною и тою-же парою точекъ пространства.

Несмотря на кажущуюся неопредѣленность, это опредѣленіе твердаго тѣла въ высшей степени плодотворно, такъ какъ на основаніи его между n точками должны существовать $\frac{m(m-1)}{2}$ уравненій, между тѣмъ какъ число заключающихся въ нихъ неизвѣстныхъ координатъ равно mn и изъ нихъ, кромѣ того, $\frac{n(n+1)}{2}$ должны быть въ распоряженіи для опредѣленія перемѣннаго положенія неизмѣняемой системы. Поэтому въ томъ случаѣ, когда $m > n+1$, число уравненій превышаетъ число неизвѣстныхъ на $\frac{1}{2}(m-n)(m-n-1)$. От-Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе между кординатами какихъ-либо двухъ неподвижныхъ точекъ не можетъ имѣть произвольную форму, но что этимъ уравненіямъ должны принадлежать особенныя свойства. Такимъ образомъ ставится опредѣленная аналитическая задача, состоящая въ ближайшемъ опредѣленіи вида этихъ уравненій.

Замѣчу, что выставленный выше постулатумъ, на основаніи котораго въ пространствѣ имѣетъ мѣсто уравненіе для каждыхъ двухъ неизмѣнно соединенныхъ точекъ, отличаетъ пространство отъ системы цвѣтовъ. Въ системѣ цвѣтовъ уравненіе, выводимое посредствомъ закона смѣшенія, существуетъ вообще между пятью точками или въ частномъ случаѣ, когда цвѣтъ образуется изъ смѣси двухъ другихъ, между этими тремя цвѣтами. Въ пространствѣ этому соотвѣтствовалъ-бы тотъ случай, когда всѣ твердыя тѣла были-бы произвольно растяжимы по направленіямъ трехъ главныхъ осей. Данное выше опредѣленіе твердости есть такимъ образомъ опредѣленіе высшей мыслимой степени относительной твердости.

III. **Допускается вполнѣ свободная подвижность твердыхъ тѣлъ**; т. е. предполагается, что каждая ихъ точка можетъ перейти непрерывно на мѣсто каждой другой, на сколько эта первая точка не связана уравненіями, существующими между нею и прочими точками неизмѣняемой системы, къ которой она принадлежитъ.

Первая точка неизмѣняемой системы поэтому абсолютно подвижна. Если она укрѣплена, то для второй точки существуетъ уравненіе, и одна изъ ея координатъ становится функціею $n-1$ прочихъ. Послѣ того, какъ закрѣплена и эта вторая точка, для первой существуетъ уже два уравненія и т. д. Въ цѣломъ такимъ образомъ необходимо $\frac{n(n+1)}{2}$ величинъ для опредѣленія положенія неизмѣняемой системы.

Какъ изъ этого допущенія, такъ и изъ допущенія, сдѣланнаго подъ литерою II, слѣдуетъ, что *двѣ неизмѣняемыя системы точекъ A и B, которыя могутъ быть приведены* *къ совмѣщенію соотвѣтствующихъ точекъ при одномъ положеніи А, могутъ быть приведены къ совмѣщенію всѣхъ тѣхъ точекъ, которыя совмѣщались раньше, и при всякомъ другомъ положеніи А* Другими словами совмѣстимость двухъ пространственныхъ формъ не зависитъ отъ ихъ положенія или всѣ части пространства совмѣстимы взаимно, если не будемъ обращать вниманіе на ихъ границу подобно тому, какъ совмѣстимы между собою всѣ части одной и той-же шаровой поверхности, если не обращать вниманія на ихъ контуръ.

Поле зрѣнія обнаруживаетъ болѣе ограниченную подвижность изображеній на сѣтчатой оболочкѣ. Въ моей физіологической оптикѣ указано, какія слѣдствія вытекаютъ изъ этого для измѣренія пространствъ глазомѣромъ.

IV. Наконецъ мы должны приписать пространству еще одно свойство, аналогичное съ **монодроміею** функцій комплексной величины и выражающееся въ томъ, что два совмѣщающіяся тѣла совмѣщаются и послѣ того, какъ одно изъ нихъ подверглось вращенію около нѣкоторой оси. *Вращеніе* характеризуется при этомъ аналитически тѣмъ, что извѣстное число точекъ движущагося тѣла сохраняетъ во время движенія неизмѣнныя координаты, *обратное движеніе* или *возвращеніе*—тѣмъ, что ранѣе пройденныя непрерывно измѣняющіяся совокупности численныхъ значеній кординатъ должны быть проходимы въ обратномъ направленіи.

Мы можемъ выразить этотъ фактъ слѣдующимъ образомъ: *Если твердое тѣло вращается около $n-1$ точекъ, выбранныхъ такъ, что положеніе тѣла зависитъ только отъ одной независимой перемѣнной, то вращеніе безъ поворота назадъ приводитъ тѣло въ концѣ въ то начальное положеніе, изъ котораго оно вышло.*

Мы увидимъ, что это послѣднее свойство пространства не должно необходимо существовать, если даже выполнены три первыя условія. Поэтому несмотря на всю свою очевидность, оно должно быть выставлено какъ особое свойство пространства.

Обыкновенная геометрія предполагаетъ безъ особаго упоминанія существованіе этого послѣдняго свойства, такъ какъ разсматриваетъ кругъ, какъ замкнутую линію; она предполагаетъ постулатумы II и III при всѣхъ предположеніяхъ, въ которыхъ дѣло идетъ о совмѣщеніи, такъ какъ существованіе твердыхъ и свободно движущихся тѣлъ съ указанными выше свойствами есть предварительное условіе всякой совмѣстимости. Она предполагаетъ также непрерывность и измѣренія пространства. Ея положенія въ дальнѣйшемъ облекаются въ аналитическую форму, такъ какъ ихъ смыслъ безъ примѣненія такой формы не можетъ быть выраженъ опредѣленно.

§ 2.

Слѣдствія изъ предпосланныхъ положеній будутъ выводиться въ предположеніи трехъ измѣреній.

Замѣчу кромѣ того, что такъ какъ въ послѣдующемъ дѣло идетъ о доказательствѣ предложенія Римана, относящагося къ дифференціаламъ координатъ, то я буду прилагать допущенія II, III и IV только къ точкамъ съ безконечно-малыми разностями координатъ, такъ что совмѣстимость, независящая отъ границы, предполагается для безконечно-малыхъ элементовъ пространства.

Пусть u, v, w суть координаты точки, принадлежащей твердому тѣлу, для перваго положенія этого тѣла.

Пусть r, s, t будуть координаты той-же точки при другомъ положеніи твердаго тѣла. Они будуть функціями отъ u, v, w и шести постоянныхъ (постоянныхъ положенія), опредѣляющихъ новое положеніе твердаго тѣла. На основаніи допущенія I, r, s, t должны измѣняться непрерывно вмѣстѣ съ u, v, w за возможнымъ исключеніемъ тѣхъ мѣстъ, въ которыхъ движеніе точки производитъ прерывное измѣненіе координатъ. Въ тѣхъ случаяхъ, когда это исключеніе не имѣетъ мѣста, мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial s}ds + \frac{\partial u}{\partial t}dt \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial r}dr + \frac{\partial v}{\partial s}ds + \frac{\partial v}{\partial t}dt \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial r}dr + \frac{\partial w}{\partial s}ds + \frac{\partial w}{\partial t}dr \end{aligned}\right| \quad (1)$$

въ этихъ равенствахъ производныя суть функціи отъ u, v, w или зависящихъ отъ нихъ r, s, t и сверхъ того функціи шести постоянныхъ положенія.

Функціональный опредѣлитель функцій u, v, w при этомъ не обращается въ нуль: исключеніе могутъ составить только такія мѣста, гдѣ u, v, w или r, s, t недостаточны для опредѣленія положенія точки.

Переведемъ теперь съ другой стороны твердое тѣло изъ перваго положенія, когда координаты его точекъ были u, v, w въ третье, гдѣ онѣ суть ϱ, σ, τ. Мы будемъ имѣть снова:

$$
\begin{aligned}
du &= \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau \\
du &= \frac{\partial v}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial v}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial v}{\partial \tau} d\tau \qquad (1^a) \\
dw &= \frac{\partial w}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial w}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau;
\end{aligned}
$$

и здѣсь функціональный опредѣлитель также неможетъ равняться нулю; то и другое справедливо, если не имѣютъ мѣста вышеуказанныя исключенія.

Мы можемъ теперь изъ шести постоянныхъ, опредѣляющихъ положеніе твердаго тѣла во второмъ мѣстѣ, выбрать три такъ, чтобы мѣсто точки u, v, w во второмъ положеніи системы совпадало съ мѣстомъ той-же точки въ третьемъ положеніи (допущеніе III) т. е.

$$r = \rho,\ s = \sigma,\ t = \tau.$$

Вводя значенія du, dv, dw, взятыя изъ уравненія (1), въ уравненія (1^a), мы получаемъ dr, ds и dt линейно и однородно выраженными посредствомъ $d\rho$, $d\sigma$, $d\tau$, или же послѣдніе выраженными посредствомъ первыхъ.

Такъ-какъ опредѣлители уравненій (1) и (1^a) не могутъ, какъ выше было замѣчено, обращаться въ нуль, пока координаты достаточны для опредѣленія положенія соотвѣтствующихъ точекъ, то при этомъ предположеніи всегда можно считать dr, ds, dt линейно выраженными посредствомъ $d\rho$, $d\sigma$, $d\tau$, такъ-что:

$$
\left.
\begin{aligned}
dr &= A_0 d\rho + B_0 d\sigma + C_0 d\tau \\
ds &= A_1 d\rho + B_1 d\sigma + C_1 d\tau \\
dt &= A_2 d\rho + B_2 d\rho + C_2 d\tau
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

Возможность получить такія линейныя уравненія, исключая упомянутые особенные случаи, вытекаетъ изъ того, что точка r, s, t, которую мы разсматриваемъ, не имѣетъ къ u, v, w никакого особеннаго отношенія, обусловленнаго природою задачи, но совершенно произвольна; то-же самое относится и къ точкѣ ρ, σ, τ. Поэтому уравненія (1) и (1^a) должны быть вѣрны въ общемъ случаѣ, а изъ нихъ вытекаетъ (2). Уравненіе (2) не могло быть выведено непосредственно съ такою же увѣренностью, такъ какъ при движеніи, въ которомъ точка r, s, t остается неподвижною, она находится къ точкѣ ρ,

σ, τ въ такомъ особенномъ отношенiи, которое можетъ навести на сомнѣнiе, не обращаются-ли при этомъ въ нуль всѣ первыя производныя.

Точка, которая въ первомъ мѣстѣ имѣетъ координатами $u+du$, $v+dv$, $w+dw$, имѣетъ во второмъ мѣстѣ координаты $r+dr$, $s+ds$, $t+dt$, а въ третьемъ координаты $\varrho+d\varrho$, $\sigma+d\sigma$, $\tau+d\tau$, и величины dr, ds, dt относятся къ той-же самой точкѣ, какъ и $d\varrho$, $d\sigma$, $d\tau$, но при другомъ положенiи системы.

Въ уравненiяхъ (2) выражается самая общая зависимость, которая можетъ существовать между этими величинами, если только пространство трехъ измѣренiй можетъ быть измѣряемо тремя непрерывно измѣняющимися величинами.

Въ послѣдующемъ я введу обозначенiя:

$$\left.\begin{array}{ll} dr=\varepsilon x & d\varrho=\varepsilon\xi \\ ds=\varepsilon y & d\sigma=\varepsilon\eta \\ dt=\varepsilon z & d\tau=\varepsilon\zeta \end{array}\right\} \quad (2^a)$$

гдѣ ε обозначаетъ безконечно-малую величину. Мы имѣемъ тогда:

$$\left.\begin{array}{l} x=A_0\xi+B_0\eta+C_0\zeta \\ y=A_1\xi+B_1\eta+C_1\zeta \\ z=A_2\xi+B_2\eta+C_2\zeta \end{array}\right\} \quad (2^b)$$

Коеффицiенты A, B, C зависятъ въ этихъ уравненiяхъ отъ трехъ еще оставшихся произвольными постоянныхъ, опредѣляющихъ положенiе системы въ послѣднемъ мѣстѣ; мы обозначимъ эти постоянныя p', p'' и p'''. Если мы измѣнимъ эти постоянныя на безконечно-малыя величины dp', dp'' и dp''', то второе мѣсто системы измѣняется, и вмѣстѣ съ нимъ измѣняются значенiя x, y, z на dx, dy, dz. Обозначая буквою $\mathfrak{v}$ новую перемѣнную, полагая при предположенномъ маломъ перемѣщенiи

$$\mathfrak{A}_n d\mathfrak{v}=\frac{\partial A_n}{\partial p'}dp'+\frac{\partial A_n}{\partial p''}dp''+\frac{\partial A_n}{\partial p'''}dp''' \qquad (3)$$

и придавая буквамъ $\mathfrak{B}_n$ и $\mathfrak{C}_n$ соотвѣтствующія значенія, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\bar{v}}&=\mathfrak{A}_0\xi+\mathfrak{B}_0\eta+\mathfrak{C}_0\zeta\\ \frac{dy}{d\bar{v}}&=\mathfrak{A}_1\xi+\mathfrak{B}_1\eta+\mathfrak{C}_1\zeta\\ \frac{dz}{d\bar{v}}&=\mathfrak{A}_2\xi+\mathfrak{B}_2\eta+\mathfrak{C}_2\zeta\end{aligned}\right\}\quad(3^a)$$

Выражая въ этихъ уравненіяхъ ξ, η, ζ изъ уравненій (1) и (1^a) и (2^a) линейно посредствомъ x, y, z, чего можемъ всегда достигнуть на основаніи сказаннаго, мы получаемъ выраженія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\bar{v}}&=a_0x+b_0y+c_0z\\ \frac{dy}{d\bar{v}}&=a_1x+b_1y+c_1z\\ \frac{dz}{d\bar{v}}&=a_2x+b_2y+c_2z\end{aligned}\right\}\quad(3^b)$$

Такъ какъ каждая изъ величинъ a, b, c заключаетъ три произвольно измѣняющіяся величины dp', dp'', dp''', то можетъ существовать безконечное множество такихъ системъ преобразованій. Но между коэффиціентами четырехъ изъ нихъ всегда будетъ существовать система линейныхъ уравненій вида:

$$\begin{aligned}a_n&=fa'_n+ga''_n+ha_n'''\\ b_p&=fb'_p+gb_p''+hb_p'''\\ c_q&=fc'_q+gc_q''+hc_q''',\end{aligned}$$

въ которой f, g, h суть постоянныя величины, а n, p, q— какіе-либо изъ указателей 0, 1, 2: система эта получается путемъ исключенія dp', dp'', dp'''. Если системы a'_0 и т. д., a_0'' и т. д., a_0''' и т. д. таковы, что между ихъ коэффиціентами не существуетъ системы уравненій, подобной только-что написанной, то каждая другая система, соотвѣтствующая возможному движенію, выражается линейно посредствомъ коэффиціентовъ a', a'', a''' и т. п., и обратно каждая сумма, имѣющая форму предыдущихъ выраженій для a_n, b_p, c_q съ произвольными постоянными f, g, h будетъ соотвѣтствовать возможному движенію. Другое опредѣленіе различныхъ движеній этого рода дается тѣмъ, что, по предложенію III, послѣ того какъ закрѣплена одна точка, еще одна точка можетъ считаться неподвижною; тѣмъ не менѣе движеніе остается возможнымъ. Мы должны имѣть возможность поэтому такъ измѣнять dp', dp'', dp''', чтобы для произвольно заданныхъ значеній x_0, y_0, z_0 имѣли мѣсто уравненія:

$$0 = a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 z_0$$
$$0 = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0$$
$$0 = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0.$$

Но это можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если для всѣхъ безконечно-малыхъ вращеній системы удовлетворяется условіе, что опредѣлитель, составленный изъ коеффиціентовъ:

$$\begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4).$$

Послѣ перваго безконечно-малаго перемѣщенія, переводящаго $\bar{v}$ въ $\bar{v} + d\bar{v}$, x въ $x + dx$, y въ $y + dy$ и z въ $z + dz$, можемъ произвести другое того-же вида и той-же величины. Называя систему въ первомъ мѣстѣ A_1, во второмъ A_2, и предполагая оба положенія существующими одновременно, мы увидимъ, что точки $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ въ A_1 совмѣщаются съ тѣми точками A_2, которыя имѣли первоначально мѣсто $(x,\ y,\ z)$. Если теперь съ A_1 произведемъ то перемѣщеніе, посредствомъ котораго система первоначально перешла въ A_1, то A_2 перейдетъ въ A_3; мы можемъ считать что $\bar{v}$ измѣнилось при этомъ въ $\bar{v} + 2d\bar{v}$, а коеффиціенты a, b, c независятъ отъ $\bar{v}$. При этомъ, на основаніи заключительнаго положенія въ допущеніи III, точки, имѣвшія при первомъ перемѣщеніи координаты x, y, z, получаютъ теперь то положеніе, которое при первомъ перемѣщеніи заняли точки съ координатами $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Это разсужденіе мы можемъ повторять сколько угодно разъ.

При каждомъ такомъ перемѣщеніи точки съ координатами $(x,\ y,\ z)$ будутъ переходить соотвѣтственно уравненіямъ (3^b) въ $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$, какъ и въ первый разъ. Продолжая непрерывно эти перемѣщенія, мы найдемъ, что коеффиціенты a, b, c уравненій (3^b) остаются постоянными, между тѣмъ какъ $\bar{v}$ растетъ пропорціонально времени; x, y, z, если ихъ отнести къ опредѣленной точкѣ подвижной системы будутъ измѣняться, какъ указываютъ уравненія (3^b), причемъ $\frac{dx}{d\bar{v}}$, $\frac{dy}{d\bar{v}}$, $\frac{dz}{d\bar{v}}$ должны быть разсматриваемы какъ производныя.

Чтобы произвести интегрированіе уравненій (3^b), мы отыскиваемъ четыре новыхъ постоянныхъ посредствомъ слѣдующихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} lh &= la_0 + ma_1 + na_2 \\ mh &= lb_0 + mb_1 + nb_2 \\ nh &= lc_0 + mc_1 + nc_2 \end{aligned}\right\} \tag{4^a}$$

Исключеніе изъ этихъ уравненій l, m, n даетъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_0-h, & a_1, & a_2 \\ b_0, & b_1-h, & b_2 \\ c_0, & c_1, & c_2-h, \end{vmatrix} = 0. \tag{4^b}$$

Это уравненіе третьей степени относительно h имѣетъ три корня; каждый изъ нихъ, будучи вставленъ въ уравненія (4^a), доставляетъ систему значеній для l, m, n, причемъ одна изъ этихъ постоянныхъ остается произвольною.

Если уравненія (4^a) удовлетворены, то изъ уравненія (3^b) вытекаетъ:

$$\frac{d}{d\bar{v}}\left\{lx+my+nz\right\} = h\left\{lx+my+nz\right\} \tag{4^c}$$

или, обозначая буквою A постоянную интегрированія,

$$lx+my+nz = Ae^{h\bar{v}}; \tag{5}$$

конечно уравненія (4^c) и (5) имѣютъ мѣсто для каждой изъ трехъ системъ значеній, доставляемыхъ уравненіями (4^a) и (4^b).

Вслѣдствіе уравненія (4) одно изъ значеній h должно равняться нулю. Для него имѣемъ:

$$l_0x + m_0y + n_0z = const. \tag{5^a}$$

Два другихъ h_1 и h_2 могутъ быть вещественныя или сопряженно комплексныя величины. Въ первомъ случаѣ и соотвѣтствующія l, m, n—вещественны, во второмъ—комплексны.

Если оба корня h_1 и h_2 вещественны, то изъ уравненій формы (5) слѣдуетъ, что соотвѣтствующія величины

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z \text{ и } l_2 x + m_2 y + n_2 z$$

могутъ измѣняться непрерывно отъ 0 до $\pm\infty$, но безъ обратнаго движенія (Umkehr) или скачка онѣ не могутъ возвратиться къ прежнему положенію, какъ того требуетъ постулатумъ IV; поэтому и x, y, z не могутъ снова принять тѣхъже значеній. То-же самое имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, если h_1 и h_2 равны по значенію. При этомъ получается одна линейная функція x, y, z равная $e^{h\bar{v}}$ и другая, равная $\bar{v}e^{h\bar{v}}$. Тоже самое имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, если h_1 и h_2 одновременно исчезаютъ. Тогда можно составить три линейныхъ функціи, изъ которыхъ одна постоянна, другая равна $\bar{v}$ и третья равна $\bar{v}^2$.

Если h_1 и h_2 имѣютъ напротивъ комплексныя значенія, то то-же самое имѣетъ мѣсто для соотвѣтствующихъ l, m, n. Полагая тогда:

$$\begin{aligned} h_1 &= \vartheta + \omega i & h_2 &= \vartheta - \omega i \\ l_1 &= \lambda_0 + \lambda_1 i & l_2 &= \lambda_0 - \lambda_1 i \\ m_1 &= \mu_0 + \mu_1 i & m_2 &= \mu_0 - \mu_1 i \\ n_1 &= \nu_0 + \nu_1 i & n_2 &= \nu_0 - \nu_1 i \end{aligned}$$

будемъ имѣть:

$$\lambda x + \mu_0 y + \nu_0 z = Ae^{\vartheta\bar{v}} cos(\omega\bar{v} + c)$$

$$\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z = Ae^{\vartheta\bar{v}} sin(\omega\bar{v} + c).$$

Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ

$$(\lambda_0 x + \mu_0 y + \nu_0 z)^2 + (\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z)^2 = A^2 e^{2\vartheta\bar{v}}. \qquad (5^b)$$

Это уравненіе также не допускаетъ, чтобы x, y, z безъ обратнаго движенія и скачка возвращались къ старымъ значеніямъ, если только ϑ не равно нулю.

Итакъ постулатумъ (IV) можетъ быть удовлетворенъ только въ томъ случаѣ, если корни уравненія (4^b), не равные нулю, дѣлаются чисто мнимыми. На основаніи уравненій (4^b) это имѣетъ мѣсто, если

$$a_0 + b_1 + c_2 = 0. \qquad (6)$$

Мы имѣемъ такимъ образомъ окончательно для опредѣленія x, y, z какъ функцій отъ $\bar{v}$ три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} l_0 x + m_0 y + n_0 z &= const \\ \lambda_0 x + \mu_0 y + \nu_0 z &= A\cos(\omega\bar{v} + c) \\ \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z &= A\sin(\omega\bar{v} + c) \end{aligned}\right\} \qquad (6^a)$$

Опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} l_0, & m_0, & n_0 \\ \lambda_0, & \mu_0, & \nu_0 \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{vmatrix}$$

можетъ равняться нулю только въ томъ случаѣ, если существуетъ уравненіе, опредѣляющее $\bar{v}$, какъ постоянную величину т. е. если не существуетъ движенія. Слѣдовательно величины x, y, z могутъ быть изъ трехъ уравненій (6^a) однозначно опредѣлены, какъ функціи $\bar{v}$.

Вычисленіе значительно упрощается, если мы введемъ вмѣсто величинъ x, y, z три выше найденныя:

$$\left.\begin{aligned} X &= l_0 x + m_0 y + n_0 z \\ Y &= \lambda_0 x + \mu_0 y + \nu_0 z \\ Z &= \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z \end{aligned}\right\} \qquad (6^b)$$

Обратно изъ нихъ всегда могутъ быть выведены однозначно x, y, z.

Мы изслѣдовали до сихъ поръ одинъ родъ вращенія, при которомъ должна остаться неподвижною точка x_0, y_0, z_0. Но на основаніи (6^a) при изслѣдуемомъ движеніи

$$\frac{dX}{d\bar{v}} = 0, \quad \frac{dY}{d\bar{v}} = -\omega Z, \quad \frac{dZ}{d\bar{v}} = \omega Y \qquad (6^c)$$

Двѣ послѣднія величины равны слѣдовательно нулю для тѣхъ точекъ, для которыхъ $Y = Z = 0$. Эти точки и остаются въ покоѣ при разсмотрѣнномъ движеніи.

§ 3.

Мы должны теперь изслѣдовать другіе виды вращенія системы. Какъ и было выше замѣчено, мы можемъ во время вращенія считать неподвижною каждую другую точку системы.

Разсматривая второе вращеніе, при которомъ остаются въ покоѣ точки $X=Z=0$ и называя перемѣнную возрастающую пропорціонально времени ϑ', мы можемъ писать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{d\vartheta'} &= \alpha_0 X + 0 + \gamma_0 Z \\ \frac{dY}{d\vartheta'} &= \alpha_1 X + 0 + \gamma_1 Z \\ \frac{dZ}{d\vartheta'} &= \alpha_2 X + 0 + \gamma_2 Z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Средній столбецъ коэффиціентовъ долженъ быть равенъ нулю такъ какъ для $X=Z=0$ производныя, стоящія въ лѣвой части, должны обращаться въ нуль.

Оба условныя уравненія (4) и (6), которымъ должна быть подчинена всякая система коэффиціентовъ, если вращенія должны быть замкнутыми, приводятся теперь къ

$$\alpha_0 + \gamma_2 = 0. \tag{7^a}$$

Въ третьемъ вращеніи пусть остаются на мѣстѣ тѣ точки, для которыхъ $X=Y=0$. Если перемѣнная, растущая пропорціонально времени, есть ϑ'', то мы можемъ писать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{d\vartheta''} &= \mathfrak{a}_0 X + \mathfrak{b}_0 Y + 0 \\ \frac{dY}{d\vartheta''} &= \mathfrak{a}_1 X + \mathfrak{b}_1 Y + 0 \\ \frac{dZ}{d\vartheta''} &= \mathfrak{a}_2 X + \mathfrak{b}_2 Y + 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

при условіи $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_1 = 0$.

Изъ формы коэффиціентовъ, данной уравненіемъ (3), вытекаетъ, какъ уже и было выше замѣчено, что если двѣ системы коэффиціентовъ удовлетворяютъ условіямъ задачи, то и суммы соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ должны составлять систему, удовлетворяющую этимъ условіямъ.

Примѣняя это къ (6^c) и (7), мы имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & 0, & \gamma_0 \\ \alpha_1, & 0, & \gamma_1 - \omega \\ \alpha_2, & \omega, & -\alpha_0 \end{vmatrix} = 0$$

или $\alpha_0 \omega^2 - \omega(\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0) = 0$.

Такъ какъ коэффиціенты каждой изъ этихъ системъ заключаютъ произвольную постоянную въ видѣ множителя, то мы должны имѣть отдѣльно: $\alpha_0=0$ и также $\gamma_2=0$, далѣе $\alpha_1\gamma_0=0$.

Но γ_0 не можетъ равняться нулю, если мы не хотимъ противорѣчить постулатуму IV; ибо въ случаѣ $\gamma_0=0$ изъ уравненій (1) слѣдуетъ

$$\frac{dX}{d\bar{v}'}=0 \text{ т. е. } X=C,$$

$$Z=\alpha_2 C\bar{v}'+C'$$

$$Y=\alpha_1 C\bar{v}'+\gamma_1 C'\bar{v}'+\frac{1}{2}\alpha_2\gamma_1 C\bar{v}'^2+C'',$$

гдѣ C, C' и C'' суть постоянныя величины. Такія уравненія представляли-бы не замыкающееся вращеніе.

По этой-же причинѣ α_2 не можетъ равняться нулю.

Такъ какъ γ_0 не можетъ быть равно нулю, то уравненіе $\alpha_1\gamma_0=0$ удовлетворяется, только полагая $\alpha_1=0$; система коэффиціентовъ уравненій (7) приводится поэтому къ

$$\begin{matrix} 0, & 0, & \gamma_0 \\ 0, & 0, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & 0, & 0. \end{matrix}$$

Тѣмъ-же самымъ путемъ получаемъ для системы коэффиціентовъ уравненій (8):

$$\mathfrak{a}_0=\mathfrak{b}_1=0$$
$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_0=0.$$

Здѣсь $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}_0$ не могутъ быть нулями по той-же причинѣ, какъ α_2 и γ_0. Слѣдовательно $\mathfrak{a}_2=0$, и система приводится къ

$$\begin{matrix} 0, & \mathfrak{b}_0, & 0 \\ \mathfrak{a}_1, & 0, & 0 \\ 0, & \mathfrak{b}_2, & 0. \end{matrix}$$

Наконецъ, составляя сумму всѣхъ трехъ системъ, получаемъ условіе:

$$\begin{vmatrix} 0, & \mathfrak{b}_0, & \gamma_0 \\ \mathfrak{a}_1, & 0, & \gamma_1-\omega \\ \alpha_2, & \mathfrak{b}_2+\omega, & 0 \end{vmatrix}=0$$

или $$\mathfrak{b}_0(\gamma_1 - \omega)\alpha_2 + \gamma_0\mathfrak{a}_1(\mathfrak{b}_2 + \omega) = 0. \tag{9}$$

Такъ какъ это уравненіе должно имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если коеффиціенты, принадлежащіе одной и той-же системѣ, умножаются на произвольную постоянную, то отдѣльно:

$$\gamma_0\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_0\alpha_2 = 0 \tag{9^a}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_0\gamma_1\alpha_2 &= 0 \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\gamma_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9^b}$$

Но такъ какъ ни $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{a}_1$, ни α_2 и γ_0 не могутъ обращаться въ нуль, то

$$\gamma_1 = 0 \text{ и } \mathfrak{b}_2 = 0.$$

Полагая $\alpha_2 = -\varphi$, $\gamma_0 = \varkappa\varphi$, $\mathfrak{a}_1 = \psi$, имѣемъ изъ уравненія (9^a) $\mathfrak{b}_0 = -\varkappa\psi$.

Отсюда мы получаемъ окончательно полную систему возможныхъ преобразованій въ случаѣ безконечно-малыхъ перемѣщеній:

$$\left.\begin{aligned} dX &= -\varkappa\psi Y d\bar{v}'' + \varkappa\varphi Z d\bar{v}' \\ dY &= \psi X d\bar{v}'' - \omega Z d\bar{v} \\ dZ &= -\varphi X d\bar{v}' + Y d\bar{v}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Эта система заключаетъ три произвольныя перемѣнныя величины $d\bar{v}$, $d\bar{v}'$, $d\bar{v}''$ и должна поэтому включать всѣ возможныя вращенія.

Величина $\varkappa$ должна быть положительна, если система даетъ только мнимыя значенія для h.

Изъ уравненія (10) слѣдуетъ, что при каждомъ произвольно-маломъ вращеніи системы:

$$\frac{1}{\varkappa} XdX + YdY + ZdZ = 0$$

т. е. $$X^2 + \varkappa Y^2 + \varkappa Z^2 = const.$$

Выражая X, Y, Z съ помощью уравненій (6^b) и (2^a) посредствомъ dr, ds, dt и полагая:

$$\begin{aligned} dS^2 = (l_0 dr + m_0 ds + n_0 dt)^2 &+ \\ \varkappa(\lambda_0 dr + \mu_0 ds + \nu_0 dt)^2 &+ \\ \varkappa(\lambda_1 dr + \mu_1 ds + \nu_1 dt)^2 & \end{aligned}$$

находимъ, что dS есть величина, остающаяся неизмѣнною при всѣхъ вращеніяхъ неизмѣняемой системы около точки: $dr = ds = dt = 0$ и имѣющая измѣренія дифференціаловъ dr, ds, dt.

Эта величина можетъ быть поэтому разсматриваема, какъ независящая отъ вращательныхъ движеній мѣра пространственнаго различія точекъ (r, s, t) и $(r+dr, s+ds, t+dt)$.

§ 4.

Такимъ образомъ мы пришли къ исходному пункту изслѣдованій Римана, показавъ, что существуетъ однородное выраженіе второй степени отъ дифференціаловъ, которое остается неизмѣннымъ при каждомъ движеніи двухъ неподвижно соединенныхъ между собою безконечно-близкихъ точекъ. Такъ какъ мы примѣнили выше данныя аксіомы II и IV, выражающія возможность совмѣщенія между различными частями пространства, только къ безконечно-малымъ элементамъ пространства, то обнаруживается, что допущеніе Римана тожественно съ допущеніемъ, что пространство монодромно, и что безконечно малые элементы пространства, вообще говоря, совмѣстимы, если не обращается вниманіе на ихъ границы. Смыслъ этого предложенія сдѣлается яснѣе, если мы ограничимъ его двумя измѣреніями. Изъ допущенія Римана слѣдуетъ въ этомъ случаѣ, что способы измѣренія пространства совпадаютъ съ тѣми, которые учитъ примѣнять наша аналитическая геометрія на произвольной кривой поверхности. Дѣйствительно безконечно-малые поверхностные элементы произвольной кривой поверхности могутъ быть разсматриваемы, какъ плоскіе и совпадающіе между собою, если не обращать вниманія на ихъ очертанія.

Дальнѣйшее изслѣдованіе относится къ вопросу о слѣдствіяхъ, которыя вытекаютъ изъ допущенія, согласно постулату III, совмѣстимости конечныхъ частей пространства независимо отъ границы и при всѣхъ возможныхъ вращеніяхъ. Какъ въ этомъ случаѣ для двухъ измѣреній кривая поверхность должна превратиться въ поверхность шара (*) или въ поверхность, происходящую изъ нея сгибаніемъ безъ растяженія, такъ и для случая трехъ и большаго числа измѣреній Риманъ показалъ, что величина, называемая имъ мѣрою кривизны, должна быть постоянною. Я не буду излагать здѣсь эту часть моего изслѣдованія, заключающуюся неявнымъ образомъ въ изслѣдованіи Римана.

(*) [1882] или псевдосферы.

Мой результатъ заключается въ слѣдующемъ.

Предполагая, что выполнены наши допущенія I—IV, самая общая система геометріи будетъ та, которая получилась бы по правиламъ нашей обыкновенной аналитической геометріи, примѣненной къ шароподобному пространству (*) трехъ измѣреній, котораго уравненіе въ четырехъ прямоугольныхъ координатахъ можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$X^2+Y^2+Z^2+(S+R)^2=R^2.$$

Здѣсь X, Y, Z могутъ сдѣлаться безконечно большими только при $R=\infty$. Этотъ послѣдній частный случай соотвѣтствуетъ нашей дѣйствительной геометріи, основанной на аксіомахъ Евклида. При этомъ X, Y, Z могутъ имѣть только тогда конечныя значенія, когда $S=0$; уравненіе $S=0$ есть уравненіе плоскаго образа. Въ виду этого мы должны считать, вмѣстѣ съ Риманномъ, Евклидово пространство по отношенію къ пространствамъ большаго числа измѣреній—плоскимъ пространствомъ.

Наконецъ замѣчу еще, что, отбрасывая постулатъ IV, получаемъ системы геометріи, совершенно отличныя отъ нашей, но которыя могутъ быть однако проведены вполнѣ послѣдовательно. Легче всего это можно показать для двухъ координатъ. Если-бы величина ϑ уравненія (5^b) не равнялась нулю, то линейныя измѣренія каждой плоской фигуры возрастали бы въ постоянномъ отношеніи при вращеніи на постоянный уголъ въ одномъ и томъ-же направленіи; геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, физически равноотстоящихъ отъ нѣкоторой данной точки, будетъ въ этомъ случаѣ спираль.

Другой легко изучаемый примѣръ получается, если въ аналитической геометріи плоскости при прямоугольныхъ координатахъ разсматривать координаты y мнимыми. Это соотвѣтствуетъ предположенію, что h_1 и h_2 вещественны, а

$$h_1+h_2=0.$$

Мѣсто точекъ равноотстоящихъ отъ неподвижной точки была-бы тогда равностороняя гипербола.

Изслѣдованія Риманна и мои, вмѣстѣ взятыя, показываютъ такимъ образомъ, что выше данные постулатумы въ соединеніи съ слѣдующими двумя положеніями:

V. Пространство имѣетъ три измѣренія,

(*) Или псевдосферическому.

VI. **Пространство безконечно протяженно**

составляютъ достаточное основаніе для развитія ученія о пространствѣ (*). Я уже указалъ, что эти постулатумы должны быть предполагаемы и обыкновенною геометріею, хотя и не упоминаются ею; наши постулатумы допускаютъ такимъ образомъ менѣе, чѣмъ предполагается обыкновенно геометрическими доказательствами.

Вмѣстѣ съ тѣмъ нельзя не обратить вниманія на то, что вся возможность системы нашихъ пространственныхъ измѣреній зависитъ, какъ показываетъ предъидущее изложеніе, отъ существованія такихъ тѣлъ природы, которыя достаточно близко подходятъ подъ наше понятіе о твердыхъ тѣлахъ. Независимость совмѣстимости отъ положенія и направленія совмѣщающихся пространственныхъ формъ и отъ пути, которымъ они приведены къ совпаденію, есть тотъ фактъ, на которомъ основывается возможность измѣренія пространства.

(*) Они не раздѣляютъ геометріи Евклида отъ геометріи Лобачевскаго.

ЗАМѢЧАНІЯ НА РАБОТУ ГЕЛЬМГОЛЬЦА:

„О ФАКТАХЪ, ЛЕЖАЩИХЪ ВЪ ОСНОВАНІИ ГЕОМЕТРІИ"

СОФУСА ЛИ [1]).

Переводъ Д. М. Синцова.

Знаменитая работа Гельмгольца „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" разсматриваетъ задачу, стоящую въ тѣснѣйшей связи съ новой теоріей группъ преобразованій. Побуждаемый Клейномъ, я поэтому рѣшился примѣнить къ этой важной, хотя и частной задачѣ методы моей теоріи преобразованій. При этомъ я пришелъ къ убѣжденію, что прокладывающія новые пути изслѣдованія Гельмгольца еще не могутъ быть считаемы послѣднимъ словомъ по этому вопросу.

Именно, во 1-хъ дедукція Гельмгольца содержитъ въ себѣ пробѣлъ, который впрочемъ не оказываетъ никакого вліянія на конечный результатъ,—по крайней мѣрѣ для трехъ измѣреній; мнѣ однако не удалось заполнить этотъ пробѣлъ тѣми-же простыми аналитическими средствами, которыми обходится Гельмгольцъ въ своей работѣ.

Съ другой стороны, мнѣ кажется, я доказалъ, что въ пространствахъ трехъ измѣреній аксіома монодроміи, играющая такую большую роль у Гельмгольца, излишня, если истолковать надлежащимъ образомъ его аксіому свободной подвижности.

---

[1]) Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.—physik. Classe. Bd. 38. 1886.

Наконецъ я считаю цѣлесообразнымъ замѣнить Гельмгольцевы аксіомы другими, которыя представляются мнѣ болѣе простыми.

Во всякомъ случаѣ изслѣдованія, которыя привели меня къ этимъ результатамъ, въ сравненіи съ Гельмгольцевыми представляются кропотливыми и требуютъ болѣе длиннаго счета. По этому я ограничусь здѣсь тѣмъ, что изложу нѣсколько обстоятельнѣе выше указанные свои результаты, чтобы сдѣлать возможно яснымъ ихъ значеніе. При этомъ я точно также буду держаться пространства трехъ измѣреній.

Всѣ движенія Евклидова или неевклидова пространства трехъ измѣреній изображаются тремя уравненіями преобразованій:

$$(1) \begin{cases} x_1 = f(x,y,z,a_1,a_2 \ldots) \\ y_1 = \varphi(x,y,z,a_1,a_2 \ldots) \\ z_1 = \psi(x,y,z,a_1,a_2 \ldots) \end{cases}$$

гдѣ a_1, a_2,... суть параметры. Если дадимъ этимъ параметрамъ опредѣленныя значенія, то получимъ опредѣленное движеніе, при которомъ каждая точка xyz занимаетъ новое положеніе $x_1y_1z_1$. Если, напр., мы находимся въ Евклидовомъ пространствѣ и считаемъ xyz за декартовы координаты, то три функціи f,φ и ψ линейны относительно x,y,z. Если же возьмемъ другую систему координатъ, то аналитическое выраженіе для движеній Евклидова пространства получаетъ вообще нелинейную форму.

Задача, которую поставилъ себѣ Гельмгольцъ въ цитированной работѣ, въ существенныхъ чертахъ слѣдующая. Онъ ищетъ такія свойства аналитическаго выраженія движеній, которыя не зависятъ отъ выбора координатъ и характеризуютъ эту совокупность преобразованій возможно простымъ образомъ. Свойства, выбранныя Гельмгольцемъ, которыя присущи какъ Евклидову, такъ и неевклидову пространству, могутъ быть, по моему мнѣнію, резюмированы слѣдующимъ образомъ.

Во 1-ыхъ: функціи f,φ и ψ, являющіяся въ соотвѣтствующихъ уравненіяхъ преобразованія, суть аналитическія функціи ихъ аргументовъ.

Во 2-ыхъ: двѣ точки $x_1y_1z_1$ и $x_2y_2z_2$ имѣютъ по отношенію къ каждому движенію инваріантъ

$$\Omega(x_1y_1z;\ x_2y_2z_2),$$

ихъ разстояніе по обычному выраженію. Въ Евклидовомъ пространствѣ при употребленіи декартовыхъ координатъ этотъ инваріантъ имѣетъ, какъ извѣстно, форму

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Какъ *3-е* свойство, Гельмгольцъ выбираетъ свободную подвижность соотвѣтствующаго пространства, которой онъ даетъ такое опредѣленіе. Каждая точка пространства можетъ перейти въ каждую другую точку пространства. Если закрѣпимъ точку $x_1y_1z_1$, то всякая другая точка $x_2y_2z_2$ можетъ еще занимать всѣ положенія xyz, которыя удовлетворяютъ *одному* уравненію именно:

$$\Omega(x\,y\,z\,x_1y_1z_1)=\Omega(x_2y_2z_2x_1y_1z_1)$$

Если удерживаются неподвижными двѣ точки $x_1y_1z_1$ и $x_2y_2z_2$, то всякая третья точка $x_3y_3z_3$ можетъ еще занимать всѣ положенія, опредѣляемыя двумя уравненіями

$$\Omega(x\,y\,z\,x_1y_1z_1)=\Omega(x_3y_3z_3x_1y_1z_1)$$
$$\Omega(x\,y\,z\,x_2y_2z_2)=\Omega(x_3y_3z_3x_2y_2z_2).$$

Если наконецъ три точки закрѣплены, то возможныя положенія четвертой опредѣляются тремя подобными уравненіями. Въ этомъ случаѣ всѣ точки пространства остаются неподвижными, —за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда третья точка $x_3y_3z_3$ занимаетъ особенное положеніе въ отношеніи первыхъ двухъ.

Наконецъ *въ 4-ыхъ* Гельмгольцъ совершенно опредѣленно приписываетъ пространству еще слѣдующее свойство: если твердое тѣло вращать, не мѣняя направленія вращенія, около двухъ точекъ, остающихся въ покоѣ, то это вращеніе приводитъ его наконецъ въ начальное положеніе.

Гельмгольцъ опредѣленно утверждаетъ, что это послѣднее свойство—монодромія пространства n измѣреній—не есть слѣдствіе трехъ выше названныхъ; но кромѣ случая n=2, онъ не даетъ доказательствъ своего утвержденія.

Чтобы доказать теперь, что четыре имъ установленныя свойства характеристичны для Евклидовыхъ и неевклидовыхъ движеній, Гельмгольцъ старается вообще опредѣлить всѣ системы уравненій преобразованія, которыя обладаютъ этими свойствами. Какъ я уже сказалъ выше, мнѣ кажется, что выполненіе имъ этого опредѣленія содержитъ пробѣлъ. Именно, если удерживаемъ неподвижно одну точку произвольно лежащую, то, какъ показываетъ Гельмгольцъ, возможно еще безконечно-много безконечно-малыхъ движеній, т. е. преобразованій. Каждое такое движеніе, если неподвижную точку взять за начало координатъ, можетъ быть опредѣлено уравненіями такого вида:

$$\frac{dx}{d\eta}=a_0x+b_0y+c_0z+\ldots$$

$$\frac{dy}{d\eta}=a_1x+b_1y+c_1z+\ldots$$

$$\frac{dz}{d\eta}=a_2x+b_2y+c_2z+\ldots$$

Правыя части суть при этомъ безконечныя строки, расположенныя по возрастающимъ степенямъ xyz. Теперь a priori легко представить себѣ, что между представленными такимъ образомъ безконечно-малыми движеніями существуютъ такія, въ разложеніяхъ которыхъ совершенно отсутствуютъ члены перваго порядка, и въ особенности можетъ это представиться при всѣхъ тѣхъ движеніяхъ около неподвижной точки, при которыхъ остается неизмѣнною еще и сосѣдняя точка. При такихъ безконечныхъ малыхъ движеніяхъ оставались бы въ покоѣ и всѣ точки безконечно-близкія къ началу координатъ, если пренебрегать величинами безконечно-малыми второго порядка. Эта возможность, по моему мнѣнію, Гельмгольцемъ во всякомъ случаѣ недостаточно принята во вниманіе. Я могъ бы поэтому спросить, дѣйствительно ли такъ само собою понятно, что коэффиціенты $a_ib_ic_i$ не могутъ одновременно уничтожаться, если наши уравненія преобразованій обладаютъ соотвѣтственно выше указанными свойствами?

Мое второе замѣчаніе относится къ аксіомѣ монодроміи. Здѣсь я долженъ прежде всего поставить на видъ, что такія уравненія преобразованій, которыя удовлетворяютъ тремъ первымъ Гельмгольцевымъ аксіомамъ, необходимо образуютъ непрерывную группу. Понятіе группы не выступаетъ однако у Гельмгольца явнымъ образомъ, а между тѣмъ именно свойство составлять группу является въ высшей степени важнымъ для уравненій преобразованій; это свойство само по себѣ уже значительно ограничиваетъ возможные случаи.

Чтобы различить теперь, будетъ ли монодромія слѣдствіемъ трехъ первыхъ свойствъ, нужно прежде всего съ большею точностью опредѣлить свойство свободной подвижности. Именно, или можно удовольствоваться требованіемъ, чтобы свободная подвижность имѣла мѣсто для точекъ, произвольно расположенныхъ одна относительно другой; или же можно поставить требованіе, идущее далѣе, чтобы свободная подвижность внутри извѣстной области имѣла мѣсто безъ исключенія.

Гельмгольцъ хотѣлъ, по всей вѣроятности,—судя по буквальному смыслу его изложенія,—чтобы его требованіе свободной подвижности было выполнено внутри извѣстной области безъ исключеній. Не смотря на это, мнѣ казалось цѣлесообразнымъ попробовать положить въ основу предположеніе, что свободная подвижность имѣетъ мѣсто только для точекъ произвольнаго взаимнаго положенія. Въ этомъ предположеніи я и опредѣлилъ всѣ группы уравненій преобразованій, которыя удовлетворяютъ тремъ первымъ изъ выше установленныхъ требованій.

Кромѣ группъ Евклидовыхъ и неевклидовыхъ движеній оказалось еще нѣсколько различныхъ группъ, изъ которыхъ двѣ [1]) содержатъ даже каждая параметръ. Но эти добавочныя группы, не удовлетворяютъ требованію свободной подвижности, если это требованіе распространимъ на всѣ точки произвольно малой области. Въ каждой изъ этихъ группъ пространство разлагается на систему ∞^2 кривыхъ, которыхъ совокупность остается неизмѣнною при преобразованіяхъ группы, между тѣмъ какъ отдѣльныя кривыя перемѣняются между собою. Но болѣе того. *Если закрѣпимъ одну точку пространства, то останется въ покоѣ не только проходящая черезъ точку кривая этой системы, но и каждая отдѣльная точка соотвѣтственной кривой.* Въ другомъ мѣстѣ я остановлюсь на этомъ подробнѣе. Можетъ быть, можно спорить о томъ, будетъ ли монодромія слѣдствіемъ трехъ первыхъ аксіомъ или нѣтъ. Она будетъ непремѣнно слѣдствіемъ, если въ аксіому свободной подвижности вставимъ опредѣленно, что ∞^3 точекъ пространства не могутъ быть такъ раздѣлены на ∞^2 системъ, что всѣ ∞^1 точекъ такой системы всегда одновременно остаются въ покоѣ.

Перехожу теперь къ *третьему* своему *замѣчанію, которому придаю главное значеніе.* Мнѣ удалось и при томъ довольно простыми соображеніями доказать, что уравненія Евклидовыхъ и неевклидовыхъ движеній пространства трехъ измѣреній могутъ быть характеризованы слѣдующимъ простымъ образомъ:

1°. Они опредѣляютъ непрерывную группу преобразованій пространства трехъ измѣреній.

---

[1]) Обѣ группы, о которыхъ говорится въ текстѣ, подобны впрочемъ одна другой чрезъ посредство воображаемаго преобразованія. Прим. авт.

2°. Въ этой группѣ свободная подвижность существуетъ въ слѣдующемъ смыслѣ: если внутри извѣстной области закрѣпимъ произвольную точку и въ тоже время произвольный черезъ нее проходящій линейный элементъ, то все еще возможно непрерывное движеніе. Если же закрѣпляемъ не только точку и проходящій черезъ нее линейный элементъ, но въ тоже время и элементъ плоскости, который проходитъ какъ черезъ точку, такъ и чрезъ линейный элементъ, то болѣе не возможно уже никакое непрерывное движеніе.

Мнѣ удалось, по моему мнѣнію, строго, хотя и не совсѣмъ кратко доказать и для пространствъ болѣе, чѣмъ трехъ измѣреній, что совокупность Евклидовыхъ и неевклидовыхъ движеній можетъ быть характеризована совершенно аналогичнымъ образомъ.

Въ предыдущемъ изложеніи я принялъ, что уравненія преобразованія (1) суть *аналитическія* относительно входящихъ перемѣнныхъ. Если это предположеніе отбросить и предположить только, что соотвѣтствующія функціи непрерывны и имѣютъ извѣстное конечное число производныхъ, то методъ, который былъ мною примѣненъ при разборѣ Гельмгольцевыхъ аксіомъ, уже не примѣнимъ. Въ этомъ случаѣ я не рѣшаюсь поэтому утверждать, что указанный пробѣлъ въ дедукціи Гельмгольца остается безъ вліянія на результатъ, и еще того менѣе,—что его аксіома монодроміи есть слѣдствіе другихъ его аксіомъ.

Положивъ обѣ свои аксіомы въ основу, я могу, какъ мнѣ думается, строго доказать, что соотвѣтствующая группа и въ этомъ случаѣ оставляетъ неизмѣняемымъ квадратичное выраженіе

$$\Sigma_{ik} f_{ik} dx_i dx_k \;,$$

такъ что элементъ дуги въ Римановомъ смыслѣ продолжаетъ существовать.

ОБЪ ОСНОВНЫХЪ ГИПОТЕЗАХЪ ГЕОМЕТРІИ.

Г. ПУАНКАРЕ [1].

Переводъ Д. М. Синцова.

Въ логикѣ изъ ничего нельзя и вывести ничего; въ каждомъ доказательствѣ заключеніе предполагаетъ извѣстныя посылки. Поэтому математическія науки должны опираться на извѣстное число положеній, не могущихъ быть доказанными. Можетъ идти рѣчь о томъ, давать ли этимъ положеніямъ названіе *аксіомъ*, *гипотезъ* или *постулатовъ*, должно ли ихъ разсматривать какъ факты, получаемые изъ опыта, или какъ сужденія аналитическія, или наконецъ какъ сужденія синтетическія, апріорныя; но самое существованіе ихъ несомнѣнно.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ задачѣ, интересной съ логической стороны: каковы предварительныя допущенія геометріи, положенія, которыя не могутъ быть доказаны и на которыхъ основывается эта наука? мы не считаемъ разумѣется тѣхъ допущеній, которыя уже положены въ основу анализа,—потому что, приступая къ изученію геометріи, мы считаемъ уже извѣстными основы алгебры и чистаго анализа. Хотя эта задача давно уже занимаетъ геометровъ, вопросъ однако нельзя считать исчерпаннымъ.

Установлено, что *постулатъ* Евклида не можетъ быть доказанъ. Но не на одномъ этомъ постулатѣ зиждется геометрія; многіе результаты можно получить, не прибѣгая къ его помощи.

Нельзя удовлетвориться и предложеніями, помѣщаемыми подъ названіемъ *аксіомъ* въ началѣ руководствъ геометріи. Если подвергнуть ихъ внимательному изслѣдованію, то окажется, что ни одна изъ этихъ аксіомъ не должна бы зани-

---

[1]) Bulletin de la société mathématique de France. Tom. XV. № 7. p. 203—216.

мать мѣста среди основныхъ допущеній геометріи. Однѣ изъ этихъ аксіомъ необходимы уже для обоснованія анализа; если это и гипотезы (что можно оспаривать, впрочемъ), то во всякомъ случаѣ это гипотезы не исключительно геометрическія; такова, напр., аксіома: *двѣ величины, равныя одной и той же третьей, равны между собой.* Другія аксіомы суть просто опредѣленія. Наконецъ, третьи нельзя относить къ числу „не могущихъ быть доказанными"; такова напр., слѣдующая: *прямая линія есть кратчайшее растояніе между двумя точками.*

Но кромѣ аксіомъ, указываемыхъ явнымъ образомъ, существуетъ большое число гипотезъ, которыя допускаются неявно при доказательствѣ различныхъ теоремъ.

Эти гипотезы обыкновенно ускользаютъ отъ вниманія читателя, если только оно не будетъ особенно напряженно; потому что предположенія эти хотя и далеко не очевидны съ чисто логической точки зрѣнія, представляются намъ однако очевидными благодаря укоренившимся привычкамъ нашихъ чуствъ и нашего ума.

Впрочемъ эти гипотезы, явныя или не явныя, не всѣ независимы; можно ограничиться введеніемъ меньшаго числа ихъ,—и тогда другія явятся уже какъ слѣдствія.

Задачу нашу можно поэтому формулировать такъ: перечислить всѣ необходимыя гипотезы, и притомъ только необходимыя. Я думаю, что эта задача еще не разрѣшена и потому хочу способствовать ея рѣшенію.

Сначала мы разсмотримъ геометрію двухъ измѣреній, или плоскую геометрію.

Квадратичныя геометріи.

Намъ уже извѣстны три геометріи двухъ измѣреній:

1°. Евклидова геометрія, въ которой сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ;

2°. Геометрія Римана, въ которой эта сумма болѣе двухъ прямыхъ;

3° Геометрія Лобачевскаго, въ которой эта сумма менѣе двухъ прямыхъ.

Эти три геометріи покоятся на однѣхъ и тѣхъ же основныхъ гипотезахъ, — за исключеніемъ постулата Евклида, принимаемаго въ первой изъ нихъ и отбрасываемаго въ остальныхъ. Кромѣ того, принципъ, по которому двѣ точки вполнѣ опредѣляютъ прямую, подлежитъ одному исключенію въ геометріи Римана и не имѣетъ исключеній въ двухъ другихъ.

Если ограничимся двумя измѣреніями, то геометрія Римана допускаетъ очень простое истолкованіе,—она ничѣмъ не отличается, какъ извѣстно, отъ сферической геометріи, если условимся давать названіе прямыхъ большимъ кругамъ сферы.

Я обобщу спачала это истолкованіе такъ, чтобы его можно было распространить и на геометрію Лобачевскаго. Разсмотримъ какую нибудь поверхность второго порядка. Условимся называть *прямыми* плоскія діаметральныя сѣченія этой поверхности и *окружностями* плоскія сѣченія не діаметральныя.

Остается опредѣлить, что нужно разумѣть подъ угломъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ или подъ длиною отрѣзка прямой.

Черезъ точку, взятую на поверхности, проводимъ два плоскихъ діаметральныхъ сѣченія (которыя мы условились называть *прямыми*). Разсмотримъ теперь касательныя къ двумъ этимъ сѣченіямъ и двѣ прямолинейныхъ образующихъ поверхности, проходящихъ черезъ взятую нами точку. Эти четыре прямыхъ (въ обыкновенномъ смыслѣ слова) имѣютъ нѣкоторое ангармоническое отношеніе. Уголъ, который мы хотимъ опредѣлить, будетъ равенъ логариѳму этого ангармоническаго отношенія, если двѣ производящія дѣйствительны, т. е. если поверхность будетъ однополымъ гиперболоидомъ; въ противномъ случаѣ уголъ будетъ равенъ тому же логариѳму, дѣленному на $\sqrt{-1}$.

Разсмотримъ дугу коническаго сѣченія—часть плоскаго діаметральнаго сѣченія (то, что мы условились называть *отрѣзкомъ прямой*). Два конца дуги и двѣ безконечно удаленныя точки коническаго сѣченія имѣютъ нѣкоторое ангармоническое отношеніе, какъ всякая система четырехъ точекъ, лежащихъ на коническомъ сѣченіи. Условимся называть *длиною* разсматриваемаго *отрѣзка* логариѳмъ этого отношенія, если коническое сѣченіе есть гипербола, и тотъ же логариѳмъ, дѣленный на $\sqrt{-1}$, если коническое сѣченіе есть эллипсъ.

Между углами и длинами, такимъ образомъ опредѣленными, будетъ существовать рядъ соотношеній, которыя составятъ совокупность теоремъ, аналогичныхъ теоремамъ плоской геометріи.

Этой совокупности теоремъ можно дать названіе *квадратичной геометріи*, потому что точкою отправленія было для насъ разсмотрѣніе основной поверхности второго порядка (quadrique).

Есть нѣсколько квадратичныхъ геометрій,—потому что есть нѣсколько родовъ поверхностей второго порядка.

Если основная поверхность есть эллипсоидъ, то квадратичная геометрія не отличается отъ геометріи Римана.

Если основная поверхность—двуполый гиперболоидъ, то квадратичная геометрія не отличается отъ геометріи Лобачевскаго.

Если эта поверхность есть эллиптическій параболоидъ, то квадратичная геометрія сводится къ Евклидовой; это предѣльный случай двухъ предыдущихъ.

Очевидно, что этимъ не исчерпываются всѣ возможныя квадратичныя геометріи; ибо мы не разсмотрѣли ни однополаго гиперболоида, ни его многочисленныхъ видоизмѣненій.

Мы можемъ слѣдовательно сказать, что существуетъ три главныхъ квадратичныхъ геометріи, соотвѣтственно тремъ родамъ поверхностей второго порядка, имѣющихъ центръ.

Мы должны будемъ впрочемъ прибавить къ этому геометріи, соотвѣтствующія предѣльнымъ случаямъ; между ними займетъ мѣсто и геометрія Евклида.

Какъ могло случиться, что геометрія однополаго гиперболоида ускользала до сихъ поръ отъ вниманія ученыхъ теоретиковъ? Причина этого та, что въ этой геометріи имѣютъ мѣсто слѣдующія положенія:

1° Разстояніе двухъ точекъ, лежащихъ на одной и той же прямолинейной производящей основной поверхности, равно нулю.

2° Есть два сорта прямыхъ, отвѣчающихъ первыя діаметральнымъ сѣченіямъ эллиптическимъ, вторыя діаметральнымъ сѣченіямъ гиперболическимъ; никакимъ движеніемъ нельзя совмѣстить прямую 1-го рода съ прямой 2-го рода.

3° Невозможно совмѣстить прямую саму съ собой помощью дѣйствительнаго вращенія около одной изъ ея точекъ, подобно тому какъ это совмѣщеніе возможно въ геометріи Евклида, при оборотѣ прямой на 180° около одной изъ ея точекъ.

Всѣ геометры неявно допускали, что три эти положенія ложны и дѣйствительно, онѣ слишкомъ противорѣчатъ привычкамъ нашего ума, чтобы основатели геометріи могли подумать, что отвергая ихъ, они дѣлаютъ нѣкоторую гипотезу, и постарались ее формулировать.

Примѣненіе теоріи группъ.

Согласно вышесказанному задача, которую я поставилъ въ началѣ этой работы распадается на двѣ части:

1°. Каковы гипотезы, общія всѣмъ квадратичнымъ геометріямъ?

2°. Каковы тѣ гипотезы, которыми геометрія Евклида отличается отъ другихъ квадратичныхъ геометрій?

Вторую часть задачи можно считать разрѣшенною; поэтому предстоитъ заняться только первою частью.

Двѣ гипотезы должны быть сдѣланы при началѣ всякой геометріи двухъ измѣреній,—онѣ могутъ быть формулированы такъ.

A. Плоскость имѣетъ два измѣренія.

B. Положеніе плоской фигуры въ плоскости опредѣляется тремя условіями.

Лица, мало знакомыя съ новѣйшими работами геометровъ, сочтутъ невозможнымъ изъ подобныхъ посылокъ вывести опредѣленныя заключенія. Но результатъ этотъ не удивитъ математиковъ, читавшихъ замѣчательныя работы Софуса Ли по теоріи группъ. С. Ли выводитъ дѣйствительно слѣдующій результатъ, удивительный на первый взглядъ и выражаемый на языкѣ геометріи такъ:

Если положеніе плоской фигуры въ ея плоскости зависитъ отъ конечнаго числа условій, то число этихъ условій не можетъ превышать восьми [1]).

Мы будемъ и далѣе пользоваться мемуаромъ норвежскаго ученаго.

Изслѣдуемъ, какія заключенія позволительно извлечь изъ двухъ гипотезъ A и B.

Если плоскость имѣетъ два измѣренія, то положеніе точки въ ея плоскости опредѣляется двумя координатами x и y.

Мы не сдѣлаемъ въ настоящую минуту никакой гипотезы о выборѣ координатъ x и y, предоставляя себѣ опредѣлить ихъ ближе впослѣдствіи.

Предположимъ, что плоская фигура перемѣщается; пусть x, y начальныя координаты точки этой фигуры; x_1 и y_1—координаты той же точки послѣ перемѣщенія; будемъ имѣть:

$$x_1 = \varphi(x, y, \alpha. \beta, \gamma) \qquad y_1 = \psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma),$$

гдѣ φ и ψ двѣ функціи отъ x, y и трехъ параметровъ α, β, γ (параметровъ три потому, что положеніе фигуры зависитъ отъ трехъ условій,

Операція

$$[x, y; \varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma), \quad \psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma)]$$

[1]) См. напр., S. Lie. Theorie d. Transformationsgruppen. (Math. An. B. XVI). § 18—20.

опредѣлитъ одно изъ перемѣщеній, возможныхъ для плоской фигуры; совокупность такихъ операцій или перемѣщеній образуетъ группу. Эта группа, по терминологіи С. Ли, непрерывна и порядка 3,—потому что операція зависитъ отъ трехъ параметровъ.

Между операціями группы должна находиться тожественная операція. Слѣдовательно для извѣстныхъ значеній параметровъ α, β, γ должно быть

$$\varphi = x, \quad \psi = y.$$

Мы можемъ всегда предположить, что для этого должно взять

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Будемъ называть операціей безконечно-малой (или безконечно-малымъ перемѣщеніемъ) операцію, при которой α, β, γ имѣютъ безконечно-малыя значенія, и которую мы можемъ изобразить такъ:

$$\left(x, y;\ x + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma};\ y + \alpha\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right);$$

здѣсь въ производныхъ $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ и т. д. сдѣлана подстановка:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

С. Ли обозначаетъ подобную операцію такъ:

$$S = p\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right) + q\left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right),$$

такъ что, если положимъ

$$A = p\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + q\frac{\partial\psi}{\partial\alpha};\ B = p\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + q\frac{\partial\psi}{\partial\beta};\ C = p\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} + q\frac{\partial\psi}{\partial\gamma},$$

то всякая безконечно-малая операція представится:

$$S = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

гдѣ A, B, C суть функціи отъ x и y, p и q.

Операціи A, B, C можно назвать *основными подстановками,* и всякая безконечно-малая операція есть линейное ихъ сочетаніе; выборъ основныхъ подстановокъ остается впрочемъ до извѣстной степени произвольнымъ,—потому что эти три операціи A, B, C можно замѣнить тремя какими-либо линейными комбинаціями изъ нихъ.

С. Ли показалъ, что если положимъ:

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial p}\cdot\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial B}{\partial p} + \frac{\partial A}{\partial q}\cdot\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{\partial B}{\partial q}$$

и если α и β суть два какія-нибудь безконечно малыя количество, то операція

$$(\alpha A)(\beta B)(\alpha A)^{-1}(\beta B)^{-1},$$

которая необходимо принадлежитъ къ группѣ, есть безконечно-малая подстановка 2-го порядка и можетъ быть написана такъ:

$$\alpha\beta[A, B]\ ^{1}).$$

---

¹) Операція (αA) переводитъ x въ $x+\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha}$, y въ $y+\alpha\frac{d\psi}{d\alpha}$.

Операція (βB) переводитъ x въ $x+\beta\frac{d\varphi}{d\beta}$, y въ $x+\beta\frac{d\psi}{d\beta}$, слѣдовательно

$$x+\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha} \text{ въ } x+\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha}+\beta\frac{d\psi}{d\beta}+\alpha\beta\left(\frac{d^2\varphi}{dxd\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{d\beta}+\frac{d^2\varphi}{dyd\alpha}\cdot\frac{d\psi}{d\beta}\right) \qquad \text{(a)}$$

и аналогично для y.

Операція $(\alpha A)^{-1}$ переводитъ обратно $x+\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha}$ въ x и $y+\alpha\frac{d\psi}{d\alpha}$ въ y, слѣдовательно, выраженіе (a)—въ такое:

$$x+\beta\frac{d\varphi}{d\beta}+\alpha\beta\left(\frac{d^2\varphi}{dxd\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{d\beta}+\frac{d^2\varphi}{dyd\alpha}\cdot\frac{d\psi}{d\beta}\right)-\alpha\beta\left(\frac{d^2\varphi}{dxd\beta}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha}+\frac{d^2\varphi}{dyd\beta}\cdot\frac{d\psi}{d\alpha}\right). \qquad \text{(в)}$$

Операція $(\beta B)^{-1}$, переводящая $x+\beta\frac{d\varphi}{d\beta}$ въ x и $y+\beta\frac{d\psi}{d\beta}$ въ y, будучи примѣнена къ выраженію (в), оставляетъ члены второго порядка безъ перемѣны, и такимъ образомъ сложная операція

$$(\alpha A)(\beta B)(\alpha A)^{-1}\quad(\beta B)^{-1}$$

переводитъ

$$x \text{ въ } x+\alpha\beta\left(\frac{d^2\varphi}{dxd\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{d\beta}+\frac{d^2\varphi}{dyd\alpha}\cdot\frac{d\psi}{d\beta}\right)-\alpha\beta\left(\frac{d^2\psi}{dxd\beta}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha}+\frac{d^2\varphi}{dxd\beta}\cdot\frac{d\psi}{d\alpha}\right)$$

$$y \text{ въ } y+\alpha\beta\left(\frac{d^2\psi}{dxd\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{d\beta}+\frac{d^2\psi}{dyd\alpha}\cdot\frac{d\psi}{d\beta}\right)-\alpha\beta\left(\frac{d^2\psi}{dxd\beta}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha}+\frac{d^2\psi}{dyd\beta}\cdot\frac{d\psi}{d\alpha}\right).$$

Умножая приращеніе x на p, приращеніе y на q, имѣемъ по обозначеніямъ С. Ли, если замѣтимъ, что $\frac{d\varphi}{d\alpha}=\frac{dA}{dp}$ и $p\frac{d^2\varphi}{dxd\alpha}+q\frac{d^2\psi}{dxd\alpha}=\frac{dA}{d\alpha}$ и т. д.

$$(\alpha A)(\beta B)(\alpha A)^{-1}\quad(\beta B)^{-1}=-\alpha\beta[A, B].$$

Прим. пер.

Отсюда слѣдуетъ что $[A,B]$, $[A,C]$ и $[B,C]$ суть линейныя функціи отъ A, B, C:

$$\begin{aligned}[A,B] &= \lambda A + \mu B + \nu C \\ [A,C] &= \lambda' A + \mu' B + \nu' C \\ [B,C] &= \lambda'' A + \mu'' B + \nu'' C.\end{aligned} \tag{1}$$

Здѣсь λ, μ, ν суть постоянные коэффиціенты, но не произвольные,—они должны удовлетворять тожеству:

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0.$$

Изложенное выше составляетъ исходную точку изслѣдованія; но это изслѣдованіе можетъ быть значительно упрощено надлежащимъ выборомъ координатъ x, y и трехъ основныхъ подстановокъ A, B и C. Можно выбрать эти основныя подстановки такъ, чтобы $\lambda = \nu = 0$, или чтобы

$$[A,B] = \mu B.$$

Можно затѣмъ выбрать систему координатъ такъ, чтобы $A = p$, и слѣдовательно, чтобы

$$[A,B] = \frac{\partial B}{\partial x} = \mu B;$$

тогда для B получится такое выраженіе:

$$B = e^{\mu x}[h\theta_1(y) + q\theta_2(y)].$$

Мы сдѣлали сейчасъ гипотезу о выборѣ системы координатъ, но этою гипотезою система координатъ опредѣляется не вполнѣ. Не нарушая условія $A = p$, можно вмѣсто y взять произвольную функцію отъ y и прибавить къ x также произвольную функцію отъ y. Этимъ новымъ измѣненіемъ координатъ можно воспользоваться для упрощенія B. Если θ_2 не нуль, то можемъ такъ измѣнить координаты, чтобы $\theta_2 = 1$, $\theta_1 = 0$. Если же $\theta_2 = 0$, то она останется нулемъ и послѣ измѣненія координатъ, и тогда θ_1 можно привести или къ 1 или къ y. Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующимъ тремъ гипотезамъ:

$$\theta_1 = 0,\ \theta_2 = 1;\ \theta_1 = 1,\ \theta_2 = 0;\ \theta_1 = y,\ \theta_2 = 0.$$

Можно различать два случая:

1. Когда $\mu=0$, т. е. двѣ подстановки A и B коммутативны (замѣтимъ мимоходомъ, что гипотезу существованія коммутативныхъ движеній можно разсматривать, какъ одно изъ выраженій Евклидова постулата).

Тогда имѣемъ, или

$$A=p,\ B=q \text{ или } A=p,\ B=yp.$$

2. Или же μ не равно нулю. Тогда имѣемъ:
или $A=p, B=qe^{\mu x}$ или $A=p, B=pe^{\mu x}$, или $A=p, B=pye^{\mu x}$.

Изслѣдуемъ послѣдовательно эти 5 случаевъ.

1-й случай.

$$A=p,\ B=q.$$

Уравненія (ν) приводятся тогда къ виду:

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\lambda'p+\mu'q+\nu'C$$
$$\frac{\partial C}{\partial y}=\lambda''p+\mu''q+\nu''C$$

Если ν' и ν'' не равны одновременно нулю, то уравненія будутъ совмѣстимы только въ томъ случаѣ, если

$$\frac{\lambda'}{\lambda''}=\frac{\mu'}{\mu''}=\frac{\nu'}{\nu''}$$

Тогда можно предположить, что $\lambda'=\lambda''=\mu'=\mu''=0$ откуда:

$$C=e^{\nu'x+\nu''y}(ap+bq)$$

гдѣ a и b постоянныя.

Группа

$$A=p,\ B=q,\ C=e^{\nu'x+\nu''y}(ap+bq)$$

опредѣляетъ совершенно новую геометрію. Почему не встрѣтилась она Евклиду? или лучше, какая гипотеза, допущенная имъ неявно, помѣшала ему изучить эту геометрію.

Какая-нибудь безконечно-малая подстановка выразится:

$$\alpha p+\beta q+\gamma e^{\nu'x+\nu''y}(ap+bq).$$

Какія точки остаются неподвижными при такой подстановкѣ?

Точки эти опредѣляются уравненіями:

$$e^{\nu' x + \nu'' y} = -\frac{\alpha}{\gamma a} = -\frac{\beta}{b\gamma},$$

откуда заключаемъ: если не существуетъ равенства $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$, то ни одна точка не останется неподвижной. Если же равенство $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$ выполнено, то безчисленное множество точекъ остаются въ покоѣ.

Но легко замѣтить, что Евклидъ постоянно дѣлаетъ, не высказывая прямо, слѣдующую гипотезу:

Если плоская фигура не покидаетъ своей плоскости и если двѣ ея точки остаются неподвижными, то и вся она остается неподвижной.

Эта гипотеза и заставитъ отбросить ту особенную геометрію, которая основывается на разсмотрѣніи только что упомянутой группы.

Если же $\nu' = \nu'' = o$ то находимъ

$$C = p(\lambda' x + \lambda'' y) + q(\mu' x + \mu'' y);$$

такая группа изъ A, B и C приводитъ насъ къ геометріи Евклида.

2-случай: $A = p$, $B = yp$.

Въ самомъ общемъ случаѣ находимъ

$$C = [ax + f(y)]p + bq,$$

гдѣ a и b постоянныя, а $f(y)$ произвольная функція отъ y, которую можно положить равною нулю при надлежащемъ выборѣ системы координатъ.

Какая - нибудь безконечно-малая подстановка представится:

$$(\alpha + \beta y + a\gamma x)p + (\gamma b)q.$$

И эта группа должна быть отброшена въ силу сдѣланной гипотезы.

Дѣйствительно если γb не равно нулю, то ни одна точка не остается неподвижной, если же напротивъ $\gamma b = 0$, то всѣ точки удовлетворяющія уравненію

$$\alpha + \beta y + a\gamma x = 0$$

остаются неподвижными.

3-й случай: $A=p,\ B=pye^{\mu x}$.
Находимъ

$$C=-\frac{p}{y}+q.$$

Подстановки A и C замѣняютъ другъ друга, слѣдовательно приходимъ къ одному изъ разсмотрѣнныхъ уже случаевъ.

4-й случай: $A=p,\ B=pe^{\mu x}$;
снова находимъ, что A и C коммутативны, и потому приходимъ къ одному изъ двухъ первыхъ случаевъ.

5-й случай: $A=p,\ B=qe^{\mu x}$.
Здѣсь для C находимъ четыре различныхъ выраженія:

$$1^\circ.\ C=e^{\nu' x}[ap+\mu(ay+b)q],\ (a,\ b \text{ и } c \text{ постоянныя}).$$
$$2^\circ.\ C=[ap+(by+c)q]$$
$$3^\circ.\ C=e^{\mu x}[ap+(bx-a\mu y+c)q]$$
$$4^\circ.\ C=e^{\mu x}[(ay+b)p+\mu q\left(\frac{a}{2}y^2+by+c\right)].$$

Первый и третій должны быть отброшены, потому что B и C коммутативны, второй потому, что A и C коммутативны. Принимая одно изъ этихъ выраженій, придемъ всегда къ одному изъ первыхъ двухъ случаевъ.

Остается четвертая форма C, которая приводитъ насъ къ квадратичнымъ геометріямъ.

Тотъ же результатъ могъ бы быть полученъ изъ разсмотрѣнія трехъ соотношеній, связывающихъ девять коэффиціентовъ λ, μ, ν и получаемыхъ изъ тожества (2).

Заключенія.

Мы можемъ перечислить слѣдующія гипотезы, служащія необходимыми и достаточными предварительными допущеніями плоской геометріи:

А. Плоскость имѣетъ два измѣренія.

В. Положеніе плоской фигуры въ ея плоскости опредѣляется тремя условіями.

Двѣ эти первыя гипотезы даютъ возможность дѣлать выборъ между различными квадратичными геометріями и двумя геометріями, характеризующимися двумя слѣдующими группами

$$\left[p,\ q,\ e^{\nu' x+\nu'' y}(ap+bq)\right] \quad \text{и} \quad (p,\ yp,\ axp+bq).$$

Эти послѣднія геометріи исключаются, если принять еще слѣдующую гипотезу:

C. Когда плоская фигура не покидаетъ своей плоскости, и когда двѣ точки ея неподвижны, тогда и вся фигура неподвижна.

Послѣ этого остается дѣлать выборъ между различными квадратичными геометріями. Сдѣлаемъ еще двѣ гипотезы:

D. Разстояніе двухъ точекъ можетъ быть нулемъ только тогда, когда двѣ эти точки совпадаютъ.

E. Когда двѣ прямыя пересѣкаются, то вращая одну изъ нихъ около точки пересѣченія, можно привести ее въ совпаденіе съ другою.

Двѣ эти гипотезы неразрывно связаны между собою; допустивъ одну изъ нихъ, необходимо принять и другую и исключить этимъ геометрію однополаго гиперболоида.

Введемъ еще слѣдующую гипотезу:

F. Двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, и сферическая геометрія исключается въ свою очередь.

Остается только ввести *постулатъ* Евклида:

G. Сумма угловъ треугольника постоянна.

Можно замѣтить, что этотъ *постулатъ* дѣлаетъ излишними гипотезы D, E и F, которыя суть его необходимыя слѣдствія.

Различныя замѣчанія.

Если читатель, слѣдившій за мною до сихъ поръ, перенесется мысленно къ знаменитому мемуару Римана (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen), то замѣтитъ нѣкоторую разницу въ методахъ и выводахъ. Риманнъ характеризуетъ геометрію выраженіемъ элемента дуги въ функціи координатъ. Онъ приходитъ такимъ образомъ къ весьма большому числу геометрій, логически возможныхъ, о коихъ я даже и не говорилъ. Это происходитъ отъ того, что за точку отправленія я взялъ возможность перемѣщенія, или лучше существованіе группы перемѣщеній, не измѣняющихъ разстояній.

Можно спросить себя, что представляютъ собою эти гипотезы? Факты ли это полученные изъ опыта, или сужденія аналитическія, или синтетическія a priori? Мы должны отвѣтить отрицательно на три эти вопроса. Если бы эти гипотезы были фактами опыта и наблюденія, то геометрія подлежала бы постоянному пересмотру, и не была бы наукою точною; если бы это были синтетическія апріорныя сужденія, а тѣмъ болѣе аналитическія, то невозможно было бы отрѣшиться отъ нихъ, и на ихъ отрицаніи ничего нельзя было бы построить.

Можно показать, что анализъ основывается на извѣстномъ числѣ синтетическихъ сужденій а priori; но не то въ геометріи. Что же мы должны думать о допущеніяхъ геометріи? Въ какомъ, напр., смыслѣ можно говорить, что *постулатъ* Евклида вѣренъ?

Согласно тому, что нами выше было сказано, геометрія есть не что иное, какъ изученіе нѣкоторой группы движеній, и въ этомъ смыслѣ можно сказать, что справедливость геометріи Евклида нисколько не противорѣчитъ справедливости геометріи Лобачевскаго, — такъ какъ существованіе одной группы вполнѣ совмѣстимо съ существованіемъ другой.

Мы выбрали между всѣми возможными группами одну особенную для того, чтобы къ ней относить физическія явленія, подобно тому какъ мы выбираемъ систему трехъ координатныхъ осей, чтобы къ нимъ относить геометрическія фигуры. Что же опредѣлило нашъ выборъ? это во-первыхъ простота выбранной группы; но есть и другое основаніе: въ природѣ существуютъ замѣчательныя тѣла, называемыя *твердыми*, и опытъ говоритъ намъ, что связь различныхъ возможныхъ перемѣщеній этихъ тѣлъ выражается со значительною степенью приближенія тѣми-же самыми соотношеніями, какъ и различныя операціи выбранной группы.

Такимъ образомъ, основныя гипотезы геометріи не суть факты, добытые изъ опыта; но наблюденіе надъ нѣкоторыми физическими явленіями приводитъ къ выбору именно ихъ изъ числа всѣхъ возможныхъ гипотезъ.

Съ другой стороны выбранная нами группа только удобнѣе, чѣмъ другія, и нельзя уже сказать, что Евклидова геометрія вѣрна, а геометрія Лобачевскаго ложная,—совершенно подобно тому, какъ нельзя сказать, что декартовы координаты вѣрны, а полярныя невѣрны.

Я не буду болѣе останавливаться на этомъ вопросѣ, такъ какъ эти истины становятся уже избитыми.

ОГЛАВЛЕНІЕ.