Решение обыкновенного дифференциального уравнения с дробной степенью оператора Бесселя

Ситник С.М., Шишкина Э.Л.

1 Введение

В этой статье рассмотрим дифференциальное уравнение с дробной степенью оператора Бесселя, где оператор Бесселя имеет вид

$$B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}, \qquad \gamma \geq 0. \tag{1}$$

Первые явные формулы для дробных степеней оператора Бесселя на отрезке в терминах гипергеометрических функций Гаусса приведены в статье Иды Шпринхайзен-Купер [1]. Более подробная теория дробных степеней (1) на отрезке и полуоси содержится в [2–6]. Дробные степени гипер-бесселевого оператора вида

$$\mathbf{B}_{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_m} = x^{\alpha_0}\frac{d}{dx}x^{\alpha_1}\frac{d}{dx}...x^{\alpha_{m-1}}\frac{d}{dx}x^{\alpha_m}$$

с вещественными параметрами $\alpha_0,...,\alpha_m$ были представлены Адамом Макбрайдом в [7]. Их изучение было продолжено в [8–11]. Оператор Бесселя (1) соответствует $\mathbf{B}_{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_m}$ при

$$m = 2,\ \alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 2-\gamma,\ \alpha_2 = \gamma - 1,$$

или

$$m = 2,\ \alpha_0 = -\gamma,\ \alpha_1 = \gamma,\ \alpha_2 = 0.$$

Уравнения с дробными производными Бесселя ранее не изучались из-за отсутствия подходящих инструментов для их изучения. Первой целью статьи является представление одного из таких инструментов, а именно интегрального преобразования Мейера. Такое преобразование играет ту же роль для левосторонней дробной производной Бесселя на полуоси, что и преобразование Лапласа для левой дробной производной Герасимова-Капуто на полуоси. Другая цель состоит в том, чтобы показать, что степенные функции, умноженные на функции Фокса-Райта, являются фундаментальной системой решений левосторонней дробной производной Бесселя типа Герасимова-Капуто на полуоси. Уравнения с дробными производными Бесселя чрезвычайно интересны с теоретической точки зрения, но возникают и в приложениях, например, в задачах случайного блуждания частицы [12, 13].

В [14], на стр. 312 метод преобразования Лапласа был применен для получения явного решения однородного уравнения вида

$$({}^{GC}D_{0+}^{\alpha}f)(x) = \lambda f(x), \qquad x > 0, \qquad l-1 < \alpha \le l, \qquad l \in \mathbb{N}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где для нецелого $\alpha > 0$

$$({}^{GC}D_{0+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}}, \qquad x \in [0, \infty) \tag{3}$$

— левосторонняя дробная производная Герасимова-Капуто на полуоси ([15], [14], стр. 97, формула 2.4.47). Для $\alpha = n = 0, 1, 2, ...$

$$({}^{GC}D_{0+}^{n}f)(x) = f^{(n)}(x).$$

Герасимов в [15] вывел и решил уравнения с частными производными дробного порядка с производной (3) для прикладных задач механики в 1948 году.

Условия вида

$$f^k(0+) = d_k, \qquad k = 0, 1, ..., l-1, \qquad d_k \in \mathbb{R} \tag{4}$$

могут быть добавлены к уравнению (2). Решение задачи (2)–(4) имеет вид (см. [14], стр. 312)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{l-1} d_k\, x^k\, E_{\alpha,k+1}(\lambda x^{\alpha}), \tag{5}$$

где $E_{\alpha,\beta}$ — функция Миттаг–Леффлера (15).

В этой статье мы, при помощи преобразования Мейера, получим точное решение f однородного уравнения вида

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^{\alpha}f)(x) = \lambda f(x),$$

где положительная вещественная степень оператора (1) определена формулой (26).

2 Основные определения

2.1 Специальные функции

Приведем определения специальных функций, которые будем использовать.

Модифицированные функции Бесселя (или гиперболические функции Бесселя) **первого и второго рода** $I_\alpha(x)$ и $K_\alpha(x)$ определяются формулами (см. [16–19])

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}, \tag{6}$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{7}$$

где α — нецелое. Для целого α используется предельный переход в (6),(7). Очевидно, что $K_\alpha(x) = K_{-\alpha}(x)$. Для мальньких значений аргумента $0 < |r| \ll \sqrt{\nu+1}$, имеем

$$K_\nu(r) \sim \begin{cases} -\ln\left(\frac{r}{2}\right) - \vartheta \ \text{ if } \nu = 0, \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu}} r^{-\nu} \ \text{ if } \nu > 0, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\vartheta = \lim_{n\to\infty} \left(-\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \int_1^\infty \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right) dx$$

— постоянная Эйлера-Маскерони [20].

Ядром преобразования Мейера является **нормированная модифицированная функция Бесселя второго рода** k_ν, определенная формулой

$$k_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\, K_\nu(x), \tag{9}$$

где K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода (7).

Нормированная модифицированная функция Бесселя второго рода обладает свойствами

$$\lim_{x\to 0} k_\nu(x) = \frac{\Gamma(-\nu)}{2^{2\nu+1}\Gamma(1+\nu)}, \qquad \nu < 0, \qquad -\nu \notin \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} k_0(x) = 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} k_0(x) = -1, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\nu} k_\nu(x) = \frac{1}{2\nu}, \qquad \nu > 0, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\nu+1} \frac{dk_\nu(x)}{dx} = -1, \qquad \nu > -1. \tag{13}$$

Ядром левосторонней дробной производной Бесселя на полуоси является **гипергеометрическая функция Гаусса**, которая внутри круга $|z|<1$, определяется как сумма гипергеометрического ряда (см. [20], стр. 373, формула 15.3.1)

$$_2F_1(a, b; c; z) = F(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{14}$$

а для $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В (14) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Множитель $(a)_k$ — это символ Похгаммера: $(z)_n = z(z+1)...(z+n-1)$, $n = 1, 2, ...$, $(z)_0 \equiv 1$.

Функция Миттаг–Леффлёра $E_{\alpha,\beta}(z)$ — это целая функция порядка $1/\alpha$ определяется следующим рядом, в случае когда вещественная часть α строго положительна

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \;\; z \in \mathbb{C}, \; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \; \operatorname{Re}\alpha > 0, \; \operatorname{Re}\beta > 0. \tag{15}$$

Функция (15) была введена Гестой Миттаг–Леффлёром в 1903 году для α=1 и А. Виманом в 1905 году в общем случае. Первыми приложениями этих функций Миттаг–Леффлёра и Вимана были приложения в комплексном анализе (нетривиальные примеры целых функций с нецелыми порядками роста и обобщенные методы суммирования). В СССР эти функции стали в основном известны после публикации знаменитой монографии М. М. Джрбашяна [21] (см. также его более позднюю монографию [22]). Наиболее известным применением функций Миттаг–Леффлёра в теории интегро-дифференциальных уравнений и дробного исчисления является тот факт, что резольвента дробного интеграла Римана–Лиувилля явно выражается через них в соответствии со знаменитой формулой Хилле–Тамаркина–Джрбашяна [23], стр. 78. Ввиду многочисленных приложений к решению дифференциальных уравнений с дробными производными эта функция была заслуженно названа в [24] была заслуженно названа "*Королевской функцией дробного исчисления*".

Функция Фокса-Райта ${}_p\Psi_q(z)$ для $z \in \mathbb{C}$, $a_l, b_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_l, \beta_j \in \mathbb{R}$, $l = 1, ..., p$; $j = 1, ..., q$ определяется рядом вида (см. [25,26])

$$ {}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q \left[\begin{array}{c} (a_l, \alpha_l)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{array} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{l=1}^{p} \Gamma(a_l + \alpha_l k)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}. \tag{16} $$

При условии

$$ \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{l=1}^{p} \alpha_l > -1 $$

ряд в (16) сходится для всех $z \in \mathbb{C}$. Пусть

$$ \delta = \prod_{l=1}^{p} |\alpha_l|^{-\alpha_l} \prod_{j=1}^{q} |\beta_j|^{\beta_j}, $$

$$ \mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{l=1}^{p} a_l + \frac{p-q}{2}. $$

Если

$$ \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{l=1}^{p} \alpha_l = -1, $$

то ряд в (16) сходится абсолютно для $|z| < \delta$ и для $|z| = \delta$, когда $\operatorname{Re} \mu > \frac{1}{2}$. Функция Фокса-Райта для дробных степеней оператора Бесселя играет ту же роль, что функция Миттаг-Леффлера для обыкновенного дробного исчисления.

Используя функцию Фокса-Райта (16), мы можем записать функцию Миттаг–Леффлёра в виде

$$ E_{\alpha,\beta}(z) = {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (1,1) \\ (\beta, \alpha) \end{array} \middle| z \right]. \tag{17} $$

2.2 Интегральные преобразования и оператор Пуассона

В этом пункте мы представляем интегральные преобразования Лапласа и Мейера и их связь с оператором преобразования Пуассона.

Преобразование Лапласа функции $f(t)$, определенной для всех вещественных чисел $t > 0$, — это функция $F(s)$, представимая равенством

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \tag{18}$$

где s — комплексное число $s = \sigma + i\omega$, σ и ω — вещественные.

Пусть $\mathscr{E}_a$, $a \in \mathbb{R}$ — пространство функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, таких, что $\int\limits_0^\infty |f(t)|e^{-at}dt < \infty$ и $f(t)$ обращается в нуль, если $t < 0$.

Пусть $f \in \mathscr{E}_a$. Тогда интеграл Лапласа (18) сходится абсолютно и равномерно на $\bar{H}_a = \{p : p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p \geq a\}$. Преобразование Лапласа функции $f \in \mathscr{E}_a$ ограничено на $\bar{H}_a$ и является аналитической функцией на $H_a = \{p : p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p > a\}$ (см. [27], стр. 28).

Пусть $f \in \mathscr{E}_a$ и гладкая на каждом интервале $(a, b) \in \mathbb{R}_+$. Тогда в точках t непрерывности этой функции определено обратное преобразование Лапласа:

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{ts}ds, \qquad c > a.$$

(см. [27], стр. 37).

Преобразование Лапласа функции Миттаг–Леффлера, умноженной на степенную функцию имеет вид (см. [14], стр. 47, формула 1.9.13, где $\rho = 1$)

$$\mathcal{L}[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda x^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}. \tag{19}$$

Для функции f интегральное преобразование, содержащее функцию $k_{\frac{\gamma-1}{2}}$, $\gamma \geq 1$ в качестве ядра называется **преобразованием Мейера**. Оно определяется формулой

$$\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) = F(\xi) = \int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,f(x)x^\gamma\,dx. \tag{20}$$

Преобразование (20) — это модификация K–преобразования из [27], стр. 93, формула 1.8.48 и поэтому имеет те же свойства, но другое асимптотическое поведение.

Пусть β такое число, что

$$\beta > \frac{\gamma}{2} - 2 \,\text{если}\, \gamma > 1 \,\text{и}\, \beta > -1 \,\text{если}\, \gamma = 1 \,\text{и}\ \ \beta > -1 - \frac{\gamma}{2} \,\text{если}\, 0 < \gamma < 1.$$

Определим класс функций

$$\mathscr{M}_\gamma^a(\mathbb{R}_+) = \left\{ f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+) : f(t) = o\left(t^{\beta - \frac{\gamma}{2}}\right) \,\text{при}\, t \to +0 \,\text{и}\, f(t) = O(e^{at}) \,\text{при}\, t \to +\infty \right\}.$$

Преобразование Мейера функции $f \in \mathscr{M}_\gamma^a(\mathbb{R}_+)$ существует почти всюду для $\operatorname{Re}\xi > a$ (см. [27], стр. 94).

Если $0 < \gamma < 2$ и $F(\xi)$ — аналитическая на полуплоскости $H_a = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq a\}$, $a \leq 0$ и $s^{\frac{\gamma}{2}-1}F(\xi) \to 0$, $|\xi| \to +\infty$ равномерно по $\arg s$, то для любого числа c, $c > a$ обратное $\mathcal{K}_\gamma^{-1}$ имеет вид (см. [27], стр. 94)

$$\mathcal{K}_\gamma^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widehat{f}(\xi) i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\xi^\gamma d\xi. \tag{21}$$

Формула обращения (21) не удобна для расчетов и имеет условие $0<\gamma<2$. Здесь мы представим другую формулу обращения с использованием оператора преобразования Пуассона.

Пусть $\gamma>0$. Одномерный оператор Пуассона определен для интегрируемых функций f равенством

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x) = \frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}} \int\limits_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1} f(t)\, dt, \qquad C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{22}$$

Постоянная $C(\gamma)$ выбрана так, чтобы $\mathcal{P}_x^\gamma[1] = 1$ (см. [28], стр. 50).

Левый обратный оператор для (22) при $\gamma > 0$ для функции $H(x)$ определяется формулой (см. [23])

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1} H(x) = \frac{2\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{d}{2xdx}\right)^n \int\limits_0^x H(z)(x^2 - z^2)^{n-\frac{\gamma}{2}-1} z^\gamma dz, \tag{23}$$

где $n = \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1$.

Для того чтобы найти $f(x)$ из равенства

$$\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) = (\mathcal{L}F(z))(\xi) = g(\xi)$$

представим ядро преобразования (20) по формуле

$$K_\alpha(x\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x\xi}{2}\right)^\alpha \int\limits_1^\infty e^{-x\xi t}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt = \{xt = z\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\xi}{2x}\right)^\alpha \int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dz$$

из [16], стр. 190, формула (4). Тогда

$$k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = \frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)(x\xi)^{\frac{\gamma-1}{2}}} K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) =$$

$$= \frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)(x\xi)^{\frac{\gamma-1}{2}}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{\xi}{2x}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}dz =$$

$$= \frac{2^{1-\gamma}\sqrt{\pi}}{x^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}dz.$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\, f(x) x^\gamma\, dx =$$

$$= \frac{2^{1-\gamma}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\infty f(x)x\, dx \int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}dz =$$

$$= \frac{2^{1-\gamma}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-\xi z}dz \int\limits_0^z f(x)(z^2-x^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}xdx.$$

Используя оператор Пуассона (22) и преобразование Лапласа (18), получим

$$\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-\xi z}F(z)dz = (\mathcal{L}F(z))(\xi),$$

где

$$F(z) = A_\gamma z^{\gamma-1}\mathcal{P}_z^\gamma z f(z), \qquad A_\gamma = \frac{\pi}{2^\gamma \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}.$$

Таким образом, для того чтобы найти $f(x)$ из равенства

$$\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) = (\mathcal{L}A_\gamma z^{\gamma-1}\mathcal{P}_z^\gamma z f(z))(\xi) = g(\xi)$$

мы должны сначала обратить преобразование Лапласа, а затем обратить оператор Пуассона. Формула обращения для функции g, такой что $(\mathcal{L}^{-1}g)(x)$ существует, имеет вид

$$f(x)=\mathcal{K}_\gamma^{-1}[g](x)=\frac{1}{A_\gamma x}(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}x^{1-\gamma}(\mathcal{L}^{-1}g)(x),\quad g=\mathcal{K}_\gamma[f],\quad A_\gamma=\frac{\pi}{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}. \tag{24}$$

3 Левосторонние дробные интегралы и производные Бесселя на полуоси

3.1 Определения левосторонних дробных интегралов и производных Бесселя на полуоси

Пусть $\alpha>0$, $\gamma>0$. **Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси** $B_{\gamma,0+}^{-\alpha}$ для $f\in L[0,\infty)$ определяется формулой

$$(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}f)(x)=(IB_{\gamma,0+}^{\alpha}f)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^\gamma\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{x^2}\right)f(y)dy. \tag{25}$$

Для $\alpha<0$ формула (25) может быть продолжена аналитически, а$(B_{\gamma,0+}^{0}f)(x)=f(x)$.

В [7] были представлены пространства, адаптированные для работы с операторами вида $B_{\gamma,0+}^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Эти пространства имеют вид:

$$F_p=\left\{\varphi\in C^\infty(0,\infty):x^k\frac{d^k\varphi}{dx^k}\in L^p(0,\infty)\,\text{for}\,k=0,1,2,...\right\},\qquad 1\le p<\infty,$$

$$F_\infty=\left\{\varphi\in C^\infty(0,\infty):x^k\frac{d^k\varphi}{dx^k}\to 0\,\text{as}\,x\to 0+\ \text{and}\,\text{as}\,x\to\infty\,\text{for}\,k=0,1,2,...\right\}$$

и

$$F_{p,\mu}=\left\{\varphi:x^{-\mu}\varphi(x)\in F_p\right\},\qquad 1\le p\le\infty,\qquad \mu\in\mathbb{C}.$$

Мы приведем здесь теорему, которая является частным случаем теорем из [7].

Теорема 1. *Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$. Для всех p,μ и $\gamma>0$ таких, что $\mu\neq\frac{1}{p}-2m$, $\gamma\neq\frac{1}{p}-\mu-2m+1$, $m=1,2...$ оператор $B^{\alpha}_{\gamma,0+}$ является непрерывным линейным отображением из F_p,μ в $F_{p,\mu-2\alpha}$. Если, кроме того, $2\alpha\neq\mu-\frac{1}{p}+2m$ и $\gamma-2\alpha\neq\frac{1}{p}-\mu-2m+1$, $m=1,2...$, то $B^{\alpha}_{\gamma,0+}$ гомеоморфизм из F_p,μ на $F_{p,\mu-2\alpha}$ с обратным оператором $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$.*

Сравним дробный интеграл Бесселя $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ с известным дробным интегралом Римана-Лиувилля $I^{2\alpha}_{0+}$. Для этого положим $\gamma=0$:

$$(B^{-\alpha}_{0,0+}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_a^x\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{x^2}\right)f(y)dy=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}\left[\frac{2x}{x+y}\right]^{2\alpha-1}f(y)dy=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x(x-y)^{2\alpha-1}f(y)dy=(I^{2\alpha}_{0+}f)(x).$$

Теперь выпишем явную формулу для дробной производной Бесселя B^{α}_{γ}, $\alpha>0$. Для приложений лучше использовать обобщение дробной производной Герасимова–Капуто (3).

Определение 1. *Пусть $n=[\alpha]+1$, $f\in L[0,\infty)$, $IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-}f, IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-}f\in C^{2n}_{ev}(0,\infty)$.* ***Левосторонняя дробная производная Бесселя на полуоси типа Герасимова-Капуто*** *определяется равенством*

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=(IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+}B^{n}_{\gamma}f)(x). \tag{26}$$

Легко видеть, что

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{0,0+}f)(x)=({}^{C}D^{2\alpha}_{0+}f)(x),$$

где $({}^{GC}D^{2\alpha}_{0+}f)(x)$ определено формулой (3).

Следуя [1] и [7] приведем следующие результаты. Пусть $\mathrm{Re}\,(2\eta+\mu)+2>1/p$, и $\varphi\in F_{p,\mu}$. Для $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, мы определим $I^{\eta,\alpha}_2\varphi$ формулой

$$I^{\eta,\alpha}_2\varphi(x)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\,x^{-2\eta-2\alpha}\int\limits_0^x(x^2-u^2)^{\alpha-1}u^{2\eta+1}\varphi(u)du. \tag{27}$$

Выражение $I^{\eta,\alpha}_2$ продолжается на значения $\mathrm{Re}\,\alpha\leq 0$ по формуле

$$I^{\eta,\alpha}_2\varphi=(\eta+\alpha+1)I^{\eta,\alpha+1}_2\varphi+\frac{1}{2}I^{\eta,\alpha+1}_2\,x\frac{d\varphi}{dx}. \tag{28}$$

Теорема 2. *Для (25) справедлива следующая факторизация*

$$(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}\varphi)(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha}\ I_2^{\frac{\gamma-1}{2},\alpha}I_2^{0,\alpha}\varphi, \tag{29}$$

где

$$I_2^{0,\alpha}\varphi(x)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\,x^{-2\alpha}\int\limits_0^x(x^2-u^2)^{\alpha-1}u\varphi(u)du,$$

$$I_2^{\frac{\gamma-1}{2},\alpha}\varphi(x)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\,x^{1-\gamma-2\alpha}\int\limits_0^x(x^2-u^2)^{\alpha-1}u^{\gamma}\varphi(u)du.$$

Доказательство. Имеем

$$(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}\varphi)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{u}{x}\right)^{\gamma}\left(\frac{x^2-u^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}\,{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{u^2}{x^2}\right)\varphi(u)du=$$

$$=2^{-2\alpha}x^{2\alpha}I_2^{\frac{\gamma-1}{2},\alpha}I_2^{0,\alpha}\varphi=$$

$$=\frac{2^{1-2\alpha}x^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}I_2^{\frac{\gamma-1}{2},\alpha}y^{-2\alpha}\int\limits_0^y(y^2-u^2)^{\alpha-1}u\varphi(u)du=$$

$$=\frac{2^{2-2\alpha}x^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)}x^{-\gamma+1-2\alpha}\int\limits_0^x(x^2-y^2)^{\alpha-1}y^{\gamma-2\alpha}dy\int\limits_0^y(y^2-u^2)^{\alpha-1}u\varphi(u)du=$$

$$=\frac{2^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)}x^{1-\gamma}\int\limits_0^x u\varphi(u)du\int\limits_u^x(y^2-u^2)^{\alpha-1}(x^2-y^2)^{\alpha-1}y^{\gamma-2\alpha}dy.$$

Найдем

$$\int\limits_u^x(y^2-u^2)^{\alpha-1}(x^2-y^2)^{\alpha-1}y^{\gamma-2\alpha}dy=\{y^2=t\}=\frac{1}{2}\int\limits_{u^2}^{x^2}(t-u^2)^{\alpha-1}(x^2-t)^{\alpha-1}t^{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha}dt=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)}{2^{2\alpha}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\ \left(x^2-u^2\right)^{2\alpha-1}\ u^{-2\alpha+\gamma-1}\,{}_2F_1\left(\alpha+\frac{1-\gamma}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{x^2}{u^2}\right).$$

Используя формулу (см. [20])

$${}_2F_1(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right),$$

получим

$$
{}_2F_1\left(\alpha+\frac{1-\gamma}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{x^2}{u^2}\right)={}_2F_1\left(\alpha,\alpha+\frac{1-\gamma}{2};2\alpha;1-\frac{x^2}{u^2}\right)=
$$

$$
=\left(\frac{x^2}{u^2}\right)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\alpha+\frac{\gamma-1}{2};2\alpha;1-\frac{u^2}{x^2}\right)=
$$

$$
=\left(\frac{x^2}{u^2}\right)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{u^2}{x^2}\right)
$$

и

$$
\int\limits_u^x(y^2-u^2)^{\alpha-1}(x^2-y^2)^{\alpha-1}y^{\gamma-2\alpha}dy=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)}{2^{2\alpha}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\times
$$

$$
\times\left(x^2-u^2\right)^{2\alpha-1}\,u^{-2\alpha+\gamma-1}\left(\frac{x^2}{u^2}\right)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\alpha+\frac{\gamma-1}{2};2\alpha;1-\frac{u^2}{x^2}\right)=
$$

$$
=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)}{2^{2\alpha}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\,\left(x^2-u^2\right)^{2\alpha-1}\,u^{\gamma-1}x^{-2\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha,\alpha+\frac{\gamma-1}{2};2\alpha;1-\frac{u^2}{x^2}\right).
$$

Наконец,

$$
(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}\varphi)(x)=\frac{2^{2(1-2\alpha)}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\,x^{1-\gamma-2\alpha}\times
$$

$$
\times\int\limits_0^x\left(x^2-u^2\right)^{2\alpha-1}\,u^{\gamma}\,{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{u^2}{x^2}\right)\varphi(u)du.
$$

Применяя формулу удвоения вида

$$
\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2\alpha}\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha),
$$

получим

$$
(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}\varphi)(x)=\frac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma(2\alpha)}\,x^{1-\gamma-2\alpha}\times
$$

$$
\times\int\limits_0^x\left(x^2-u^2\right)^{2\alpha-1}\,u^{\gamma}\,{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{u^2}{x^2}\right)\varphi(u)du=
$$

$$
=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{x^2-u^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}\left(\frac{u}{x}\right)^{\gamma}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{u^2}{x^2}\right)\varphi(u)du.
$$

Что и дает (29). Доказательство закончено. $\square$

3.2 Преобразование Мейера левосторонних дробных интегралов и производных Бесселя на полуоси

В этом разделе мы применим преобразование Мейера к левосторонним дробным интегралам и производным Бесселя на полуоси, а затем, в разделе 4, мы будем использовать эти результаты для построения явных решений линейного дифференциального уравнения, включающего левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси типа Герасимова–Капуто с постоянными коэффициентами.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 0$. Преобразование Мейера $B_{\gamma,0+}^{-\alpha} f \in \mathscr{M}_\gamma^a(\mathbb{R}_+)$ имеет вид*

$$\mathcal{K}_\gamma[(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}\varphi)(x)](\xi) = \xi^{-2\alpha}\mathcal{K}_\gamma\varphi(\xi). \tag{30}$$

Доказательство. Начнем с (30). Пусть $g(x) = I_2^{0,\alpha}\varphi(x)$. Используя факторизацию (29), получим

$$\mathcal{K}_\gamma[(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}\varphi)(x)](\xi) = \int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}\varphi)(x)x^\gamma\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2\alpha}}\int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;I_2^{\frac{\gamma-1}{2},\alpha}I_2^{0,\alpha}\varphi(x)x^{2\alpha+\gamma}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2\alpha}}\int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\;I_2^{\frac{\gamma-1}{2},\alpha}g(x)x^{2\alpha+\gamma}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x\,dx\int\limits_0^x (x^2-u^2)^{\alpha-1}u^\gamma g(u)du =$$

$$= \frac{1}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty u^\gamma g(u)du\int\limits_u^\infty (x^2-u^2)^{\alpha-1}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x\,dx.$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Применяя формулу 2.16.3.7 из [31] вида

$$\int\limits_a^\infty x^{1\pm\rho}(x^2-a^2)^{\beta-1}K_\rho(cx)dx = 2^{\beta-1}a^{\beta\pm\rho}c^{-\beta}\Gamma(\beta)K_{\rho\pm\beta}(ac), \qquad a,c,\beta>0 \tag{31}$$

будем иметь

$$\int\limits_u^\infty (x^2-u^2)^{\alpha-1}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x\,dx = \frac{2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}\int\limits_u^\infty (x^2-u^2)^{\alpha-1}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x^{1-\frac{\gamma-1}{2}}\,dx =$$

$$=\frac{2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}\cdot 2^{\alpha-1}u^{\alpha-\frac{\gamma-1}{2}}\xi^{-\alpha}\Gamma(\alpha)K_{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha}(u\xi)$$

и

$$\mathcal{K}_\gamma[(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}\varphi)(x)](\xi)=\frac{2^{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\xi^{\frac{\gamma-1}{2}+\alpha}}\int\limits_0^\infty u^{\alpha+\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha}(u\xi)g(u)du=$$

$$=\frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}-\alpha}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\xi^{\frac{\gamma-1}{2}+\alpha}}\int\limits_0^\infty u^{\frac{\gamma+1}{2}-\alpha}K_{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha}(u\xi)du\int\limits_0^u(u^2-t^2)^{\alpha-1}t\varphi(t)dt=$$

$$=\frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}-\alpha}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\xi^{\frac{\gamma-1}{2}+\alpha}}\int\limits_0^\infty t\varphi(t)dt\int\limits_t^\infty(u^2-t^2)^{\alpha-1}u^{\frac{\gamma+1}{2}-\alpha}K_{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha}(u\xi)du.$$

Используя снова (31), запишем

$$\int\limits_t^\infty(u^2-t^2)^{\alpha-1}u^{\frac{\gamma+1}{2}-\alpha}K_{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha}(u\xi)du=2^{\alpha-1}t^{\frac{\gamma-1}{2}}\xi^{-\alpha}\Gamma(\alpha)K_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\xi)$$

и

$$\mathcal{K}_\gamma[(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}\varphi)(x)](\xi)=\frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}-\alpha}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\xi^{\frac{\gamma-1}{2}+\alpha}}\cdot 2^{\alpha-1}\xi^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\int\limits_0^\infty\varphi(t)K_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\xi)t^{\frac{\gamma+1}{2}}dt=$$

$$=\xi^{-2\alpha}\int\limits_0^\infty\varphi(t)k_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\xi)t^\gamma dt=\xi^{-2\alpha}\mathcal{K}_\gamma\varphi.$$

Доказательство закончено. $\square$

Лемма 1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $B^n_\gamma f\in\mathscr{M}^a_\gamma(\mathbb{R}_+)$, тогда для $0\leq\gamma<1$*

$$\mathcal{K}_\gamma[B^n_\gamma f](\xi)=\xi^{2n}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi)-$$

$$-\sum_{k=1}^n\xi^{2k-1-\gamma}B^{n-k}_\gamma f(0+)-\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\lim_{x\to0+}\sum_{k=1}^n\xi^{2k-2}x^\gamma\frac{d}{dx}[B^{n-k}_\gamma f(x)],\tag{32}$$

для $\gamma=1$

$$\mathcal{K}_\gamma[B^n_\gamma f](\xi)=\xi^{2n}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi)-\sum_{k=1}^n\xi^{2k-1-\gamma}B^{n-k}_\gamma f(0+)+\lim_{x\to0+}\sum_{k=1}^n\xi^{2k-2}\ln x\xi\frac{d}{dx}[B^{n-k}_\gamma f(x)],\tag{33}$$

для $1 < \gamma$

$$\mathcal{K}_\gamma[B_\gamma^n f](\xi)=$$

$$=\xi^{2n}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi)-\sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-1-\gamma}B_\gamma^{n-k}f(0+)-\frac{1}{\gamma-1}\lim_{x\to0+}\sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-1-\gamma}x\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-k}f(x)],\ \ (34)$$

где

$$B_\gamma^{n-k}f(0+)=\lim_{x\to+0}B_\gamma^{n-k}f(x).$$

Доказательство. Найдем $\mathcal{K}_\gamma[B_\gamma^n f](\xi)$:

$$\mathcal{K}_\gamma[B_\gamma^n f](\xi)=\int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,[B_\gamma^n f(x)]\,x^\gamma\,dx=\int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,\frac{d}{dx}x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1}f(x)]\,dx=$$

$$=k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1}f(x)]\bigg|_{x=0}^{\infty}-\int\limits_0^\infty x^\gamma\frac{d}{dx}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1}f(x)]\,dx=$$

$$=-k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1}f(x)]\bigg|_{x=0}+\left(x^\gamma\frac{d}{dx}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\right)\,[B_\gamma^{n-1}f(x)]\bigg|_{x=0}+$$

$$+\int\limits_0^\infty[B_\gamma k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)]\,[B_\gamma^{n-1}f(x)]x^\gamma\,dx=-k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1}f(x)]\bigg|_{x=0}+$$

$$+\left(x^\gamma\frac{d}{dx}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\right)\,[B_\gamma^{n-1}f(x)]\bigg|_{x=0}+\xi^2\int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,[B_\gamma^{n-1}f(x)]x^\gamma\,dx=...$$

$$...=\xi^{2n}\int\limits_0^\infty k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,f(x)x^\gamma\,dx+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2k}\left(\left(x^\gamma\frac{d}{dx}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\right)\,[B_\gamma^{n-1-k}f(x)]-k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1-k}f(x)]\right)\bigg|_{x=0}.$$

Пусть $0\leq\gamma<1$, тогда используя (10), получим

$$\lim_{x\to0+}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1-k}f(x)]=\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\lim_{x\to0+}x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1-k}f(x)].$$

Для $\gamma=1$, применяя (11), будем иметь

$$\lim_{x\to0+}k_0(x\xi)\,\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1-k}f(x)]=-\lim_{x\to0+}\ln x\xi\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1-k}f(x)].$$

Когда $1 < \gamma$, используя (12), получим

$$\lim_{x\to 0+} k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\, x^\gamma \frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1-k} f(x)] = \frac{1}{\gamma-1}\lim_{x\to 0+} x\xi^{1-\gamma}\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1-k} f(x)].$$

Затем запишем

$$\frac{d}{dx}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = -\frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}\xi^{\frac{3-\gamma}{2}}x^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}K_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi)$$

и, применяя (8) для близких к нулю x, будем иметь

$$x^\gamma \frac{d}{dx}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = -\frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}x^{\frac{\gamma+1}{2}}\xi^{\frac{3-\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi) \sim$$

$$\sim -\frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}x^{\frac{\gamma+1}{2}}\xi^{\frac{3-\gamma}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2^{1-\frac{\gamma+1}{2}}}(\xi x)^{-\frac{\gamma+1}{2}} = -\xi^{1-\gamma}, \qquad x\to 0+,$$

следовательно

$$\lim_{x\to 0+}\left(x^\gamma \frac{d}{dx}k_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\right)[B_\gamma^{n-1-k} f(x)] = -\xi^{1-\gamma}B_\gamma^{n-1-k}f(0+)$$

и для $0 \le \gamma < 1$

$$\mathcal{K}_\gamma[B_\gamma^n f](\xi) = \xi^{2n}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2k+1-\gamma}B_\gamma^{n-1-k}f(0+) -$$

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2k}\lim_{x\to 0+}x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-1-k}f(x)] =$$

$$= \xi^{2n}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-1-\gamma}B_\gamma^{n-k}f(0+) - \frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\lim_{x\to 0+}\sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-2}x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-k}f(x)],$$

для $\gamma = 1$

$$\mathcal{K}_\gamma[B_\gamma^n f](\xi) = \xi^{2n}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-1-\gamma}B_\gamma^{n-k}f(0+) + \lim_{x\to 0+}\sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-2}\ln x\xi\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-k}f(x)],$$

для $1 < \gamma$

$$\mathcal{K}_\gamma[B_\gamma^n f](\xi) =$$

$$= \xi^{2n}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-1-\gamma}B_\gamma^{n-k}f(0+) - \frac{1}{\gamma-1}\lim_{x\to 0+}\sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-1-\gamma}x\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-k}f(x)].$$

$\square$

Замечание 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-k} f(x)]$ *ограничено и* $B_\gamma^n f \in \mathscr{M}_\gamma^a(\mathbb{R}_+)$ *и* $\gamma \neq 1$, *тогда*

$$\mathcal{K}_\gamma[B_\gamma^n f](\xi) = \xi^{2n}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=1}^{n} \xi^{2k-1-\gamma} B_\gamma^{n-k} f(0+). \tag{35}$$

Если $\frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-k} f(x)] \sim x^\eta$, $\eta > 0$ *при* $x \to 0+$, *то* (35) *справедливо для* $\gamma = 1$.

Замечание 2. *Поскольку* $k_{-\frac{1}{2}}(x) = e^{-x}$, *то*

$$\mathcal{K}_0[f](\xi) = \mathcal{L}[f](\xi),$$

где $\mathcal{L}[f]$ — *преобразование Лапласа функции* f. *Известно, что*

$$\mathcal{L}[f''](\xi) = \xi^2\mathcal{L}[f](\xi) - \xi f(0) - f'(0).$$

С другой стороны,

$$\left.\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\right|_{\gamma=0} = 1, \qquad \left.\sum_{k=1}^{n} x^\gamma \frac{d}{dx}[B_\gamma^{n-k} f(x)]\right|_{\gamma=0,n=1} = f'(x)$$

и

$$\mathcal{K}_0[B_0 f](\xi) = Lf''(\xi) = \xi^2\mathcal{K}_0[f](\xi) - \xi f(0) - f'(0) = \mathcal{L}[f''](\xi).$$

Аналогичная ситуация справедлива и для $\mathcal{K}_0[B_0^n f](\xi)$.

Теорема 4. *Пусть* $n = [\alpha] + 1$ *для нецелого* α *и* $n = \alpha$ *для* $\alpha \in \mathbb{N}$ *и* $\mathcal{B}_{\gamma,0+}^\alpha f \in \mathscr{M}_\gamma^a(\mathbb{R}_+)$, *тогда*

при $0 \leq \gamma < 1$

$$\mathcal{K}_\gamma[\mathcal{B}_{\gamma,0+}^\alpha f](\xi) =$$

$$= \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{2\alpha-2k-1-\gamma} B_\gamma^k f(0+) - \frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \lim_{x\to 0+} \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{2\alpha-2k-2} x^\gamma \frac{d}{dx}[B_\gamma^k f(x)], \tag{36}$$

при $\gamma = 1$

$$\mathcal{K}_\gamma[\mathcal{B}_{\gamma,0+}^\alpha f](\xi)$$

$$= \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{2\alpha-2k-1-\gamma} B_\gamma^k f(0+) + \lim_{x\to 0+} \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{2\alpha-2k-2} \ln x\xi \frac{d}{dx}[B_\gamma^k f(x)], \tag{37}$$

при $1 < \gamma$

$$\mathcal{K}_\gamma[\mathcal{B}^\alpha_{\gamma,0+}f](\xi) =$$

$$= \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}B^k_\gamma f(0+) - \frac{1}{\gamma-1}\lim_{x\to 0+}\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}x\frac{d}{dx}[B^k_\gamma f(x)], \quad (38)$$

где

$$B^{\alpha-k}_{\gamma,0+}f(0+) = \lim_{x\to+0}B^{\alpha-k}_{\gamma,0+}f(x).$$

Доказательство. Используя (30) и (35) для $0 \leq \gamma < 1$, получим

$$\mathcal{K}_\gamma[\mathcal{B}^\alpha_{\gamma,0+}f](\xi) = \mathcal{K}_\gamma[(IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+}B^n_\gamma f)(x)](\xi) = \xi^{2\alpha-2n}\mathcal{K}_\gamma[B^n_\gamma f](\xi) = \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\xi^{2\alpha-2n+2k-1-\gamma}B^{n-k}_\gamma f(0+) - \frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\lim_{x\to 0+}\sum_{k=1}^{n}\xi^{2\alpha-2n+2k-2}x^\gamma\frac{d}{dx}[B^{n-k}_\gamma f(x)] =$$

$$= \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}B^k_\gamma f(0+) - \frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\lim_{x\to 0+}\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-2}x^\gamma\frac{d}{dx}[B^k_\gamma f(x)],$$

где

$$B^k_{\gamma,0+}f(0+) = \lim_{x\to+0}B^k_{\gamma,0+}f(x).$$

Аналогично при $\gamma = 1$ будем иметь

$$\mathcal{K}_\gamma[\mathcal{B}^\alpha_{\gamma,0+}f](\xi) = \mathcal{K}_\gamma[(IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+}B^n_\gamma f)(x)](\xi) = \xi^{2\alpha-2n}\mathcal{K}_\gamma[B^n_\gamma f](\xi) = \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\xi^{2\alpha-2n+2k-1-\gamma}B^{n-k}_\gamma f(0+) + \lim_{x\to 0+}\sum_{k=1}^{n}\xi^{2\alpha-2n+2k-2}\ln x\xi\frac{d}{dx}[B^{n-k}_\gamma f(x)] =$$

$$= \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}B^k_\gamma f(0+) + \lim_{x\to 0+}\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-2}\ln x\xi\frac{d}{dx}[B^k_\gamma f(x)]$$

и при $\gamma > 1$

$$\mathcal{K}_\gamma[\mathcal{B}^\alpha_{\gamma,0+}f](\xi) = \mathcal{K}_\gamma[(IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+}B^n_\gamma f)(x)](\xi) = \xi^{2\alpha-2n}\mathcal{K}_\gamma[B^n_\gamma f](\xi) =$$

$$= \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}B^k_\gamma f(0+) - \frac{1}{\gamma-1}\lim_{x\to 0+}\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}x\frac{d}{dx}[B^k_\gamma f(x)].$$

□

Замечание 3. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d}{dx}[B_\gamma^k f(x)]$ *ограничена,* $\mathcal{B}^\alpha_{\gamma,0+}f \in \mathscr{M}_\gamma^a(\mathbb{R}_+)$ *и* $\gamma \neq 1$, *тогда*

$$\mathcal{K}_\gamma[\mathcal{B}^\alpha_{\gamma,0+}f](\xi) = \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - \sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}B_\gamma^k f(0+). \tag{39}$$

Если $\frac{d}{dx}[B_\gamma^k f(x)] \sim x^\eta$, $\eta > 0$ *при* $x \to 0+$, *то* (39) *справедливо и для* $\gamma = 1$.

4 Метод преобразования Мейера для решения однородного уравнения с левосторонней дробной производной Бесселя на полуоси типа Герасимова–Капуто

4.1 Общий случай

Используя преобразование Мейера (общая схема применения интегральных преобразований к уравнениям дробного порядка изложена в [29] и [30]) решим уравнение

$$(\mathcal{B}^\alpha_{\gamma,0+}f)(x) = \lambda f(x), \qquad \alpha > 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{40}$$

с левосторонними дробными производными Бесселя на полуоси типа Герасимова–Капуто с постоянным коэффициентом при $\gamma \neq 1$.

Пусть $\frac{m-1}{2} < \alpha \leq \frac{m}{2}$, $m \in \mathbb{N}$. К уравнению (40) нужно добавить m условий, которые для $0 \leq \gamma < 1$ имеют вид

$$(B^k_{\gamma,0+}f)(0+) = a_{2k}, \qquad \lim_{x\to 0+} x^\gamma \frac{d}{dx}B^k_{\gamma,0+}f(x) = a_{2k+1}, \qquad a_{2k}, a_{2k+1} \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

а для $\gamma > 1$ условия примет вид

$$(B^k_{\gamma,0+}f)(0+) = b_{2k}, \qquad \lim_{x\to 0+} x \frac{d}{dx}B^k_{\gamma,0+}f(x) = b_{2k+1}, \qquad b_{2k}, b_{2k+1} \in \mathbb{R}, \tag{42}$$

где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое, что выполняются неравенства

$$0 \leq 2k \leq m-1, \qquad 1 \leq 2k+1 \leq m-2 \qquad \text{если } m \text{ — нечетное,}$$

и

$$1 \leq 2k+1 \leq m-1, \qquad 0 \leq 2k \leq m-2 \qquad \text{если } m \text{ — четное.}$$

Это означает, что для нечетного m последнее условие имеет вид $(B^k_{\gamma,0+}f)(0+){=}a_{m-1}$ или $(B^k_{\gamma,0+}f)(0+){=}b_{m-1}$, а для четного m последнее условие имеет вид $\lim\limits_{x\to 0+} x^\gamma \frac{d}{dx}B^k_{\gamma,0+}f(x){=}a_{m-1}$ или $\lim\limits_{x\to 0+} x\frac{d}{dx}B^k_{\gamma,0+}f(x){=}b_{m-1}$.

Пример 1. *При $m=1$ имеем, что $k=0$ и при $m=1$ к (40) добавляется только одно условие*

$$f(0+)=a_0 \quad \textit{при} \quad 0\leq\gamma<1 \quad \textit{и} \quad f(0+)=b_0 \quad \textit{при} \quad \gamma>1.$$

При $m=2$ также имеем, что $k=0$, но к (40) добавляются два условия

$$f(0+)=a_0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\gamma\frac{df}{dx}=a_1 \quad \textit{при} \quad 0\leq\gamma<1 \quad \textit{и}$$

$$f(0+)=b_0, \quad \lim_{x\to 0+} x\frac{df}{dx}=b_1 \quad \textit{при} \quad \gamma>1.$$

Теорема 5. *При $0\leq\gamma<1$ решение задачи (40)–(41)*

в случае нечетного m имеет вид

$$f(x)=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} a_{2k}\; x^{2k}\; {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\ (k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\frac{m-3}{2}} a_{2k+1}\; x^{2k+1-\gamma}\; {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+\frac{3}{2},\alpha\right),(1,1)\\ \left(k+\frac{3-\gamma}{2},\alpha\right),(2k+2,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right], \tag{43}$$

где вторая сумма исчезает при $\frac{m-3}{2}<0$, то есть при $m=1$,

в случае четного m имеет вид

$$f(x)=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} a_{2k}\; x^{2k}\; {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\ (k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} a_{2k+1}\; x^{2k+1-\gamma}\; {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+\frac{3}{2},\alpha\right),(1,1)\\ \left(k+\frac{3-\gamma}{2},\alpha\right),(2k+2,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]. \tag{44}$$

Для $\gamma>1$ решение (40)–(42)

в случае нечетного m имеет вид

$$f(x)=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}b_{2k}\ x^{2k}\ {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\(k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]+$$

$$+\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\gamma-1)}\sum_{k=0}^{\frac{m-3}{2}}b_{2k+1}\ x^{2k}\ {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\(k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right],\tag{45}$$

где вторая сумма исчезает при $\frac{m-3}{2}<0$, то есть при $m=1$,

в случае четного m имеет вид

$$f(x)=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}}b_{2k}\ x^{2k}\ {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\(k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]+$$

$$+\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\gamma-1)}\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}}b_{2k+1}\ x^{2k}\ {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\(k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right].\tag{46}$$

Здесь ${}_p\Psi_q(z)$ — функция Райта–Фокса (16).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $0\le\gamma<1$. Применяя преобразование Мейера (20) к обеим частям (40) и используя (36), получим

$$\xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi)-\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}B_\gamma^kf(0+)-\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\lim_{x\to0+}\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-2}x^\gamma\frac{d}{dx}[B_\gamma^kf(x)]=\lambda\mathcal{K}_\gamma[f](\xi),$$

где $n\in\mathbb{N}$, $n-1<\alpha\le n$. Принимая во внимание условия (41), будем иметь

для случая нечетного m будем иметь

$$\xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi)-\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}a_{2k}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}-\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\frac{m-3}{2}}a_{2k+1}\xi^{2\alpha-2k-2}=\lambda\mathcal{K}_\gamma[f](\xi),$$

где вторая сумма исчезает при $\frac{m-3}{2}<0$, то есть при $m=1$,

для случая четного m будем иметь

$$\xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi)-\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}}a_{2k}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}-\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}}a_{2k-1}\xi^{2\alpha-2k-2}=\lambda\mathcal{K}_\gamma[f](\xi).$$

Следовательно,

для случая нечетного m будем иметь

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} a_{2k}\,\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)+\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\frac{m-3}{2}} a_{2k+1}\,\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-2}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x),$$

для случая четного m будем иметь

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} a_{2k}\,\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)+\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} a_{2k+1}\,\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-2}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x).$$

Для того чтобы найти явное выражение для f, будем использовать формулу (24). Итак, сначала найдем обратное преобразования Лапласа с учетом формулы (19):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-2}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=x^{2k+1}E_{2\alpha,2k+2}(\lambda x^{2\alpha}),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=x^{2k+\gamma}E_{2\alpha,2k+\gamma+1}(\lambda x^{2\alpha}).$$

Теперь найдем

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}x^{\beta-\gamma}E_{2\alpha,\beta}(\lambda x^{2\alpha}).$$

Используя (23), запишем

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}x^{\beta-\gamma}E_{2\alpha,\beta}(\lambda x^{2\alpha})=\frac{2\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^p\int\limits_0^x z^\beta E_{2\alpha,\beta}(\lambda z^{2\alpha})(x^2-z^2)^{p-\frac{\gamma}{2}-1}dz,$$

где

$$p=\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1.$$

Получим

$$E_{2\alpha,\beta}(\lambda z^{2\alpha})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m z^{2m\alpha}}{\Gamma(2\alpha m+\beta)}$$

и

$$\int\limits_0^x z^\beta E_{2\alpha,\beta}(\lambda z^{2\alpha})(x^2-z^2)^{p-\frac{\gamma}{2}-1}dz=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\Gamma(2\alpha m+\beta)}\int\limits_0^x z^{2m\alpha+\beta}(x^2-z^2)^{p-\frac{\gamma}{2}-1}dz=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\Gamma(2\alpha m+\beta)}\frac{\Gamma\left(m\alpha+\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{\gamma}{2}\right)}{2\Gamma\left(m\alpha+p+\frac{\beta-\gamma+1}{2}\right)}x^{2m\alpha+2p+\beta-\gamma-1}.$$

Следовательно,

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}x^{\beta-\gamma}E_{2\alpha,\beta}(\lambda x^{2\alpha}) = \frac{\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\Gamma(2\alpha m+\beta)}\frac{\Gamma\left(m\alpha+\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(m\alpha+p+\frac{\beta-\gamma+1}{2}\right)}x^{2m\alpha+2p+\beta-\gamma-1}.$$

Используя формулу

$$\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n x^{2\mu+2n} = \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\mu+1)}x^{2\mu},$$

запишем

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}x^{\beta-\gamma}E_{2\alpha,\beta}(\lambda x^{2\alpha}) = \frac{\sqrt{\pi}x^{\beta-\gamma}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m\alpha+\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha m+\beta)\Gamma\left(m\alpha+\frac{\beta-\gamma+1}{2}\right)}(\lambda x^{2\alpha})^m.$$

Принимая во внимание вид функции Фокса–Райта (16), мы можем записать

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}x^{\beta-\gamma}E_{2\alpha,\beta}(\lambda x^{2\alpha}) = \frac{\sqrt{\pi}x^{\beta-\gamma}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\beta+1}{2},\alpha\right),(1,1)\\ \left(\frac{\beta-\gamma+1}{2},\alpha\right),(\beta,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right].$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-2}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x) &= \frac{1}{A_\gamma x}(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}x^{1-\gamma}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-2}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right]\right)(x) =\\ &= \frac{1}{A_\gamma x}(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}x^{2k+2-\gamma}E_{2\alpha,2k+2}(\lambda x^{2\alpha}) =\\ &= \frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,x^{2k+1-\gamma}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+\frac{3}{2},\alpha\right),(1,1)\\ \left(k+\frac{3-\gamma}{2},\alpha\right),(2k+2,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right],\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x) = \frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,x^{2k}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\ (k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]. \quad (47)$$

Таким образом, для случая нечетного m получим (43), а для случая четного m — (44).

Для $\gamma > 1$, применяя преобразование Мейера (20) к обеим частям (40) и используя (38), получим

$$\xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\gamma[f](\xi)-\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}B_\gamma^k f(0+)-\frac{1}{\gamma-1}\lim_{x\to 0+}\sum_{k=0}^{n-1}\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}x\frac{d}{dx}[B_\gamma^k f(x)] = \lambda\mathcal{K}_\gamma[f](\xi),$$

где $n\in\mathbb{N}$, $n-1<\alpha\le n$. Принимая во внимание условия (42), получим

для случая нечетного m будем иметь

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} b_{2k}\,\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x) + \frac{1}{\gamma-1}\sum_{k=0}^{\frac{m-3}{2}} b_{2k+1}\,\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x),$$

для случая четного m будем иметь

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} b_{2k}\,\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)+\frac{1}{\gamma-1}\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}} b_{2k+1}\,\mathcal{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-2k-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x).$$

Следовательно, применяя (47), получим (45) и (46), соответственно.

□

4.2 Частные случаи и примеры

В этом разделе сначала рассмотрим уравнение (40), в случае, когда выполняются условия замечания 3. Затем приведем несколько примеров.

Теорема 6. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\frac{m-1}{2}<\alpha\leq\frac{m}{2}$, $\frac{d}{dx}[B_\gamma^k f(x)]$ *ограничена для* $0<\gamma$, $\gamma\neq 1$ *и* $\frac{d}{dx}[B_\gamma^k f(x)]\sim x^\beta$, $\beta>0$ *при* $x\to 0+$ *в случае* $\gamma=1$, *тогда решение уравнения*

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^\alpha f)(x)=\lambda f(x),\qquad \alpha>0,\qquad \lambda\in\mathbb{R} \tag{48}$$

с m *условиями для* $0\leq\gamma<1$ *вида*

$$(B_{\gamma,0+}^k f)(0+)=a_{2k},\qquad \lim_{x\to 0+} x^\gamma\frac{d}{dx}B_{\gamma,0+}^k f(x)=0, \tag{49}$$

с m *условиями для* $\gamma=1$ *вида*

$$(B_{\gamma,0+}^k f)(0+)=a_{2k},\qquad \lim_{x\to 0+}\ln x\frac{d}{dx}[B_\gamma^k f(x)]=0, \tag{50}$$

с m *условиями для* $\gamma>1$ *вида*

$$(B_{\gamma,0+}^k f)(0+)=a_{2k},\qquad \lim_{x\to 0+} x\frac{d}{dx}B_{\gamma,0+}^k f(x)=0, \tag{51}$$

где $a_{2k}\in\mathbb{R}$ *и* k *такие, что следующие неравенства верны*

$$0\leq 2k\leq m-1,\qquad 1\leq 2k+1\leq m-2\qquad \text{если } m \text{ — нечетное,}$$

и

$$1\leq 2k+1\leq m-1,\qquad 0\leq 2k\leq m-2\qquad \text{если } m \text{ — четное.}$$

Для случая нечетного m решение примет вид

$$f(x)=\frac{2^{\gamma}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}a_{2k}\;x^{2k}\;{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\ (k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right],\tag{52}$$

а для случая четного m решение примет вид

$$f(x)=\frac{2^{\gamma}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\frac{m-2}{2}}a_{2k}\;x^{2k}\;{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(k+1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\ (k+1,\alpha),(2k+\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right].\tag{53}$$

Здесь ${}_p\Psi_q(z)$ — функция Райта–Фокса (16).

Пример 2. *Рассмотрим общий случай для задачи* (40)–(41) *при* $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, $0\leq\gamma<1$. *В этом случае* $m=1$, $2k=0$ *используя* (43), *получим, что решение задачи*

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=\lambda f(x),\qquad \alpha>0,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

$$f(0+)=a_0,\qquad a_1\in\mathbb{R}$$

имеет вид

$$f(x)=\frac{2^{\gamma}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}a_0\;{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right].\tag{54}$$

Легко видеть, что для $\gamma>1$ и для $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ решение имеет такой же вид. На рисунке 1 представлен график f при $\gamma=\frac{1}{3}$ и при $\gamma=5$ когда $\alpha=\frac{1}{2}$, $\lambda=1$.

Когда $\gamma=0$ мы получим

$$({}^{GC}D^{2\alpha}_{0+}f)(x)=\lambda f(x),\qquad 0<2\alpha\leq 1,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

$$f(0+)=a_1,\qquad a_1\in\mathbb{R}$$

и, используя (17), *запишем*

$$f(x)=a_0\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}(1,\alpha),(1,1)\\ (1,\alpha),(1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]=a_0\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(1,1)\\ (1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]=a_0\,E_{2\alpha,1}(\lambda x^{2\alpha}),$$

что совпадает с (5) *если $l=1$ и 2α взято вместо α.*

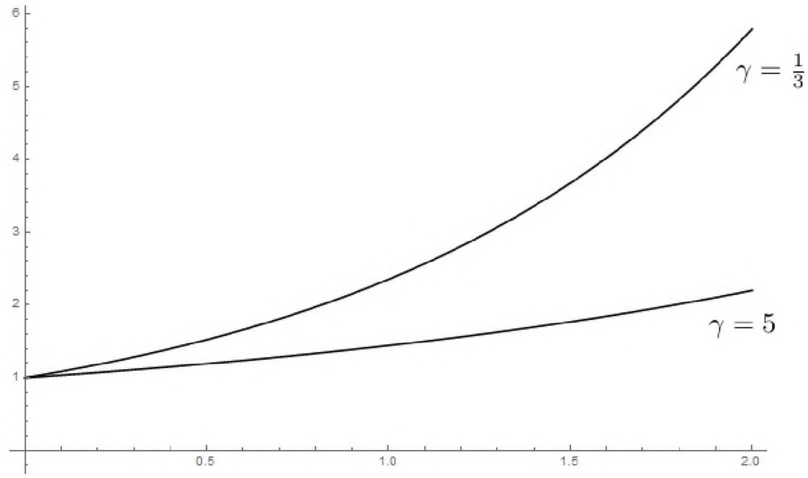

Рис. 1: График решения (54) при $\gamma = \frac{1}{3}$ и при $\gamma = 5$ когда $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$.

Пример 3. *Рассмотрим случай, представленный в Теореме 6 при* $\alpha = 1$, $b_0 = 1$, $\lambda = -1$. *В этом случае* $m = 2$, $2k = 0$, $2k+1 = 1$, *что означает* $k = 0$. *Используя* (53), *получим, что решение задачи*

$$B_\gamma f(x) = -f(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f(0+) = 1, \qquad f'(0+) = 0$$

имеет вид

$$f(x) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{array}{c} \left(1+\frac{\gamma}{2}, 1\right), (1,1) \\ (1,1), (\gamma+1, 2) \end{array} \middle| -x^2 \right] = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{array}{c} \left(1+\frac{\gamma}{2}, 1\right) \\ (\gamma+1, 2) \end{array} \middle| -x^2 \right] =$$

$$= \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}+m\right)}{\Gamma(\gamma+1+2m)} \frac{x^{2m}}{m!}.$$

Использование формулы удвоения Лежандра вида

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

получим

$$f(x) = 2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}+m\right)}{2^{\gamma+2m} \Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}+m\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+m\right)} \frac{x^{2m}}{m!} =$$

$$= \frac{2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{x^{\frac{\gamma-1}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+m\right)} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{\gamma-1}{2}} = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x), \tag{55}$$

где

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\, J_\nu(x).$$

Для $j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)$ *имеем*

$$B_\gamma j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\tau x) = -\tau^2 j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\tau x).$$

Следовательно, функция

$${}_2\Psi_2 \left[\begin{array}{c} \left(1+\frac{\gamma}{2}, \alpha\right), (1,1) \\ (1,\alpha), (\gamma+1, 2\alpha) \end{array} \middle| \lambda x^{2\alpha} \right]$$

может быть рассмотрена как обобщение $j_{\frac{\gamma-1}{2}}$.

Пример 4. *Легко видеть, что при* $\gamma = 1$ *оператор Бесселя есть двумерный оператор Лапласа в полярных координатах* $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, *действующий на радиальную функцию* $f = f(r)$:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr}.$$

Тогда уравнение (40) *примет вид*

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^\alpha f(r) = \lambda f(r), \tag{56}$$

где $\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^\alpha$ *понимается в смысле определения 1.*

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\frac{m-1}{2} < \alpha \le \frac{m}{2}$. *Если* $\frac{d}{dr}[B_1^k f(r)] \sim r^\beta$, $\beta > 0$ *при* $r \to 0+$, *то к* (56) *добавляются* m *условий*

$$\lim_{r\to 0+} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k f(r) = a_{2k}, \qquad \lim_{r\to 0+} \ln r \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k f(r)\right] = 0, \tag{57}$$

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *такие, что следующие неравенства верны*

$$0 \le 2k \le m-1, \qquad 1 \le 2k+1 \le m-2 \qquad \text{если } m \text{ — нечетное},$$

и

$$1 \le 2k+1 \le m-1, \qquad 0 \le 2k \le m-2 \qquad \text{если } m \text{ — четное}.$$

При $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ *решение уравнения* (56) *при условии*

$$\lim_{r \to 0+} f(r) = b_0$$

имеет вид

$$f(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} b_0 \; {}_2\Psi_2 \left[\begin{array}{c} \left(1+\frac{1}{2}, \alpha\right), (1,1) \\ (1,\alpha), (2, 2\alpha) \end{array} \middle| \lambda r^{2\alpha} \right]. \tag{58}$$

Решение для $\lambda = 2$, $b_0 = 1$, $\alpha = 0,1; 0,3; 0,5$ *представлены на рисунке 2*

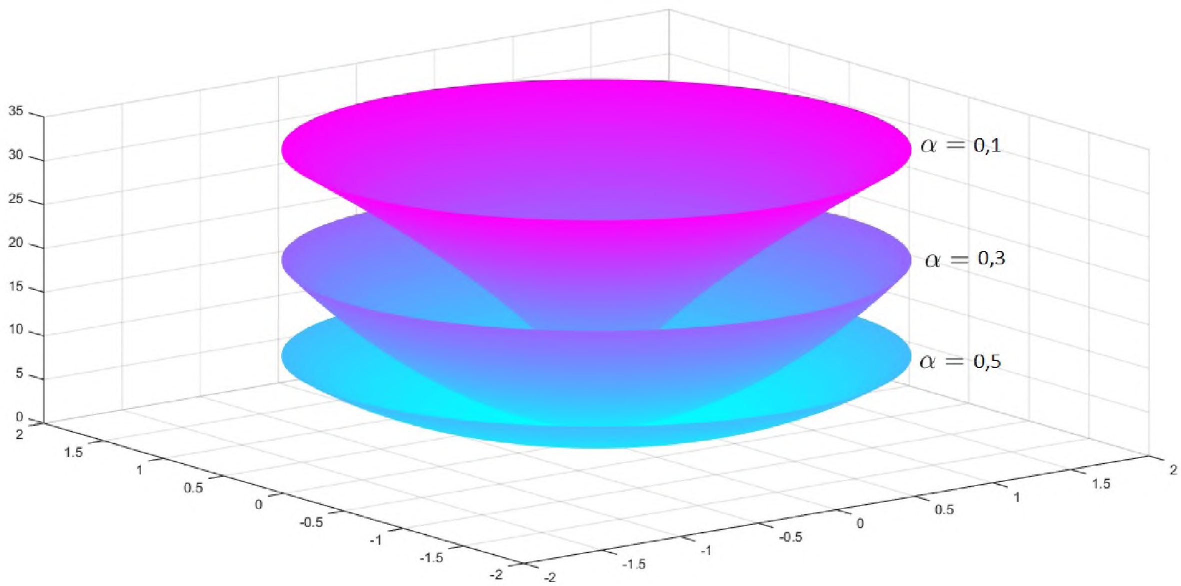

Рис. 2: График решения (58) при $\lambda = 2$, $b_0 = 1$, $\alpha = 0,1; 0,3; 0,5$.

5 Заключение

В данной статье предлагается новый подход для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с левосторонней дробной производной Бесселя на полуоси типа Герасимова–Капуто на основе метод интегрального преобразования Мейера. Также приведено несколько иллюстративных примеров.

Список литературы

[1] Sprinkhuizen-Kuyper, I. G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator, *J. Math. Analysis and Applications* **1979**, *72*, 674–702.

[2] Катрахов, В. В., Ситник, С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений, *Современная математика. Фундаментальные направления* **2018**, *64:2*, 211–426.

[3] Shishkina, E. L., Sitnik, S. M. On fractional powers of Bessel operators, *Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions* **2017**, *8:1*, 49–67.

[4] Шишкина, Э. Л., Ситник, С. М. О дробных степенях оператора Бесселя на полуоси, *Сибирские электронные математические известия* **2018**, *15*, 1–10.

[5] Shishkina, E. L., Sitnik, S. M. A Fractional Equation with Left-Sided Fractional Bessel Derivatives of Gerasimov–Caputo Type, *Mathematics* **2019**, *7:12*, 1-21.

[6] Shishkina, E. L., Sitnik, S. M. Fractional Bessel Integrals and Derivatives on Semi-axes, *Transmutation Operators and Applications*, Birkhäuser, Cham **2020**, 615-651.

[7] McBride A. C. Fractional powers of a class of ordinary differential operators, *Proc. London Math. Soc.* **1982**, *3:45*, 519–546.

[8] Dimovski, I. Operational calculus for a class of differential operators, *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **1966**, *19:12*, 1111–1114.

[9] Dimovski, I. On an operational calculus for a differential operator, *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **1968**, *21:6*, 513–516.

[10] Dimovski, I. H., Kiryakova, V. S. Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's G-function, *"Complex Analysis and Applications '83" (Proc. Intern. Conf. Varna 1983), Sofia*, **1985**, 45–66.

[11] Kiryakova, V. *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Pitman Res. Notes Math., Longman Scientific & Technical, Harlow, Co-publ. John Wiley, New York, **301**, 1994; 388 p.

[12] Garra, R., Orsingher, E. Random flights related to the Euler-Poisson-Darboux equation, *Markov processes and related fields* **2016**, *22*, 87–110.

[13] Garra, R., Orsingher, E., Polito, F. Fractional Klein–Gordon Equations and Related Stochastic Processes, *Journal of Statistical Physics* **2014**, *155*, 777–809.

[14] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006; 523 p.

[15] Gerasimov, A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to problems of internal friction, *Akad. Nauk SSSR, Prikl. Mat. Mekh.* **1948**, *12*, 251–259.

[16] Watson, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge: University Press, 1922; 804 p.

[17] Bowman, F. *Introduction to Bessel functions*, Courier Corporation, 2012; 285 p.

[18] Kreh, M. Bessel functions, *Lecture Notes, Penn State-G?ttingen Summer School on Number Theory* **2012**, *82*, 161–162.

[19] Luke, Y. L. *Integrals of Bessel functions*, Courier Corporation, 2014; 419 p.

[20] Abramowitz, M., Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publ., Inc., New York. 1972; 1060 p.

[21] Dzhrbashyan, M. M. *Integral Transforms and Representations of Functions in Complex Plane*, Moscow, Nauka, 1966; 672 p.

[22] Dzhrbashyan, M. M. *Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain*, Birkhauser, 1993; 256 p.

[23] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. L. *Fractional integrals and derivatives*, Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993; 976 p.

[24] Gorenflo, R., Mainardi, F. Fractional Calculus. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures)* **1997**, *378*, 223–278.

[25] Fox, C. The G and H functions as symmetrical Fourier kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.* **1961**, *98*, 395–429.

[26] Wright, E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. *J. London Math. Soc.* **1935**, *10*, 286–293.

[27] Glaeske, H. J., Prudnikov and Skornik K. A. *Operational calculus and related topics*, Chapman and Hall/CRC, USA, 2006; 424 p.

[28] Ситник, С. М., Шишкина, Э. Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами*, Бесселя, Физматлит, Москва, 2019, 224 с.

[29] Luchko, Y. Some Schemata for Applications of the Integral Transforms of Mathematical Physics. *Mathematics* **2019**, *7:3*, 254, 1–18.

[30] Thakur, A. K., Kumar, R., Sahu, G. Application of Laplace Transform on Solution of Fractional Differential Equation. *Journal of Computer and Mathematical Sciences* **2018**, *9:5*, 478–484.

[31] Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I. *Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions*, Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 1992; 808 p.